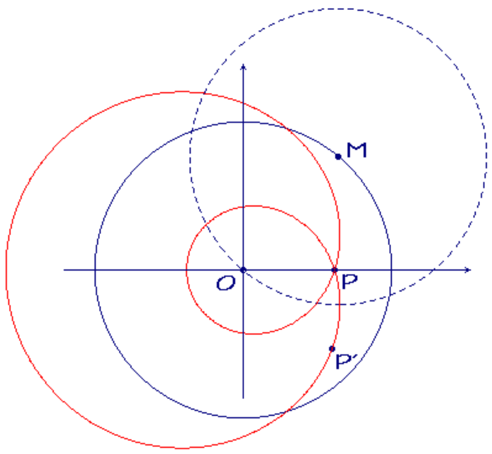
Eine anallagmatische Kurve

Eckart Schmidt

Man bezeichnet eine Kurve als anallagmatisch, wenn sie durch eine Inversion auf sich abgebildet werden kann. Eine anallagmatische Kurve kann als Inverses eines Kegelschnitts oder als Fußpunktkurve eines Kegelschnitts oder als Hüllkurve einer Kreisschar dargestellt werden. Diese Aspekte werden hier für ein spezielles Beispiel aufgezeigt. Man erhält die hier untersuchte Kurve, wenn man einen festen Punkt P an Kreisen spiegelt, die gleichen Radius R und einen gemeinsamen Punkt O haben. - Gearbeitet wird in kartesischen Koordinaten.



Die Kurvengleichung

Nach den definierenden Stücken sei die zu untersuchende Kurve als PRO-Kurve angesprochen. Legt man die Mitte O des erzeugenden Kreises vom Radius R in den Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems, so liegen die Mitten der Scharkreise vom Radius R auf dem erzeugenden Kreis, so dass folgende Parameterdarstellung für die Mitten möglich ist:

$$M(R\cos\psi; R\sin\psi).$$

Spiegelt man einen Punkt $P(p;0)$ – es sei $p>0$ – an den Scharkreisen, so erhält man die Bildpunkte

$$P'\left(\frac{pR(p\cos\psi - R\cos 2\psi}{p^2+R^2-2pR\cos\psi}; \frac{pR(p\sin\psi - R\sin 2\psi}{p^2+R^2-2pR\cos\psi}\right).$$

Eliminiert man den Parameter ψ, so ergibt sich für die Gleichung der PRO-Kurve

$$p^4R^2 - p^2(p^2+2R^2-2px)(x^2+y^2) - (p^2-R^2)(x^2+y^2)^2 = 0\,.$$

Etwas übersichtlicher wird die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten r und φ

$$\cos\varphi = \frac{p^2r^2(p^2+r^2)-R^2(p^2-r^2)^2}{2p^3r^3}.$$

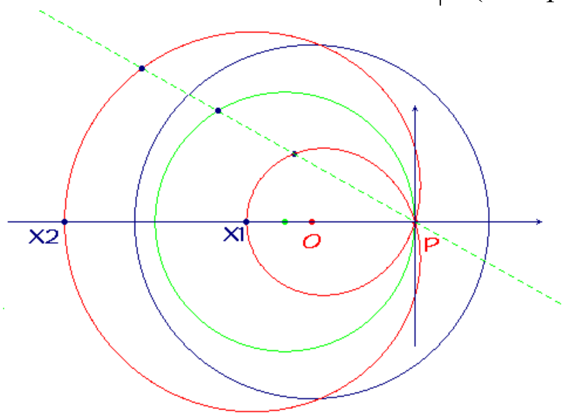
Von P abgesehen hat die PRO-Kurve die Nullstellen

$$X_1\left(\frac{-pR}{R+p};0\right) \quad \text{und} \quad X_2\left(\frac{-pR}{R-p};0\right) \quad \text{für } R \neq p.$$

Diskutieren lässt sich die Kurve für $R \neq p$ besser, wenn man den Pol in den Punkt P verlegt:

