EULER-GERADE EINES VIERECKS

Eckart Schmidt

1 Vorbemerkung

Zu einem Viereck *ABCD* lassen sich die Teildreiecke *ABC*, *BCD, CDA* und *DAB* betrachten. Wählt man – erstens - einen merkwürdigen Dreieckspunkt, z.B. den Höhenschnittpunkt, so ergeben die Höhenschnittpunkte der vier Teildreiecke ein neues Viereck, das H-Viereck. Entsprechend liefern die vier Schwerpunkte der Teildreiecke das S-Viereck, die Umkreismitten das M-Viereck und die Feuerbachkreismitten das F-Viereck des Ausgangsvierecks. Da sich – zweitens – in einem Viereck die Feuerbachkreise der vier Teildreiecke in einem Punkt schneiden, läßt sich dem Viereck dieser sogenannte Feuerbachpunkt zuordnen und die gegenseitige Lage der Feuerbachpunkte obiger Bildvierecke eines vorgegebenen Vierecks untersuchen. Auf diese Weise lassen sich merkwürdige Punkte eines Vierecks definieren, deren gegenseitige Lage Analogien zur Euler-Geraden des Dreiecks aufweist.

Die wichtigsten Ergebnisse seien in der folgenden Abbildung vorweggenommen.

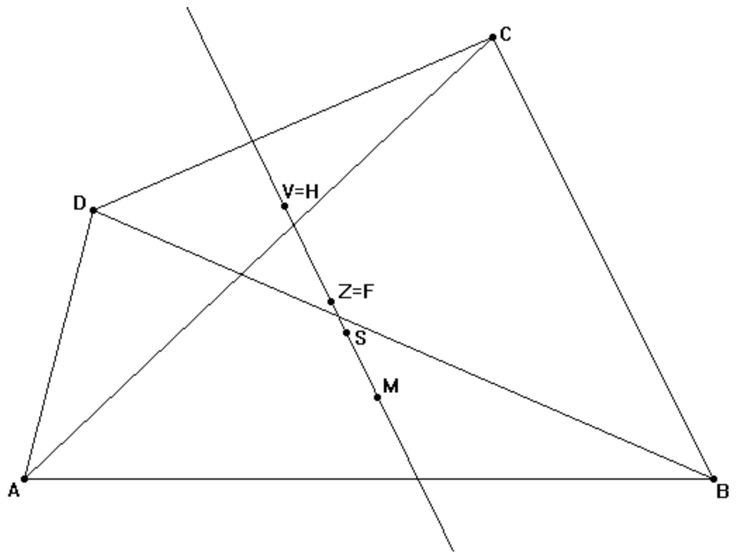

Abb.1. Euler-Gerade eines Vierecks

Zur Bezeichnung der Punkte:

V	Feuerbachpunkt des Ausgangsvierecks
H	... des Höhenschnittpunktsvierecks
S	... des Schwerpunktsvierecks
M	... des Umkreismittenvierecks
F	... des Feuerbachkreismittenvierecks
Z	Schwerpunkt des Ausgangsvierecks.

Betrachtet man statt der Feuerbachpunkte die Schwerpunkte der H-, S-, M-, F-Vierecke, so ergeben sich entsprechende Zusammenhänge.

Anlaß zu dieser geometrischen Entdeckungsreise war eine Anmerkung von P.Baptist [1] über vollständige Vierseite, in der ähnliche Fragestellungen für ein Quadrupel von Geraden umrissen werden. Da die elementargeometrischen Beweise sehr umfangreich ausfallen, wird hier eine analytische Begründung gegeben.

