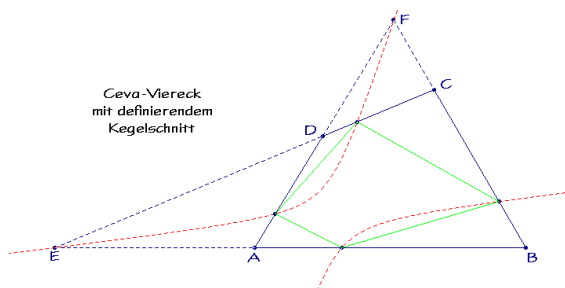


Ceva-Dreiecke und Ceva-Vierecke

Eckart Schmidt

Vor dem Hintergrund des Satzes von Ceva sei unter einem Ceva-Dreieck ein eingeschriebenes Dreieck verstanden, dessen Ecken die Seiten des Bezugs-Dreiecks in Verhältnissen teilen, deren Produkt Eins ist. Eine Verallgemeinerung für Vierecke ist Schwerpunkt dieser Ausarbeitung. Es werden definierende Kegelschnitte aufgezeigt sowie eine Reihe von Beispieltypen behandelt. – Gearbeitet wird in baryzentrischen Koordinaten.



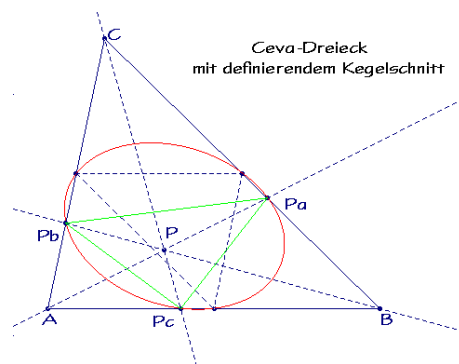
Ceva-Dreiecke

Betrachtet man zu einem Bezugsdreieck ABC die Ecktransversalen eines Punktes $P(p:q:r)$, dann schneiden diese die Seiten AB, BC, CA in den Punkten

$$P_c(p:q:0), \quad P_a(0:q:r), \quad P_b(p:0:r),$$

die die Seiten in den Verhältnissen $\frac{q}{p}, \frac{r}{q}, \frac{p}{r}$ mit Produkt

Eins teilen (Satz des Ceva). Zu jedem Punkt, der nicht auf den Dreiecksseiten liegt, gibt es ein nicht entartetes Ceva-Dreieck. So ist z.B. das Seitenmittenviereck das Ceva-Dreieck des Schwerpunktes.



Zu jedem Ceva-Dreieck gibt es einen Umkegelschnitt durch die Seitenmitten des Bezugsdreiecks mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} + \frac{z^2}{r} - \frac{p+q}{pq}xy - \frac{q+r}{qr}yz - \frac{r+p}{rp}zx = 0 .$$

Umgekehrt erzeugt jeder Seitenmitten-Kegelschnitt, der keine Ecke enthält, mit seinen weiteren Seitenschnitten ein Ceva-Dreieck; hier als definierender Kegelschnitt des Ceva-Dreiecks angesprochen. So liefert z.B. der Neun-Punkte-Kreis das Höhenfußpunkt-dreieck als Ceva-Dreieck.

Satz 1. Für Dreiecke ergeben die zweiten Seitenschnitte eines Seitenmitten-Kegelschnitts, der keine Ecke enthält, ein Ceva-Dreieck.

Es sei angemerkt, dass die Polare von P bzgl. des definierenden Kegelschnitts parallel zur Tripolaren von P bzgl. des Bezugsdreiecks verläuft, letztere im anderthalbfachen Abstand von P .

Das Seitenmittendreieck ist nicht nur Ceva-Dreieck, sondern auch Fußpunkt-dreieck (der Umkreismitte). Punkte, deren Ceva-Dreiecke auch Fußpunkt-dreiecke sind, liegen bekanntlich auf der Lucas-Cubic [1] mit der Gleichung