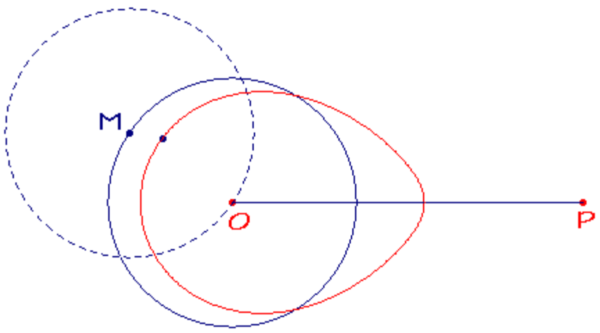
$$r = \frac{p(p^2-2R^2)}{(R^2-p^2)}\cos\varphi \pm \frac{p^2}{R^2-p^2}\sqrt{R^2-p^2\sin^2\varphi} \quad \text{(Pol } P\text{)}.$$

Aus dieser Polargleichung wird ersichtlich, dass Geraden durch P die Kurve in zwei Punkten schneiden, deren Mitten auf einem Kreis liegen. Der Kreis ist Thales-Kreis über P und dem Mittelpunkt von X_1 und X_2 mit dem Radius $\left|\frac{p(2R^2-p^2)}{2(R^2-p^2)}\right|$.

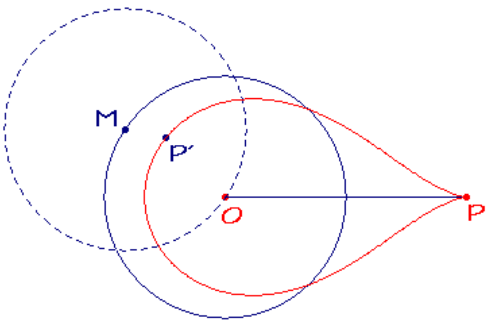


Spezialfälle

Für einen Fernpunkt P ist die PRO-Kurve der erzeugende Kreis.
Für $p = 2\sqrt{2}R$ erhält man z.B. eine eiförmige Kurve.

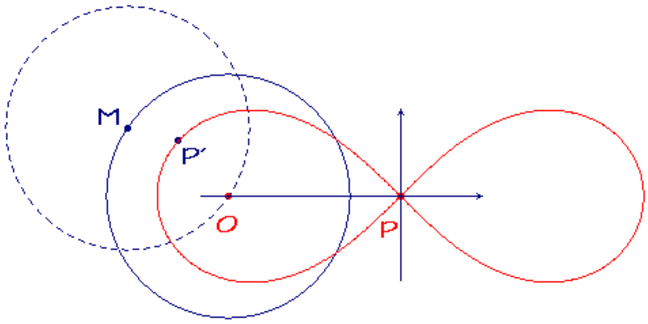


Für $p = 2R$ nimmt die Kurve tropfenförmige Gestalt an.



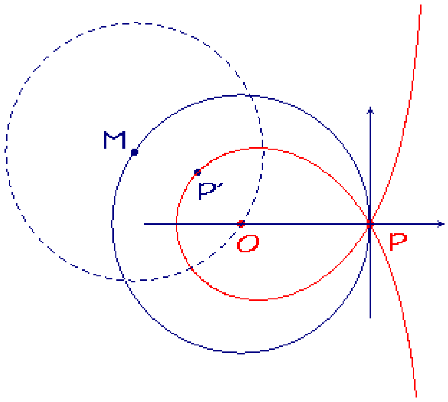
Für $p=\sqrt{2}R$ erhält man eine Lemniskate ([1], S.77) mit der Gleichung

$$r = 4R^2(-1+2\cos^2\varphi) \quad (\text{Pol } P).$$

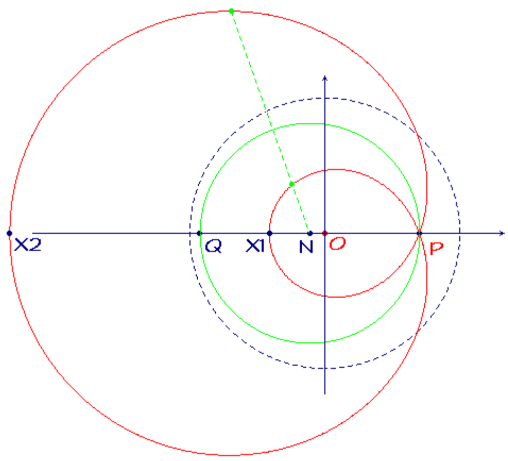


Für $p=R$ ergibt sich eine Trisektix ([1], S. 32) mit der Gleichung

$$r = -\frac{R}{2}(4\cos\varphi - \sec\varphi) \quad (\text{Pol } P).$$



Der Inversionskreis



Sucht man nach einem Inversionskreis, so dass die Kurve durch Spiegelung an diesem Kreis auf sich abgebildet wird, so muss dieser Kreis durch den Punkt P gehen und den vierten harmonischen Punkt Q zu X_1, X_2, P. Der Inversionskreis ist dann der Thales-Kreis über PQ:

Mittelpunkt $N(\frac{p^3}{2(p^2-2R^2)};0)$, Radius $\rho=\left|\frac{p(p^2-4R^2)}{2(p^2-2R^2)}\right|$.