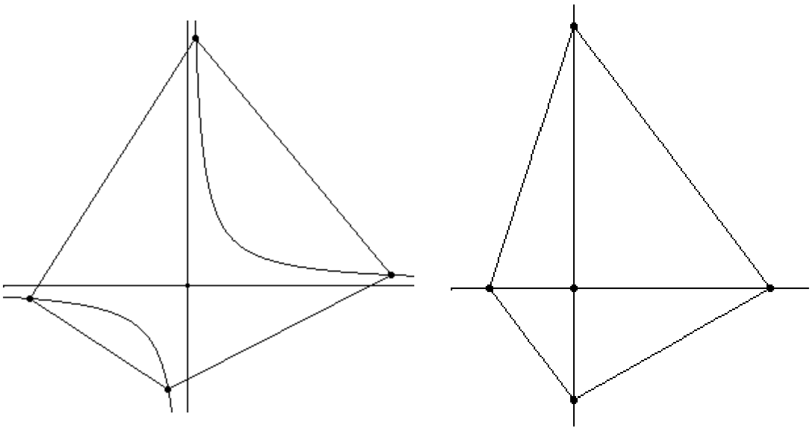

Abb.2. Gleichseitige Hyperbel eines Vierecks

Eine analytische Behandlung ist entscheidend von der Wahl des Koordinatensystems abhängig. Hier wird ein Vorschlag von R.Stärk [5] [6] aufgegriffen: Durch vier Punkte in allgemeiner Lage (keine drei Punkte kollinear) läßt sich eine gleichseitige Hyperbel legen. Diese Hyperbel entartet zu einem orthogonalen Geradenpaar, wenn das Viereck genau ein orthogonales Gegenseitenpaar hat. Diagonalen werden auch als Seiten angesprochen. Sind zwei und damit alle drei Gegenseitenpaare orthogonal, so ist die gleichseitige Hyperbel nicht eindeutig bestimmt. Insbesondere dieser letzte Fall eines orthozentrischen Vierecks ist für eine Euler-Gerade des Vierecks auszuschließen, da der Feuerbachpunkt nicht eindeutig bestimmt ist, wie in 2 gezeigt wird.

Hat ein nichtausgeartetes Viereck kein orthogonales Gegenseitenpaar, so kann man bei geeigneter Längeneinheit die Gleichung $x \cdot y = 1$ für eine Koordinatenwahl benutzen:

$$A(a;\frac{1}{a}),\ B(b;\frac{1}{b}),\ C(c;\frac{1}{c}),\ D(d;\frac{1}{d})$$

(a,b,c,d $\neq$ 0 und paarweise verschieden).

Hat das Viereck genau ein orthogonales Gegenseitenpaar, so ist folgende koordinatenmäßige Erfassung möglich:

$$A(a;0),\ B(0;\frac{1}{b}),\ C(c;0),\ D(0;\frac{1}{d})$$

(a,b,c,d $\neq$ 0 mit a $\neq$ c und b $\neq$ d).

Der Fall eines orthozentrischen Vierecks kann durch die Bedingung abcd $\neq$ -1 ausgeschlossen werden, wie in 3 gezeigt wird.
Der Vorteil dieser Koordinatenwahl liegt nicht nur in der Übersichtlichkeit, sondern auch in der Angepaßtheit an die geometrische Fragestellung.

2 Der Feuerbachpunkt eines Vierecks

Der Feuerbachkreis eines Dreiecks wird in seiner Inzidenzvielfalt oft als einer der faszinierendsten elementargeometrischen Zusammenhänge erlebt. Als Neunpunktekreis enthält er die Seitenmitten, Höhenfußpunkte und Mitten der oberen Höhenabschnitte eines Dreiecks [1] [2] [3].

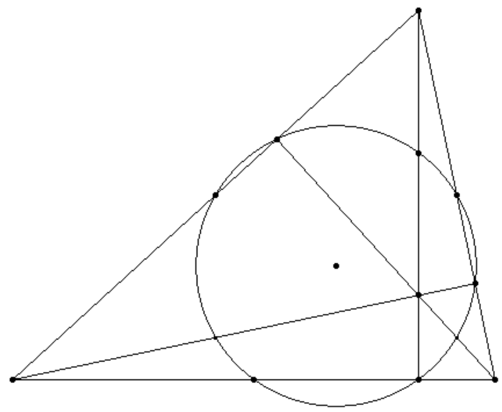

Abb.3. Feuerbach- oder Neunpunktekreis eines Dreiecks

In einem nichtausgearteten Viereck *ABCD* lassen sich zu den Teildreiecken *ABC, BCD, CDA* und *DAB* insgesamt vier Feuerbachkreise zeichnen.
Betrachtet man vorweg ein orthozentrisches Viereck, so sind die Gegenseiten zueinander orthogonal, und jeder Eckpunkt des Vierecks ist der Höhenschnittpunkt des Dreiecks aus den drei anderen Eckpunkten – Coxeter spricht von Höhenschnittpunktsvierecken [4]. Damit ist das H-Viereck aus den Höhenschnittpunkten der Teildreiecke mit dem Ausgangsviereck identisch, und die oberen Höhenabschnittsmitten der Teildreiecke sind die Seitenmitten des Ausgangsvierecks. Alle Feuerbachkreise der Teildreiecke fallen daher zusammen, und der gemeinsame Mittelpunkt F ist der Schwerpunkt des Ausgangsvierecks. Die Euler-Geraden der Teildreiecke stimmen im Punkt F überein und gehen durch die Eckpunkte des Ausgangsvierecks. Folglich ist das M-Viereck das am Punkt F gespiegelte Ausgangsviereck, das S-Viereck erhält man durch eine zentrische Streckung von F mit dem

Faktor $-\frac{1}{3}$ aus dem Ausgangsviereck, und das F-Viereck ist trivial.