$$(S_Bx - S_Ay)xy + (S_Cy - S_Bz)yz + (S_Az - S_Cx)zx = 0.$$

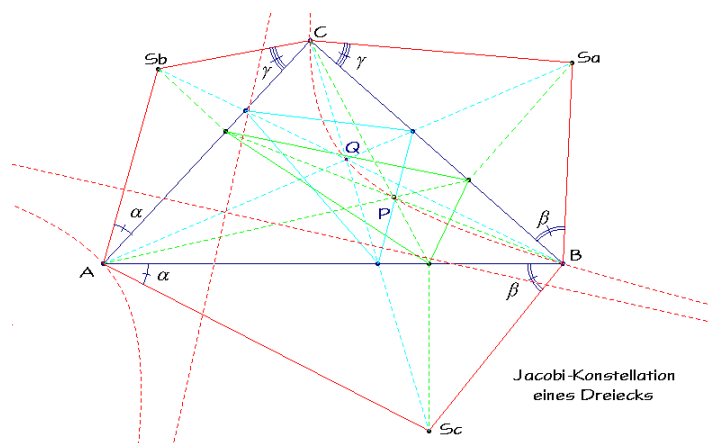
Hier wie in den folgenden Berechnungen werden die Conway-Abkürzungen [2] benutzt:

$$2S_A = -a^2 + b^2 + c^2, \quad 2S_B = a^2 - b^2 + c^2, \quad 2S_C = a^2 + b^2 - c^2.$$

Umgekehrt liegen Punkte, deren Fußpunkt-dreiecke auch Ceva-Dreiecke sind, auf der Darboux-Cubic [3].

Jacobi-Konstellationen

Unter einer Jacobi-Konstellation eines n -Ecks wird eine Figur verstanden, in der über den Seiten des n -Ecks Dreiecke gezeichnet sind, deren Winkel an der jeweiligen Ecke des n -Ecks übereinstimmen.



Der bekannteste Spezialfall ist die Torricelli-Konstellation bei Dreiecken mit gleichseitigen Aufsatzdreiecken. Dabei ist das Spitzendreieck $S_aS_bS_c$ perspektiv zum Bezugsdreieck bzgl. des Fermat-Punktes. Zu den vielseitigen geometrischen

Zusammenhängen in Jacobi-Konstellationen von Dreiecken sei auf die Ausarbeitung [4] verwiesen. Hier nur der Bezug zu Ceva-Dreiecken:

Lotet man von den Spitzen S_a, S_b, S_c auf die Seiten des Bezugsdreiecks, so erhält man die Lotfußpunkte P_a, P_b, P_c , die die Seiten in den Verhältnissen

$$t_a = \frac{\cot a}{\cot b}, \quad t_b = \frac{\cot b}{\cot g}, \quad t_g = \frac{\cot g}{\cot a}$$

teilen, wobei a, b, g die Basiswinkel der Aufsatzdreiecke sind (s. Abb.).

Verbindet man die Spitzen S_a, S_b, S_c mit den Gegenecken A, B, C , so schneiden diese Verbindungsgeraden die Seiten in den Punkten Q_a, Q_b, Q_c . Bezeichnet man die Innenwinkel des Bezugsdreiecks nach ihren Scheitelpunkten, dann errechnen sich die Seitenteilverhältnisse zu

$$s_a = \frac{\cot b + \cot B}{\cot g + \cot C}, \quad s_b = \frac{\cot g + \cot C}{\cot a + \cot A}, \quad s_c = \frac{\cot a + \cot A}{\cot b + \cot B}.$$

Satz 2. Eine Jacobi-Konstellation eines Dreiecks enthält zwei Ceva-Dreiecke: Das P -Ceva-Dreieck in den Fußpunkten der Lote von den Spitzen auf die Seiten und das Q -Ceva-Dreieck in den Seitenschnitten der Ecktransversalen der Spitzen.

Ergänzt sei, dass die Perspektivzentren P und Q der beiden Ceva-Dreiecke auf einer gleichseitigen Umhyperbel des Bezugsdreiecks liegen.

Es zeichnet sich ab, dass Satz 2 auf Jacobi-Konstellationen von n -Ecken zu verallgemeinern ist. Dazu gilt es nur die „Ecktransversalen der Spitzen“ zu ersetzen durch die Verbindungsgeraden der Spitzen mit den Schnittpunkten der angrenzenden Seiten des n -Ecks. So ist z.B. für Vierecke die Spitze S_a des Aufsatzdreiecks über der Seite AB zu verbinden mit dem Schnitt der Seitengeraden DA und BC .