(Für die Lemniskate zu $p=\sqrt{2}R$ entartet die Inversion zu einer Geradenspiegelung.)
Um die Inversionsinvarianz der PRO-Kurve zu bestätigen, lässt sich der Pol mittels der Transformationen

$$x=r\cos\varphi+x_N \quad , \quad y=r\sin\varphi$$

in den Mittelpunkt N des Inversionskreises verlegen. Die Polargleichung der PRO-Kurve ergibt sich dann zu

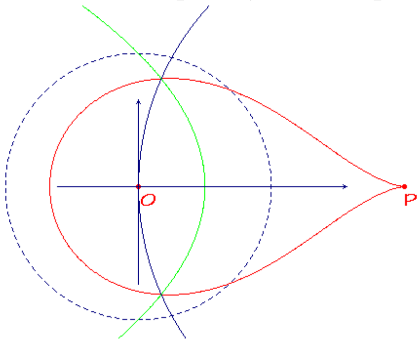
$$16R^2r^2(p^2-2R^2)^2+(p^2-R^2)(p^2-4R^2)^2(1+r^2)^2$$
$$+4p^2R^2(p^2-4R^2)r(1+r^2)\cos\varphi-4p^4(p^2-3R^2)r^2\cos^2\varphi=0,$$

die sich durch die Ersetzung $r\,//\,\frac{\rho^2}{r}$ reproduziert.

Als Inverses von Kegelschnitten

Spiegelt man die Kurve an Kreisen um P, so erhält man streckungsähnliche Kegelschnitte. Hier sei für die Inversion ein Kreis um P durch O gewählt:

$$(x;y) \quad \rightarrow \quad (\frac{p(x^2+y^2-px)}{(x-p)^2+y^2};\frac{p^2y}{(x-p)^2+y^2}).$$

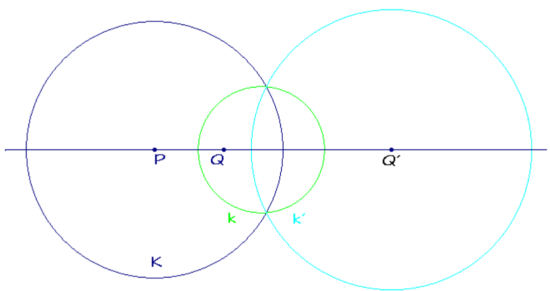


Betrachtet man vorweg die tropfenförmige Kurve für $p=2R$, so ist sie das Inverse einer Parabel mit der Polargleichung

$$r=\frac{R}{1+\cos\varphi} \quad \text{(Pol } O\text{)},$$

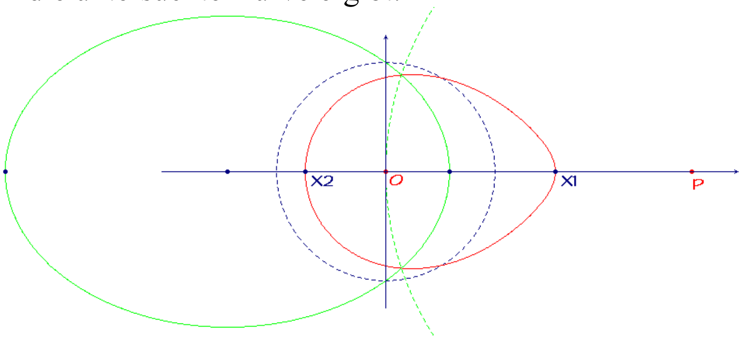
deren Brennpunkt in den Ursprung fällt und die den Halbparameter R hat.

Für die Kurven zu $p\neq 2R$ sei folgende Überlegung vorausgeschickt:



Betrachtet wird die Inversion zu einem Kreis K um den Punkt P, die einen Kreis k in den Kreis k' überführt. Ist Q der Bildpunkt von P bei der Spiegelung an k, so teilen P und Q den zugehörigen Durchmesser von k harmonisch. Damit teilen auch die Bilder P' und Q' bei der Spiegelung an K den zugehörigen Durchmesser von k' harmonisch. Da aber P' Fernpunkt wird, muss Q' Mittelpunkt von k' sein.