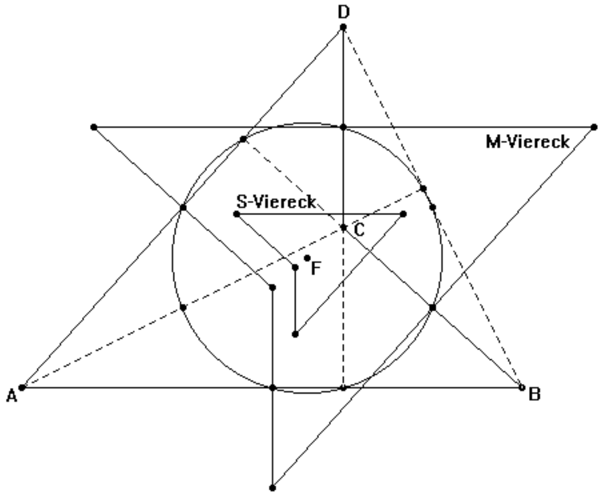

Abb.4. Orthozentrisches Viereck

Dieser Fall eines orthozentrischen Vierecks ist daher für die folgenden Überlegungen zum Feuerbachpunkt eines Vierecks auszuschließen, da die Feuerbachkreise der Teildreiecke zusammenfallen und ein eindeutig bestimmter Schnittpunkt nicht existiert.

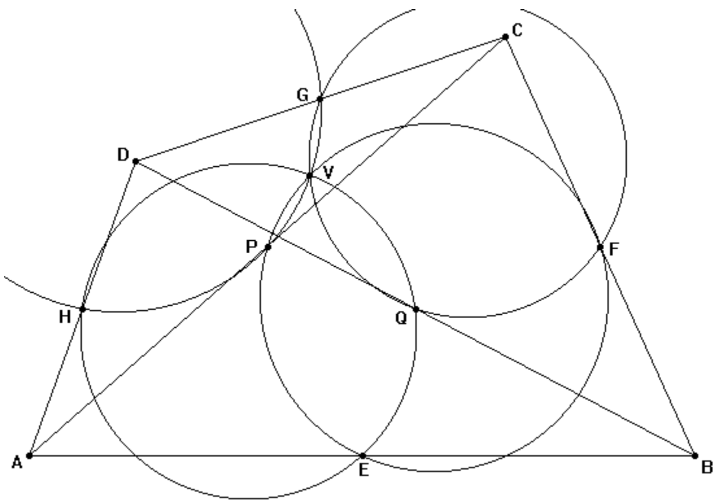

Abb.5. Feuerbachpunkt eines Vierecks

Satz vom Feuerbachpunkt eines Vierecks

In einem nichtausgearteten, nichtorthozentrischen Viereck *ABCD* schneiden sich die Feuerbachkreise der Teildreiecke *ABC, BCD, CDA* und *DAB* in einem Punkt, dem Feuerbachpunkt V des Vierecks.

Beweis:
ABCD sei ein Viereck ohne orthogonales Gegenseitenpaar, dargestellt in dem eingangs angegebenen Koordinatensystem.

Der Feuerbachkreis des Teildreiecks ABC ist der Umkreis des Seitenmittendreiecks

$$(\frac{a+b}{2};\frac{a+b}{2ab}),\ (\frac{b+c}{2};\frac{b+c}{2bc}),\ (\frac{c+a}{2};\frac{c+a}{2ca}).$$

Der Mittelpunkt F_D dieses Feuerbachkreises bestimmt sich als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten z.B. mit den Gleichungen

$$y = abx - \frac{(a+b+2c)ab}{4} + \frac{2ab+ac+bc}{4abc}$$

und $$y = acx - \frac{(a+c+2b)ac}{4} + \frac{2ac+ab+bc}{4abc}$$

zu $$F_D(\frac{abc(a+b+c)-1}{4abc};\frac{ab+bc+ca-a^2b^2c^2}{4abc}).$$

Die zweite Koordinate ergibt sich jeweils als entsprechender Term in den Kehrwerten von a, b, c, d.