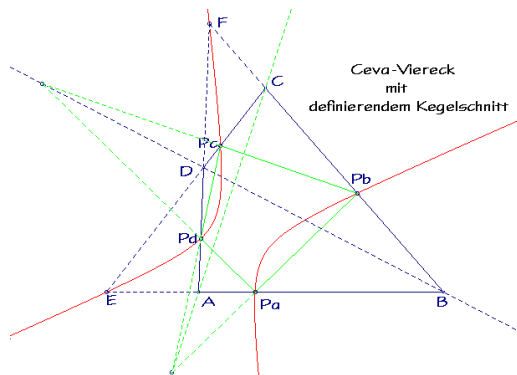
Ceva-Vierecke

Betrachtet wird jetzt ein Bezugsviereck $ABCD$ in baryzentrischen Koordinaten des Teildreiecks ABC mit dem vierten Punkt $D(u:v:w)$. Zur einfacheren Darstellung der Ergebnisse sei eine Normierung $u + v + w = 1$ eingearbeitet.

Ein Ceva-Viereck des Bezugsvierecks ist ein eingeschriebenes Viereck mit den Ecken P_a, P_b, P_c, P_d , die die Seiten AB, BC, CD, DA in den Verhältnissen t_a, t_b, t_c, t_d mit $t_a t_b t_c t_d = 1$ teilen. Dann errechnen sich die Ecken des Ceva-Vierecks zu

$$P_a(1:t_a:0), \quad P_b(0:1:t_b), \quad P_c(u:v:w+\frac{1}{t_c}), \quad P_d(u+t_d:v:w).$$

Die Gegenseiten des Ceva-Vierecks schneiden sich auf den Diagonalen des Bezugsvierecks, Hintergrund ist der Satz des Menelaos.



Betrachtet man die Gegenseitenschnitte

$$E(u:v:0) \text{ und } F(0:v:w)$$

des Bezugsvierecks, so können sie in doppelter Belegung als entartetes Ceva-Viereck $EFEF$ aufgefasst werden, denn sie teilen die Seiten in den Verhältnissen

$$\frac{v}{u}, \frac{1}{w}, \frac{w}{v}, \frac{u}{1}.$$

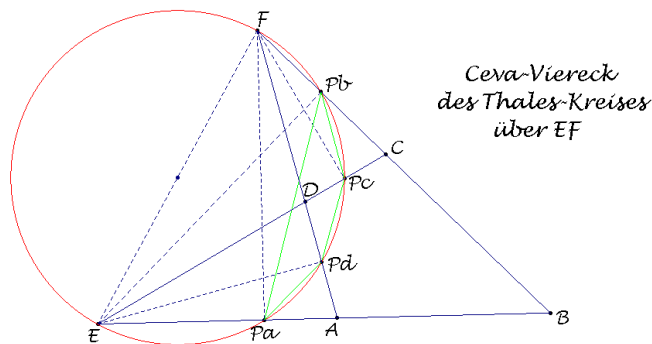
Zu jedem Ceva-Viereck gibt es einen Umkegelschnitt durch die Gegenseitenschnitte E und F .

Satz 3. Die Ecken eines Ceva-Vierecks liegen mit den Gegenseitenschnitten des Bezugsvierecks auf einem Kegelschnitt.

Zur Begründung: Der Kegelschnitt durch die Punkte E, F, P_a, P_b, P_c mit der Gleichung

$$t_b t_c w(t_a u + v)xy + t_c u(t_b v + w)yz + v(1 - t_b t_c v)zx - t_c(t_a t_b vwx^2 + t_b wuy^2 + uvz^2) = 0$$

enthält unter der Bedingung $t_a t_b t_c t_d = 1$ auch den Punkt P_d .



Dieser EF -Kegelschnitt sei auch als definierender Kegelschnitt eines Ceva-Vierecks angesprochen. So definiert z.B. der Mittenkegelschnitt des Bezugsvierecks, auf dem die Zentren aller Umkegelschnitte liegen, das Seitenmittenparallelogramm

(Varignon-Parallelogramm) als Ceva-Viereck. Oder: Der Thales-Kreis über EF definiert ein spezielles Ceva-Viereck in den Fußpunkten der Lote von E und F auf die Seiten.

Geraden-Ceva-Vierecke

Betrachtet man z.B. einen entarteten EF -Kegelschnitt, bestehend aus der Geraden EF und einer weiteren Geraden, so erzeugt diese zweite Gerade in ihren Schnitten mit den Seitengeraden des Bezugsvierecks ein kollinear entartetes Ceva-Viereck. Hat die Gerade die Gleichung

$$kx + ly + mz = 0,$$

dann werden die Seiten in den folgenden Verhältnissen geteilt:

$$-\frac{k}{l}, \quad -\frac{l}{m}, \quad -\frac{m}{ku + lv + mw}, \quad -\frac{ku + lv + mw}{k}.$$

Satz 4. Jede Gerade, die nicht parallel zu einer Viereckseite oder durch einen Seitenschnitt verläuft, erzeugt mit ihren Seitenschnitten ein kollinear entartetes Ceva-Viereck.