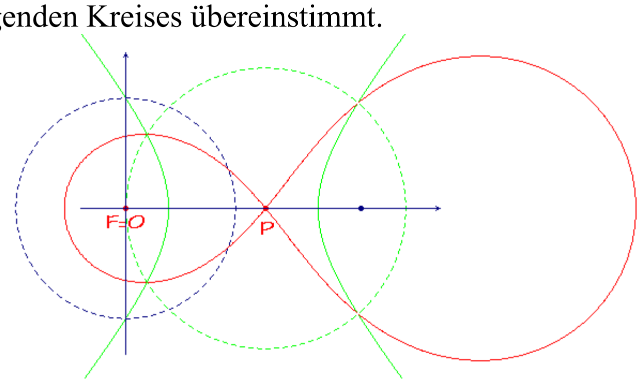
Betrachtet man jetzt – auf eine PRO-Kurve bezogen – einen Inversionskreis K um P durch O und sieht in k einen Scharkreis, so ist Q ein Punkt der PRO-Kurve. Die Bilder Q' bei Spiegelung an K sind Mittelpunkte der Bildkreise k', die einen gemeinsamen Punkt O haben und einen Hüllkreis h. Dieser ist das Inverse eines Kreises um O mit dem Radius $2R$. Damit liegen die Punkte Q' auf einem Kegelschnitt ([2], S.211) mit einem Brennpunkt O und dem Leitkreis h, der durch Spiegelung an K die untersuchte Kurve ergibt.



Dieser Kegelschnitt hat die Gleichung

$$r = \frac{pR}{\pm p + 2R\cos\varphi} \quad \text{(Pol } O\text{)}.$$

Für $p < 2R$ ergeben sich Hyperbeln und für $p > 2R$ Ellipsen, deren einer Brennpunkt in den Ursprung O fällt. Spiegelt man den anderen Brennpunkt am Leitkreis, so erhält man den Punkt P. Scheitelpunkte sind die am Inversionskreis gespiegelten Nullstellen X_1 und X_2. Weiterhin ergibt sich, dass der Radius des zugehörigen Scheitelkrümmungskreises mit dem Radius des erzeugenden Kreises übereinstimmt.

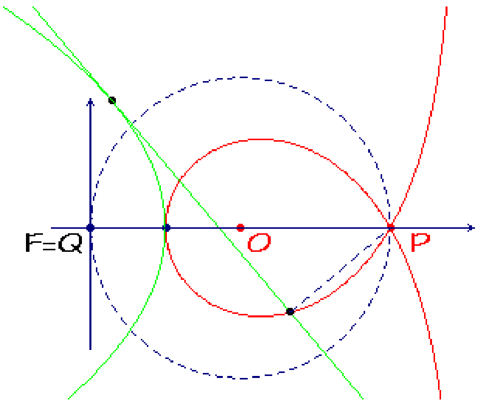


Satz 1. **PRO-Kurven sind das Inverse von Kegelschnitten, wenn man einen Inversionskreis durch einen Brennpunkt wählt und die Mitte in den Spiegelpunkt des Brennpunktes am Leitkreis (an der Leitlinie) legt.**

Erzeugt man nach Satz 1 eine PRO-Kurve, so liegt der Punkt P in der Mitte des Inversionskreises und der Punkt O in dem gewählten Brennpunkt. Der Radius R ist derjenige des Scheitelkrümmungskreises.

Als Fußpunktkurve von Kegelschnitten

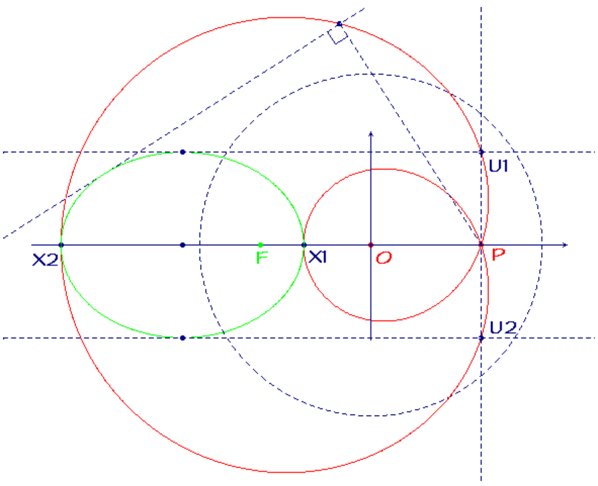
Gesucht ist ein Kegelschnitt derart, dass die Fußpunkte der Lote von P auf die Tangenten des Kegelschnitts die untersuchte PRO-Kurve ergeben.