Der Radius dieses Feuerbachkreises

$$\frac{\sqrt{(1+a^2b^2)(1+b^2c^2)(1+c^2a^2)}}{4|abc|}$$

ist gleichzeitig der Abstand seines Mittelpunktes F_D vom Ursprung des Koordinatensystems. Damit gehen alle Feuerbachkreise der Teildreiecke *ABC, BCD, CDA, DAC* durch den Ursprung des Koordinatensystems.

Betrachtet man den Sonderfall eines Vierecks mit genau einem orthogonalen Gegenseitenpaar, so haben alle Teildreiecke im Koordinatenursprung einen gemeinsamen Höhenfußpunkt, der auf allen vier Feuerbachkreisen liegt. Die zugehörigen Mittelpunkte sind:

$$F_A(\frac{bc^2d-1}{4bcd};\frac{b+d}{4bd}),\ F_B(\frac{a+c}{4};\frac{1-cd^2a}{4d}),$$
$$F_C(\frac{da^2b-1}{4dab};\frac{b+d}{4bd}),\ F_D(\frac{a+c}{4};\frac{1-ab^2c}{4b})$$

Die Bedingung abcd $\neq$ -1 für nichtorthozentrische Vierecke (vgl. 3) weist in beiden Fällen die Mittelpunkte als paarweise verschiedene Punkte aus, so daß keine zwei Feuerbachkreise übereinstimmen. Damit existiert ein eindeutig bestimmter Schnittpunkt der Feuerbachkreise im Ursprung des gewählten Koordinatensystems. Hier zeigt sich, wie gut das Koordinatensystem der Fragestellung angepaßt ist.

3. Das Höhenschnittpunktsviereck

Betrachtet man in einem nichtausgearteten Viereck $ABCD$ zu den Teildreiecken *BCD, CDA, DAB, ABC* die Höhenschnittpunkte H_A, H_B, H_C, H_D, so ist es schon einigermaßen verblüffend, daß der Feuerbachpunkt dieses H-Vierecks mit dem Feuerbachpunkt des Ausgangsvierecks übereinstimmt. Dieser Zusammenhang wird aber unmittelbar verständlich, wenn man nachweist, daß die Ecken des H-

Vierecks auch auf der gleichseitigen Hyperbel des Ausgangsvierecks liegen.

Liegen die Ecken des Vierecks *ABCD* auf einer nichtentarteten gleichseitigen Hyperbel, so bestimmt sich der Höhenschnittpunkt H_D des Teildreiecks *ABC* als Schnittpunkt der Höhen z.B. mit den Gleichungen

$$y = abx - abc + \frac{1}{c} \quad \text{und} \quad y = bcx - abc + \frac{1}{a}$$

$$\text{zu} \qquad H_D(-\frac{1}{abc};-abc).$$

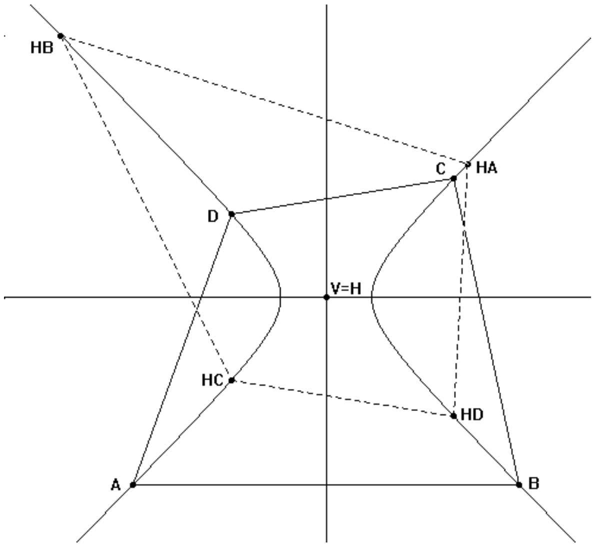

Abb.6. H-Viereck

Ist die Hyperbel des Vierecks entartet, so errechnen sich die Höhenschnittpunkte der Teildreiecke analog zu

$$H_A(-\frac{1}{bcd};0),\ H_B(0;-acd),\ H_C(-\frac{1}{abd};0),\ H_D(0;-abc).$$

In beiden Fällen liegen die Höhenschnittpunkte auf der Hyperbel des Ausgangsvierecks.
Aus den Koordinatendarstellungen ist ersichtlich, daß der Fall eines orthozentrischen Vierecks, bei dem z.B. der Eckpunkt A mit dem Höhenschnittpunkt H_A übereinstimmen muß, durch die Bedingung $abcd = -1$ gekennzeichnet ist. Für ein nichtorthozentrisches Viereck weist die Eigenschaft $abcd \neq -1$ auch die betrachteten H-Vierecke als nichtorthozentrisch aus, so daß der Feuerbachpunkt des H-Vierecks ebenfalls eindeutig im Ursprung liegt und mit dem Feuerbachpunkt des Ausgangsvierecks übereinstimmt.