Ein Beispiel: Zu den Geraden-Ceva-Vierecken gehört das Fußpunkt-Viereck des Miquel-Punktes. Der Miquel-Punkt ist der gemeinsame Punkt der Umkreise der Teildreiseite ABF , BCE , CDF , DAE des Vierseits zu $ABCD$:

$$M\left(\frac{S_B + S_C}{1-u} : \frac{S_B v - S_A u}{1-w} + \frac{S_B v - S_C w}{1-u} : \frac{S_A + S_B}{1-w}\right).$$

Die Fußpunkte der Lote vom Miquel-Punkt auf die Seiten des Bezugsvierecks liegen bekanntlich auf einer Geraden [5]; diese Gerade teilt gegenüberliegende Seiten in reziproken Verhältnissen:

$$t_a = \frac{1}{t_c} = \frac{S_A(1-u)^2 + S_B v(1+v) - S_C w(1-w)}{S_B(1+v) + S_C(1-w)},$$

$$t_b = \frac{1}{t_d} = \frac{S_A(1-u) + S_B(1+v)}{-S_A u(1-u) + S_B v(1+v) + S_C(1-w)^2}.$$

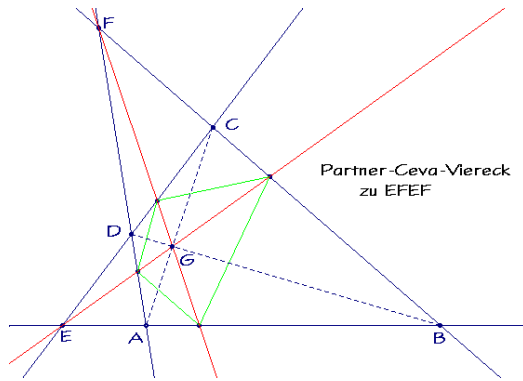
Partner-Ceva-Vierecke

Zu jedem Ceva-Viereck lässt sich, sofern nicht ein Teilverhältnis Eins ist, ein weiteres Ceva-Viereck betrachten, das durch die vierten harmonischen Punkte auf den Seiten bestimmt wird. Da sich bei den Teilverhältnissen nur das Vorzeichen ändert, bleibt das Produkt Eins erhalten.

Für die doppelt belegten Gegenseitenschnitte E und F erhält man auf diese Weise das Ceva-Viereck mit den Ecken

$$(u : -v : 0), \quad (0 : v : -w), \quad (u : v : 2w), \quad (2u : v : w).$$

Dabei entartet der definierende Kegelschnitt zu zwei Geraden, die sich im Diagonalschnitt schneiden.



Es liegt nahe, die Partner-Ceva-Vierecke zu kollinear entarteten Ceva-Vierecken zu betrachten. Allgemein ergibt sich zu einem Geraden-Ceva-Viereck in der obigen Beschreibung ein Partner-Ceva-Viereck mit den Punkten

$$P_a'(1:k:0), \quad P_b'(0:m:l), \\ P_c'(u:v:\frac{ku+lv+2mw}{m}), \quad P_d'(\frac{2ku+lv+mw}{k}:v:w).$$

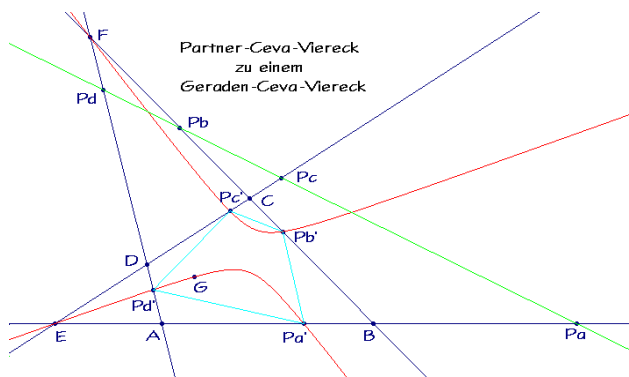
Die Gegenseitenschnitte dieses Partner-Ceva-Vierecks liegen in den Schnitten der Diagonalen des Bezugsvierecks mit der vorgegebenen Geraden.

Der definierende Kegelschnitt mit der Gleichung

$$kvwx^2 + l wuy^2 + muvz^2$$

$$-w(ku+lv)xy - v(mw+ku)zx - u(lv+mw)yz = 0$$

enthält den Diagonalschnitt $G(u:0:v)$ des Bezugsvierecks und ist somit Umkegelschnitt des Diagonaldreiecks EFG .