Von der Trisektrix ist bekannt, dass sie die Fußpunktkurve einer Parabel ist ([1], S.35). Fällt man von dem Spiegelpunkt des Brennpunktes an der Leitlinie die Lote auf die Parabeltangenten, so beschreiben die Fußpunkte eine Trisektrix. Diese Parabel hat für die Trisektrix zu $p = R$ die Polargleichung

$$r = \frac{R}{1+\cos\varphi} \quad \text{(Pol } Q\text{)},$$

wenn Q der Spiegelpunkt von P an O ist.



Für $p \neq R$ muss der gesuchte Kegelschnitt offensichtlich in X_1 und X_2 Scheitelpunkte haben; dann gilt für das Zentrum Z und die Hauptachse a:

$$x_Z = \frac{pR^2}{p^2 - R^2}, \qquad a^2 = \frac{p^4 R^2}{(p^2 - R^2)^2}.$$

Zu $p < R$ ergibt sich für die Nebenachse b aus den Punkten

$$U_{1,2}(p; \pm \frac{p^2}{\sqrt{R^2 - p^2}}): \qquad b^2 = \frac{p^4}{R^2 - p^2} \quad .$$

Dann ist der gesuchte Kegelschnitt eine Ellipse mit dem Brennpunkt im Spiegelpunkt Q von P am Ursprung O mit der Polargleichung

$$r = \frac{p^2}{\pm R + p\cos\varphi} \quad \text{(Pol } Q\text{)}.$$

Die Spiegelung des Brennpunktes am Leitkreis ergibt wieder den Punkt P.
In dieser Form lässt sich die Gleichung des Kegelschnitts auch auf den Fall $p > R$ erweitern.

Zum Nachweis, dass die PRO-Kurve Fußpunktkurve dieses Kegelschnitts ist: Fällt man von $P(p;0)$ Lote auf Geraden mit den Gleichungen $y = mx + n$, so hat der Fußpunkt die Koordinaten

$$(x; y) = (\frac{p - mn}{1 + m^2}; \frac{n + mp}{1 + m^2}).$$

Die Gerade ist eine Tangente an den Kegelschnitt mit der Gleichung

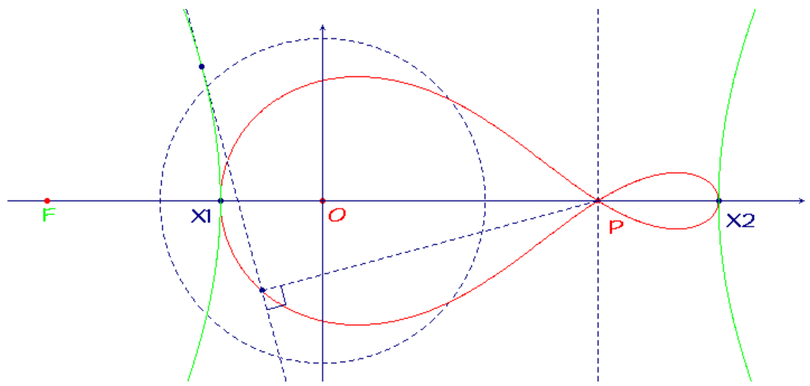
$$\frac{(x - x_Z)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

wenn die Tangentenbedingung

$$b^2 + a^2 m^2 = (n + m x_Z)^2$$

erfüllt ist. Eliminiert man die Koeffizienten m und n unter Berücksichtigung der Größen a, b, x_Z, so erhält man für die Lotfußpunkte die Gleichung der PRO-Kurve.

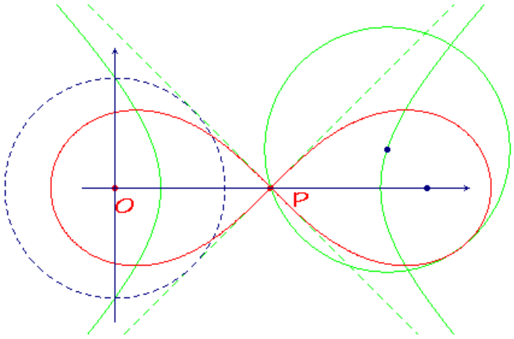
Satz 2. PRO-Kurven sind Fußpunktkurven von Kegelschnitten, wenn der Lotpunkt im Spiegelpunkt eines Brennpunktes am Leitkreis liegt.