Satz vom H-Viereck

Das Viereck aus den Höhenschnittpunkten der Teildreiecke eines nichtausgearteten, nichtorthozentrischen Vierecks hat denselben Feuerbachpunkt wie das Ausgangsviereck.

4. Das Schwerpunktsviereck

Betrachtet man zu einem beliebigen Viereck *ABCD* das Viereck $S_AS_BS_CS_D$ der Schwerpunkte der Teildreiecke *BCD, CDA, DAB, ABC,* so entsteht dieses S-Viereck offensichtlich aus dem Ausgangsviereck durch eine zentrische Streckung mit dem Schwerpunkt *Z* des Ausgangsvierecks als Zentrum und dem Faktor $-\frac{1}{3}$: z.B.

$$A(x_A;...)\,, Z(\frac{1}{4}(x_A+x_B+x_C+x_D);...)\,,\; S_A(\frac{1}{3}(x_B+x_C+x_D);...)$$

Durch diese zentrische Streckung wird auch aus dem Feuerbachpunkt *V* eines nichtausgearteten, nichtorthozentrischen Ausgangsvierecks der Feuerbachpunkt *S* des S-Vierecks:

$$S(\frac{1}{3}(a+b+c+d);\frac{1}{3}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}))$$

$$\text{bzw. } S(\frac{1}{3}(a+c);\frac{1}{3}(b+d))\,.$$

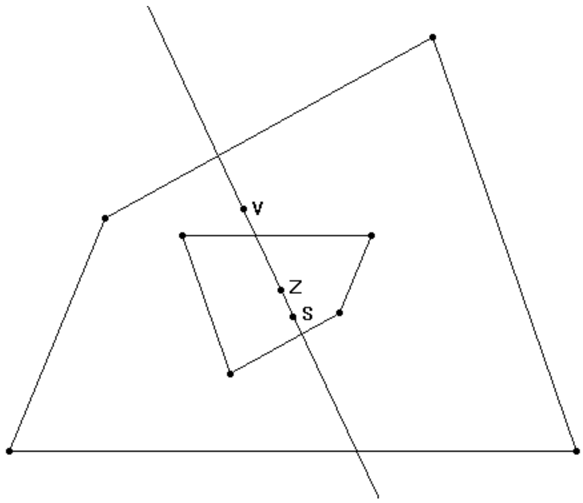

Abb.7. S-Viereck

Satz vom S-Viereck

Das Viereck der Schwerpunkte der Teildreiecke eines Vierecks entsteht aus dem Ausgangsviereck durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum im Schwerpunkt *Z* des Ausgangsvierecks und dem Faktor –1/3 .

5. Das Umkreismittenviereck

Zu einem nichtausgearteten Viereck *ABCD* werden nun die Umkreismitten M_A, M_B, M_C, M_D der Teildreiecke *BCD, CDA, DAB, ABC* betrachtet. Die Seitengeraden dieses M-Vierecks sind die Mittelsenkrechten der Seiten des Ausgangsvierecks; z.B. liegt die Seite M_CM_D auf der Mittelsenkrechten von *AB*.

Betrachtet man ein Viereck *ABCD* ohne orthogonales Gegenseitenpaar, so bestimmt sich die Umkreismitte M_D des Teildreiecks *ABC* als Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten z.B. mit den Gleichungen

$$y = abx - \frac{a+b}{2ab}(1-a^2b^2) \text{ und } y = bcx - \frac{b+c}{2bc}(1-b^2c^2)$$