Satz 5. Der definierende Kegelschnitt des Partner-Ceva-Vierecks eines Geraden-Ceva-Vierecks ist ein Umkegelschnitt des Diagonaldreiecks.

Ein Beispiel: Eine vierecksrelevante Gerade ist die Newton-Gerade, die Verbindungsgerade der Diagonalenmitten, mit der Gleichung

$$(1+v)(x-z) - (u-v)y = 0.$$

Sie ist senkrecht zur Fußpunkt-Geraden des Miquel-Punktes und schneidet die Seiten in den Punkten

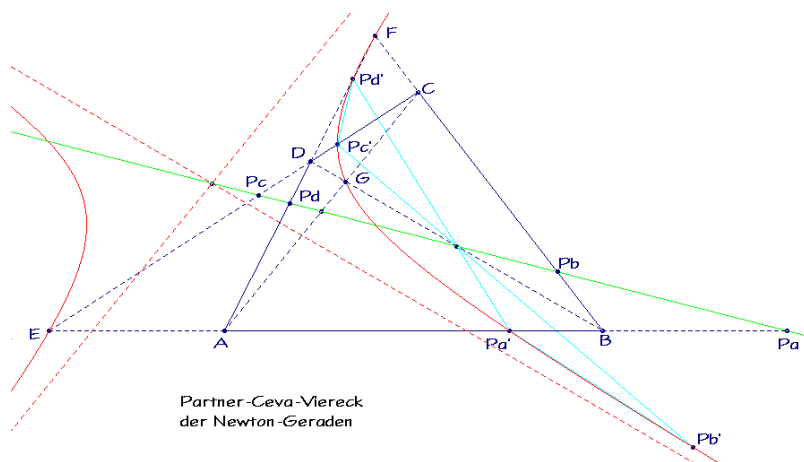
$$P_a\left(\frac{u-w}{1+v}:1:0\right), \quad P_b\left(0:1:\frac{w-u}{1+v}\right),$$

$$P_c\left(u:v:\frac{(w+u)(u+v)}{1+v}\right), \quad P_d\left(\frac{(v+w)(w+u)}{1+v}:v:w\right).$$

Diese Punkte teilen Gegenseiten in reziproken Verhältnissen und diese Eigenschaft überträgt sich auch auf das zugehörige Partner-Ceva-Viereck mit den Ecken

$$P_a'\left(\frac{w-u}{1+v}:1:0\right), \quad P_b'\left(0:1:\frac{u-w}{1+v}\right),$$

$$P_c'\left(u:v:w+\frac{w-u}{1+v}\right), \quad P_d'\left(u+\frac{u-w}{1+v}:v:w\right).$$



Die Gegenseitenschnitte dieses Partner-Ceva-Vierecks sind die Diagonalenmitten des Bezugsvierecks. Der definierende Kegelschnitt ist Umkegelschnitt des Diagonaldreiecks EFG mit Zentrum in der Mitte von EF ; die Asymptoten verlaufen parallel zu den Diagonalen des Bezugsvierecks.

EFP-Ceva-Vierecke

Zu einem Punkt, der kein Seitenschnitt ist, lässt sich sehr einfach ein Ceva-Viereck konstruieren: Verbindet man den Punkt mit den Gegenseitenschnitten E und F des Bezugsvierecks, so ergibt sich ein entarteter definierender Kegelschnitt, bestehend aus zwei sich schneidenden Geraden. Gibt man dem Punkt die Koordinaten $P(p:q:r)$, so erhält man das EFP-Ceva-Viereck in den Punkten

$$P_a(pw:-rv+qw:0), \quad P_b(0:qu-pv:ru),$$

$$P_c(puv:pv^2:ruv-pvw+qwu),$$

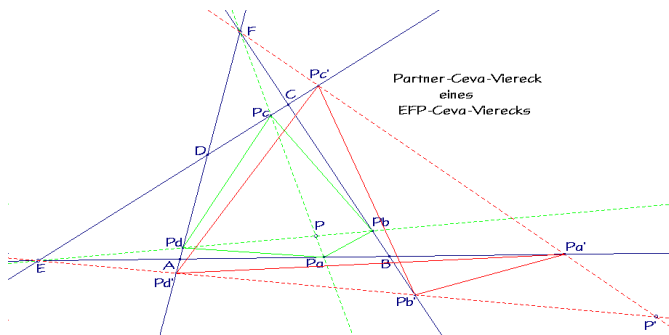
$$P_d(ruv+pvw-qwu:rv^2:rvw).$$

Diese Punkte teilen die Seiten in den Verhältnissen

$$\frac{qw-rv}{pw}, \quad \frac{ru}{qu-pv}, \quad \frac{pv}{u(rv-qw)}, \quad \frac{w(pv-qu)}{rv}.$$