Erzeugt man nach Satz 2 eine PRO-Kurve, so ist der Punkt P der Lotpunkt und der Punkt O der Mittelpunkt von P und dem gewählten Brennpunkt F. Der Radius der Scharkreise ist dann

$$R = \frac{p}{\varepsilon} \quad (\varepsilon \text{ numerische Exzentrizität}).$$

Als Hüllkurve einer Kreisschar

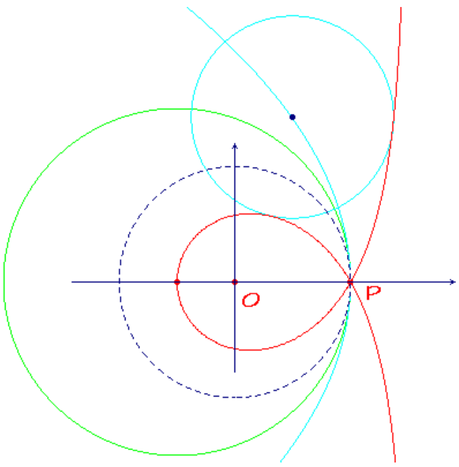


Die Lemniskate ist bekanntlich Hüllkurve einer Schar von Kreisen, deren Mitten auf einer gleichseitigen Hyperbel liegen und die durch deren Zentrum verlaufen ([1], S.81). Für die Lemniskate zu $p = \sqrt{2}R$ hat diese gleichseitige Hyperbel die Gleichung

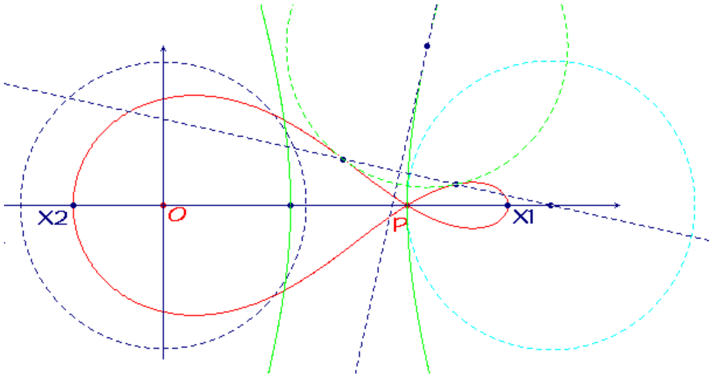
$$r = \frac{R}{\pm 1 + \sqrt{2}\cos\varphi} \quad (\text{Pol } O).$$

Die Trisektrix zu $p = R$ ist Hüllkurve aller Kreise, die den Inversionskreis rechtwinklig schneiden und deren Mitten auf einer Parabel mit dem Brennpunkt O und dem Scheitel P liegen ([1], S.39). Diese Parabel hat die Gleichung

$$r = \frac{2R}{1 + \cos\varphi} \quad (\text{Pol } O).$$



Verallgemeinernd führen folgende Überlegungen weiter: Die Hüllkreise müssen offensichtlich bei der Inversion, gegenüber der die Kurve invariant bleibt, auf sich abgebildet werden. Damit liegen die Berührpunkte invers und die Hüllkreise schneiden den Inversionskreis orthogonal. Die Mittelsenkrechten der Berührpunkte hüllen dann die Ortslinie für die Mitten der Hüllkreise ein.

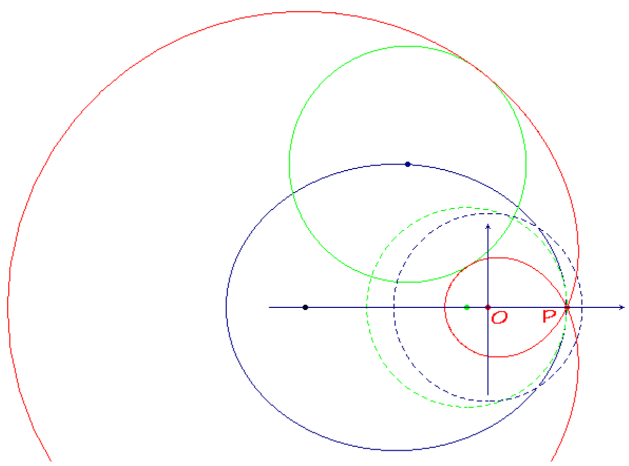


Folgt man diesen Überlegungen analytisch, so erhält man – auch computergestützt aufwändig – als Ortslinie der Hüllkreismitten für $p \neq \sqrt{2}R$ einen Kegelschnitt mit der Polargleichung

$$r = \frac{2pR^2}{\pm(2R^2 - p^2) + p^2\cos\varphi} \qquad \text{(Pol } O\text{)}.$$