zu $$M_D(\frac{1+abc(a+b+c)}{2abc};\frac{a^2b^2c^2+ab+bc+ca}{2abc}).$$

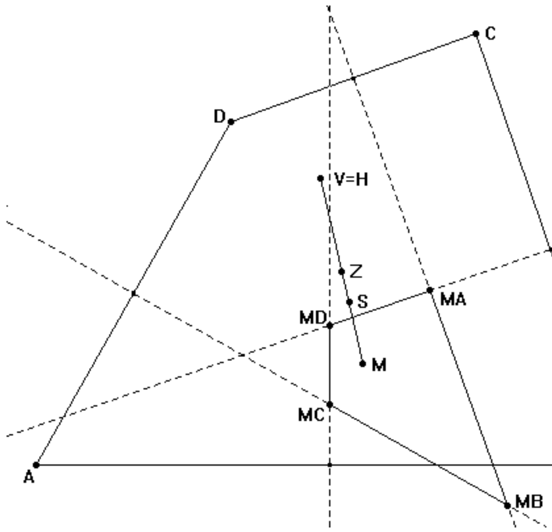

Abb.8. M-Viereck

Das M-Viereck entartet für ein Sehnenviereck zu einem viermal belegten Punkt *M* in der unten angegebenen Darstellung, wenn abcd = 1 ist. Zur einfacheren Formulierung der Ergebnisse sei der mehrfach belegte Punkt *M* auch als Feuerbachpunkt dieses trivialen Vierecks angesprochen. Dieser Fall sei jetzt ausgeschlossen: Da das Ausgangsviereck kein orthogonales Gegenseitenpaar hat, kann auch das M-Viereck, dessen Seiten senkrecht zu denen des Ausgangsvierecks verlaufen, kein orthogonales Gegenseitenpaar besitzen. Der Feuerbachpunkt des M-Vierecks liegt somit eindeutig im Zentrum der zugehörigen gleichseitigen Hyperbel. Durch eine Parallelverschiebung des M-Vierecks um $-2\vec{z}$ ($\vec{z}$ Ortsvektor des Schwerpunkts des Vierecks) erhält man die Ecken eines M*-Vierecks

$$\text{z.B. } M_D^*(\frac{1-abcd}{2abc};\frac{abcd-1}{2d}),$$

deren Koordinatenprodukt für alle Ecken denselben Wert

$-\frac{(abcd-1)^2}{4abcd} \neq 0$ ergibt, d.h. das Zentrum der gleichseitigen Hyperbel des M*-Vierecks liegt im Ursprung und damit auch der Feuerbachpunkt des M*-Vierecks. Somit hat der Feuerbachpunkt des M-Vierecks das Koordinatenpaar

$$M(\frac{a+b+c+d}{2};\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}))$$

und ist der am Schwerpunkt Z gespiegelte Ursprung des Koordinatensystems.

Für ein Viereck mit genau einem orthogonalen Gegenseitenpaar ergibt sich das M-Viereck analog zu

$$M_A\left(\frac{1+bc^2d}{2bcd};\frac{b+d}{2bd}\right),\ M_B\left(\frac{a+c}{2};\frac{1+ab^2c}{2b}\right),$$

$$M_C\left(\frac{1+da^2b}{2dab};\frac{b+d}{2bd}\right),\ M_D\left(\frac{a+c}{2};\frac{1+cd^2a}{2d}\right).$$

Der Feuerbachpunkt dieses M-Vierecks

$$M\left(\frac{a+c}{2};\frac{b+d}{2bd}\right)$$

ist ebenfalls der am Schwerpunkt Z gespiegelte Ursprung .

Satz vom M-Viereck

Das M-Viereck der Umkreismitten der Teildreiecke eines nichtausgearteten, nichtorthozentrischen Vierecks hat als Seitengeraden die Mittelsenkrechten der Seiten des Ausgangsvierecks oder ist im Falle eines Sehnenvierecks trivial. Der Feuerbachpunkt des M-Vierecks ist der am Schwerpunkt gespiegelte Feuerbachpunkt des Ausgangsvierecks.

Damit kann der zentrale Satz dieses Beitrags ausgesprochen werden, der die Analogie zur Euler-Geraden des Dreiecks herstellt.