Dabei fällt auf, dass das Produkt der Teilverhältnisse von Gegenseiten unabhängig von der Wahl des Punktes P ist. Ein Beispiel ist das Partner-Ceva-Viereck von $EFEF$.

Satz 6. Das Partner-Ceva-Viereck eines *EFP-Ceva-Vierecks* ist wieder ein *EFP-Ceva-Viereck* mit gleichen Gegenseitenschnitten.



Die Ecken des Partner-Ceva-Vierecks errechnen sich zu

$$P_a'(pw : rv - qw : 0), \quad P_b'(0 : pv - qu : ru),$$

$$P_c'(puv : pv^2 : -ruv + pvw + qwu),$$

$$P_d'(ruv - pvw + qwu : rv^2 : rvw).$$

Dabei erweisen sich die Punktetripel P_a', P_c', F und P_b', P_d', E als kollinear und die Trägergeraden schneiden sich in dem Punkt

$$P'(p(ruv - pvw + qwu) : q(ruv + pvw - qwu) : r(-ruv + pvw + qwu)).$$

Partner-*EFP-Ceva-Vierecke* haben die gleichen Gegenseitenschnitte

$$E'(pw(qu - pv) : 0 : ru(rv - qw)),$$

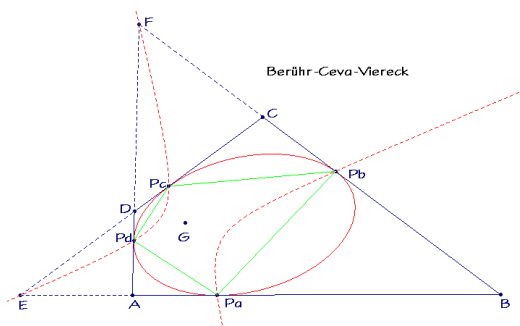
$$F'(pruv : -qruv - pqvw + q^2wu + 2prv^2 : prvw).$$

Die Abbildung, die jedem Punkt P den Punkt P' zuordnet:

$$(x : y : z) \rightarrow ((-vwx + wuy + uvz)x : (vwx - wuy + uvz)y : (vwx + wuy - uvz)z)$$

ist die Konjugation (isoconjugation) des Diagonaldreiecks EFG mit den Fixpunkten A, B, C, D . Sie bildet die definierenden Kegelschnitte von Partner-Ceva-Vierecken aufeinander ab.

Berühr-Ceva-Vierecke



Betrachtet man Berührkegelschnitte des Bezugsvierecks, so liegen die Zentren bekanntlich auf der Newton-Geraden [5], der Verbindungsgeraden der Diagonalenmitten. Das Viereck der Berührungspunkte hat den gleichen Diagonalenschnitt G wie das

Bezugsviereck, denn die Figur lässt sich durch eine affine Abbildung in ein Sehnen-Tangenten-Viereck überführen, wo der angesprochene Zusammenhang bekannt ist.

Ist P_a der Berührungspunkt des eingeschriebenen Kegelschnitts auf der Seite AB , so liefert die Gerade P_aG im Schnitt mit der Seite CD den Berührungspunkt P_c . P_a und P_c sind Punkte des Berühr-Ceva-Dreiecks des betrachteten Kegelschnitts im Dreieck EBC mit dem dritten Punkt P_b . Die Verbindungsgerade P_bG ergibt im Schnitt mit der Seite DA den vierten Berührungspunkt P_d .