Diese Kegelschnitte sind für $p < R$ Ellipsen und für $p > R$ Hyperbeln. Die Scheitel liegen erwartungsgemäß im Punkt P und der Mitte von X_1 und X_2. Der Ursprung O fällt für $p < \sqrt{2}R$ in den zu P benachbarten Brennpunkt, für $p > \sqrt{2}R$ in den entfernteren Brennpunkt (kurz als zugehöriger Brennpunkt angesprochen).

Satz 3. PRO-Kurven sind Hüllkurven von Kreisen, deren Mitten auf einem Kegelschnitt liegen und die einen festen Kreis senkrecht schneiden. Dieser Kreis ist der Thales-Kreis über einem Scheitel und dem vierten harmonischen Punkt zum zugehörigen Brennpunkt, seinem Spiegelpunkt bzgl. des Leitkreises (der Leitlinie) und dem gewählten Scheitel.



Dabei wird der gewählte Scheitel zum Punkt P und der zugehörige Brennpunkt zum Punkt O. Für den Radius der Scharkreise ergibt sich

$$R = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}p} \quad (\text{für } p < \sqrt{2}R), \quad R = \sqrt{\frac{-1+\varepsilon}{2\varepsilon}p} \quad (\text{für } p > \sqrt{2}R).$$

Nachtrag

Abschließend sei auf eine Variante der PRO-Kurve hingewiesen, wenn der Trägerkreis der Mittelpunkte zu einer Geraden entartet: Der Punkt P wird dann an Kreisen vom Radius R gespiegelt, deren Mitten M auf einer Geraden liegen. Ein kartesisches Koordinatensystem sei der Fragestellung neu angepasst:

$$P(0;0), \quad M(m;\mu).$$

Die Spiegelpunkte von P an den Kreisen ergeben sich dann zu

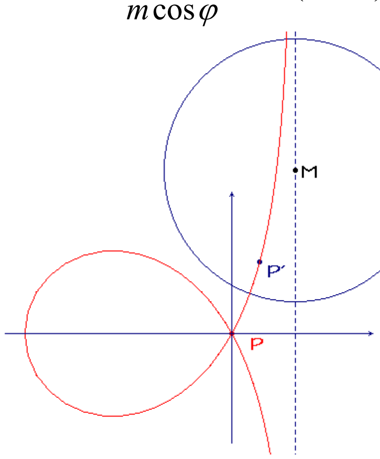
$$P'\left(\frac{m(m^2+\mu^2-R^2)}{m^2+\mu^2};\frac{\mu(m^2+\mu^2-R^2)}{m^2+\mu^2}\right).$$

Eliminiert man den Parameter μ, so erhält man die Gleichung:

$$m(x-m)(x^2+y^2)+R^2x^2=0,$$

bzw. in Polarkoordinaten

$$r = \frac{m^2-R^2\cos^2\varphi}{m\cos\varphi} \quad (\text{Pol } P)$$



Für $m = R$ ergibt sich eine Zissoide mit der Gleichung [1]

$$r = \frac{R\sin^2\varphi}{\cos\varphi};$$

für $m = \frac{R}{\sqrt{2}}$ eine Strophoide mit der Gleichung [1]

$$r = -\frac{R\cos 2\varphi}{\sqrt{2}\cos\varphi}$$

und für $m = \frac{R}{2}$ ist die Kurve eine Trisektrix [1]

$$r = -\frac{R(1+2\cos 2\varphi)}{2\cos\varphi}.$$

Literatur

[1] H. Schmidt: Ausgewählte höhere Kurven. – Kesselringsche Verlagsbuchhandlung Wiesbaden, 1949.

[2] Großes Handbuch der Mathematik. – Buch und Zeit Verlagsges. M. B. H. Köln, 1969.

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de