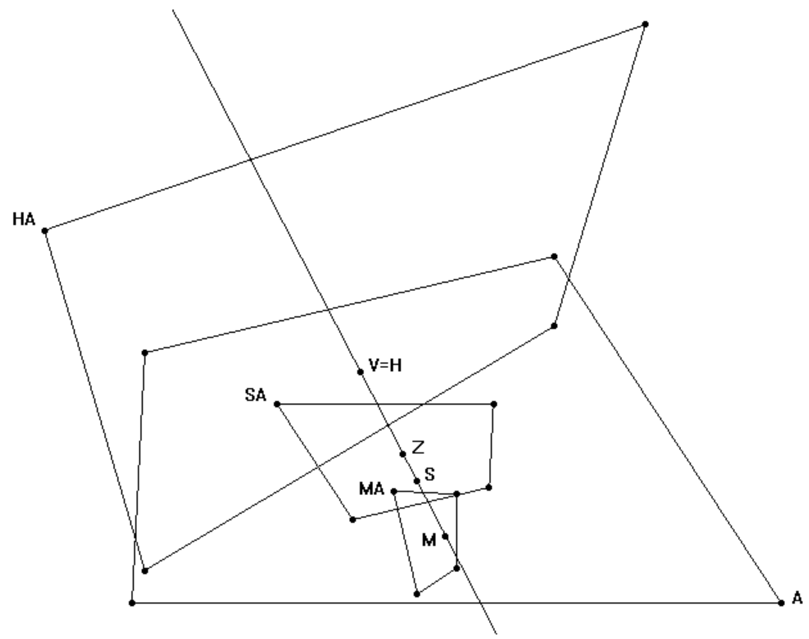

Abb.9 . H-, S- und M-Viereck sowie die Euler-Gerade eines Vierecks

Satz von der Euler-Geraden eines Vierecks

Jedem nichtausgearteten, nichtorthozentrischen Viereck *ABCD* kann man einen Feuerbachpunkt als gemeinsamen Schnittpunkt der Feuerbachkreise seiner Teildreiecke *ABC, BCD, CDA, DAB* zuordnen. Betrachtet man zu einem solchen Viereck das M-Viereck der Umkreismitten, das S-Viereck der Schwerpunkte und das H-Viereck der Höhenschnittpunkte seiner Teildreiecke, so liegen die zugehörigen Feuerbachpunkte *M, S, H* auf einer Geraden: *S* teilt die Strecke $\overline{MH}$ im Verhältnis 1 : 2, der Schwerpunkt des Ausgangsvierecks halbiert die Strecke $\overline{MH}$, und der Punkt *H* fällt mit dem Feuerbachpunkt des Ausgangsvierecks zusammen.

6. Das Feuerbachkreismittenviereck

Auf der Euler-Geraden eines Dreiecks ist der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke von Umkreismitte und Höhenschnitt der Mittelpunkt des Feuerbachkreises. Auch auf der Euler-Geraden eines Vierecks kann der Mittelpunkt der Strecke $\overline{MH}$ – bisher schon als Schwerpunkt des Vierecks erkannt – mit den Feuerbachkreisen der Teildreiecke in Verbindung gebracht werden.
Für ein Viereck ohne orthogonales Gegenseitenpaar wurden die Koordinaten der Feuerbachkreismitten der Teildreiecke in 2 bestimmt. Verschiebt man das F-Viereck um $-\vec{z}$, so erhält man ein F*-Viereck mit den Eckpunkten

$$\text{z.B.}\quad F_D^*\left(-\frac{1+abcd}{4abc};-\frac{1+abcd}{4d}\right),$$

deren Koordinatenprodukt für jede Ecke den gleichen Wert $\frac{(1+abcd)^2}{16abcd} \neq 0$ hat. Die Bedingung $abcd \neq -1$ schließt auch hier aus, daß das F*-Viereck orthozentrisch ist. Damit liegt der Feuerbachpunkt des F*-Vierecks eindeutig im Ursprung, d.h. der Feuerbachpunkt des F-Vierecks liegt im Schwerpunkt des Ausgangsvierecks.

Für ein Viereck mit genau einem orthogonalen Gegenseitenpaar ergibt sich analog aus der Darstellung des F-Vierecks in 2 der Feuerbachpunkt

$$F\left(\frac{a+c}{4};\frac{b+d}{4bd}\right),$$

der mit dem Schwerpunkt Z des Ausgangsvierecks übereinstimmt.

Satz vom F-Viereck
Das Viereck der Feuerbachkreismitten der Teildreiecke eines nichtausgearteten, nichtorthozentrischen Vierecks hat seinen Feuerbachpunkt im Schwerpunkt des Ausgangsvierecks.

7. Ausblick

Geht man der Frage nach, wie sich die gegenseitige Lage der merkwürdigen Punkte *M, S, F, H* eines Vierecks spezialisiert, wenn man spezielle Vierecke betrachtet, so fallen für Parallelogramme - insbesondere Quadrate und Rechtecke - die genannten merkwürdigen Punkte im Symmetriepunkt des Vierecks zusammen. Für Drachen und symmetrische Trapeze ist die Symmetrieachse des Vierecks auch die Euler-Gerade. Einzig das Sehnenviereck eröffnet neue Aspekte. Hier fallen die Umkreismitten der Teildreiecke zusammen, und die Euler-Strecken der Teildreiecke gehen alle vom Mittelpunkt des Kreises aus. Damit ist das M-Viereck trivial, und die S-, F-, H-Vierecke sind untereinander ähnlich. Ergänzend sei auf den reizvollen Zusammenhang hingewiesen, daß in jedem Sehnenviereck die Inkreismittelpunkte der Teildreiecke ein Rechteck ergeben [7].