Folgt man dieser Überlegung analytisch, so ergibt sich z.B. folgende Parameterdarstellung der Berührungspunkte:

$$P_a(1:t_a:0), \quad P_b(0:t_a u:w),$$

$$P_c(u:v:(1-\frac{v}{t_a u})w), \quad P_d(u-\frac{v}{t_a}:v:w).$$

Parameter ist das Teilverhältnis t_a der Seite AB . Diese Berührungspunkte teilen die Seiten in den Verhältnissen

$$t_a, \quad \frac{w}{t_a u}, \quad -\frac{t_a u}{vw}, \quad -\frac{v}{t_a}$$

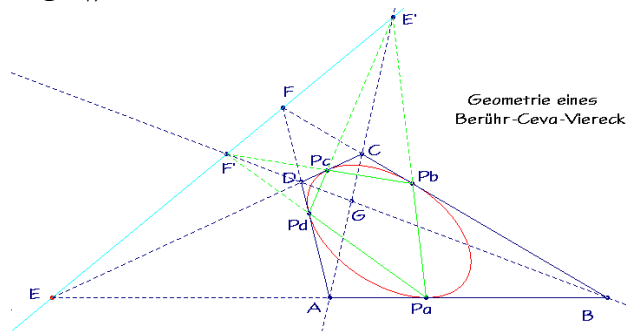
mit Produkt Eins.

Die Gegenseiten des Berühr-Ceva-Vierecks schneiden sich auf den Diagonalen des Bezugsvierecks in den Punkten

$$E'(u:0:-w) \quad \text{und} \quad F'(u:2v:w).$$

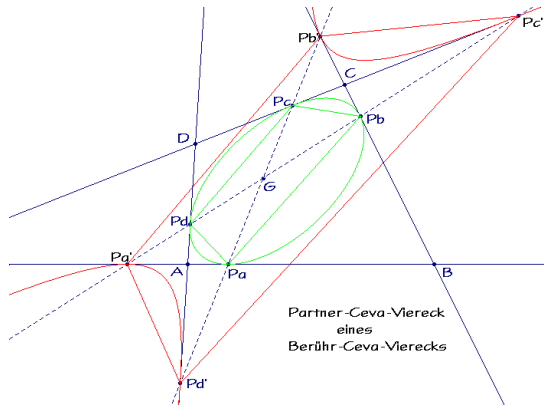
Diese Gegenseitenschnitte sind die vierten harmonischen Punkte des Diagonalschnitts G auf den Diagonalen des Bezugsvierecks und teilen die Strecke EF harmonisch im

$$\text{Verhältnis } \frac{1-u}{1-w}.$$



Satz 7. Die Berührungspunkte eingeschriebener Kegelschnitte eines Vierecks ergeben ein Ceva-Viereck, dessen Gegenseitenschnitte mit den Gegenseitenschnitten des Bezugsvierecks kollinear und harmonisch liegen.

Aus den obigen Teilverhältnissen ist ersichtlich, dass auch das Partner-Ceva-Viereck eines Berühr-Ceva-Vierecks wieder ein Berühr-Ceva-Viereck ist. Man überprüft leicht, dass beide Ceva-Vierecke gleiche, wenn auch vertauschte Diagonalen haben, die sich im Diagonalschnitt des Bezugsvierecks schneiden.



Satz 8. Das Partner-Ceva-Viereck eines Berühr-Ceva-Vierecks ist wieder ein Berühr-Ceva-Viereck; beide Ceva-Vierecke haben gemeinsame Diagonalen und Gegenseiten-schnitte.

Beispiel: Ein Spezialfall für einen eingeschriebenen Kegelschnitt ist die Berührparabel des Vierecks mit der Gleichung

$$(wx + y + uz)^2 - 4(v + uw)zx = 0$$

und den Berührungspunkten

$$P_a(1 : -w : 0), \quad P_b(0 : -u : 1)$$

$$P_c(u^2 : uv : v + uw), \quad P_d(v + uw : vw : w^2),$$

die die Seiten in folgenden Verhältnissen teilen:

$$-\frac{w}{1}, \quad -\frac{1}{u}, \quad \frac{u}{v}, \quad \frac{v}{w}.$$

Das Partner-Ceva-Viereck erhält dann die Ecken

$$P'_a(1 : w : 0), \quad P'_b(0 : u : 1),$$

$$P'_c(u^2 : uv : uw - v), \quad P'_d(uw - v : vw : w^2)$$

und ist das Berühr-Ceva-Viereck eines eingeschriebenen Kegelschnitts mit der Gleichung

$$(wx - y + uz)^2 + 4(v - uw)zx = 0$$

und Zentrum im Schwerpunkt des Vierecks

$$S(1 + u : 1 + v : 1 + w).$$

Beide Berühr-Ceva-Vierecke haben gemeinsame, wenn auch vertauschte Diagonalen

$$P_a P_c = P'_b P'_d : \quad wx + y - uz = 0,$$

$$P_b P_d = P'_a P'_c : \quad -wx + y + uz = 0,$$

die sich im Diagonalschnitt G des Bezugsvierecks schneiden.