Satz vom Sehnenviereck
In einem nichtentarteten Sehnenviereck ist das M-Viereck trivial, und die S-, F-, H-Vierecke sind untereinander und zum Ausgangsviereck ähnlich. Dabei ist das H-Viereck das am Feuerbachpunkt gespiegelte Ausgangsviereck.

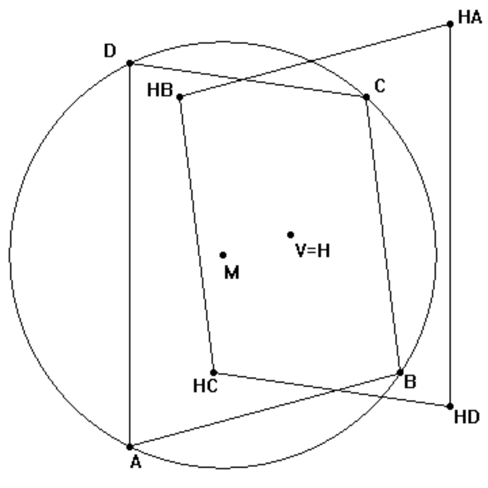

Abb.10. H-Viereck eines Sehnenvierecks

Beweis: Zu beweisen bleibt noch die letzte Aussage. Das S-Viereck entsteht aus dem Ausgangsviereck durch eine zentrische Streckung: Zentrum *Z*, Faktor $-\frac{1}{3}$. Das H-Viereck entsteht aus dem S-Viereck ebenfalls durch eine zentrische Streckung:

Zentrum M, Faktor 3. Die Verkettung der beiden zentrischen Streckungen liefert wieder eine zentrische Streckung: Zentrum $H = V$, Faktor - 1.

Betrachtet man abschließend – einem Hinweis von R.Stärk folgend - zu den M-, S-, F-, H-Vierecken eines nichtausgearteten Vierecks nicht die Feuerbachpunkte, sondern die Schwerpunkte Z_M, $Z_S=Z$, Z_F, Z_H, so liegen diese Punkte entsprechend auf einer Geraden, wie die zugehörigen Koordinaten zeigen:

$$Z(\frac{1}{4}(a+b+c+d);\frac{1}{4}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}));$$

$$\text{bzw.}\, Z(\frac{1}{4}(a+c);\frac{1}{4}(\frac{1}{b}+\frac{1}{d}));$$

$$Z_H(-\frac{1}{abcd}x_Z;-abcdy_Z);\; Z_M(\frac{3}{2}+\frac{1}{2abcd})x_Z;(\frac{3}{2}+\frac{abcd}{2})y_Z);$$

$$Z_F(\frac{3}{4}-\frac{1}{4abcd})x_Z;(\frac{3}{4}-\frac{abcd}{4})y_Z).$$

Diese weitere Euler-Gerade eines Vierecks schneidet die erstbehandelte im Schwerpunkt Z des Ausgangsvierecks und stimmt im Falle eines Sehnenvierecks mit dieser überein.

Literatur:

[1] P.BAPTIST: Die Entwicklung der neueren Dreiecksgeometrie. – Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag 1992, S.84-86, S.136-137.

[2] P.BAPTIST: Merkwürdige Punkte und Geraden im Dreieck. – Schriften der MNU, Heft 35, 1986, S.37 und 57.

[3] E.M.SCHRÖDER: Geometrie euklidischer Ebenen. – Paderborn: Schöningh 1985, S.109-112.

[4] H.S.M. COXETER: Unvergängliche Geometrie. – Stuttgart: Birkhäuser 1981,S.34.

[5] STÄRK: P1024 Ein merkwürdiger Punkt des Vierecks. – PM 6/39 S.275,1997 .
Lösung des Problems P1024. – PM 4/40 S.183, 1998.

[6] R.STÄRK und D. BAUMGARTNER: Ein merkwürdiger Punkt des Vierecks. – PM 1/44 S.19-27,2002.

[7] U.ANSORGE: Eine interessante Eigenschaft für Sehnenvierecke. – alpha 10/1995, S.14-15.

Eckart Schmidt - Hasenberg 27 - D 24223 Raisdorf
http://eckart_schmidt.bei.t-online.de
eckart_schmidt@t-online.de