Die Berührparabel eines Vierecks hat noch unter einem anderen Aspekt Bezug zu Ceva-Vierecken.

Satz 9. Tangenten der Berührparabel teilen Gegenseiten des Vierecks in reziproken Verhältnissen.

Wie schon angesprochen teilt eine Gerade mit der Gleichung $kx + ly + mz = 0$ die Gegenseiten eines Vierecks in Verhältnissen mit dem Produkt

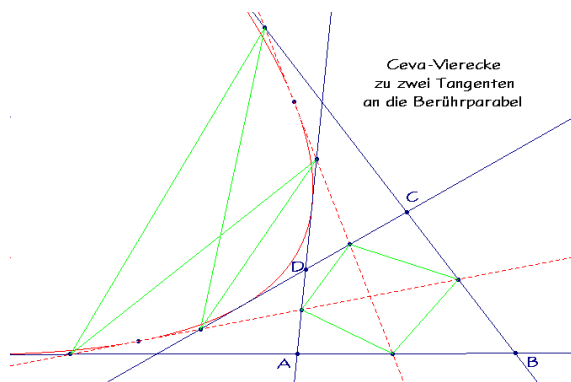
$$\frac{km}{l(ku + lv + mw)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{l(ku + lv + mw)}{km}.$$

Mit der Tangentenbedingung

$$k(l - m)u + (l^2 - km)v + m(l - k)w = 0$$

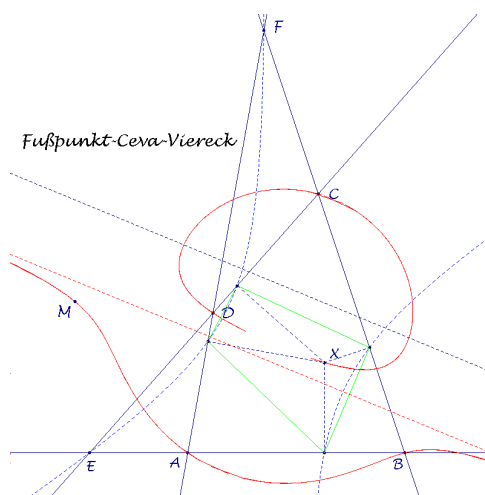
für die Berührparabel ergeben obige Teilverhältnisprodukte Eins. – Umgekehrt ist eine Gerade, die Gegenseiten des Vierecks in reziproken Verhältnissen teilt, eine Tangente an die Berührparabel.

Damit erhält man zu zwei Tangenten an die Berührparabel des Vierecks zwei spezielle Ceva-Vierecke, deren Ecken Gegenseiten in reziproken Verhältnissen teilen.



In diesem Zusammenhang sei an den Miquel-Punkt des Vierecks erinnert, der Brennpunkt der Berührparabel ist. Sein kollinear entartetes Fußpunkt-Viereck ist ein Geraden-Ceva-Viereck auf der Scheiteltangente, die Gegenseiten des Vierecks in reziproken Verhältnissen teilt.

Ausblick



Bei Dreiecken wurde die Frage beantwortet, welche Fußpunkt-Dreiecke Ceva-Dreiecke sind. Stellt man diese Frage entsprechend für Vierecke, so sei angemerkt, dass die Punkte,

deren Fußpunkt-Vierecke auch Ceva-Vierecke sind, auf einer Zirkularkurve mit speziellem Bezugsdreieck liegen. Diese Kurve enthält z.B. den Miquel-Punkt und die Asymptote ist parallel zur Mittelsenkrechten der Gegenseitenschnitte. Für ein Sehnenviereck entartet diese Zirkularkurve in den Umkreis und eine Durchmesser-Gerade durch den Miquel-Punkt.

Literatur

- [1] Eric W. Weisstein. „Lucas Cubic.“ From MathWorld – A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/LucasCubic.html>
- [2] Floor van Lamoen and Paul Yiu: The Kiepert Pencil of Kiepert Hyperbolas. – Forum Geometricorum, Volume 1 (2001) 125-132.
- [3] Eric W. Weisstein. „Darboux Cubic.“ From MathWorld – A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/DarbouxCubic.html>
- [4] E. Schmidt: Jacobi-Konstellationen. –
<http://eckartschmidt.de>
- [5] Jean-Pierre Ehrmann: Steiner's Theorems on the Complete Quadrilateral. – Forum Geometricorum, Volume 4 (2004) 35 – 52.

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf
<http://eckartschmidt.de>
eckart_schmidt@t-online.de