

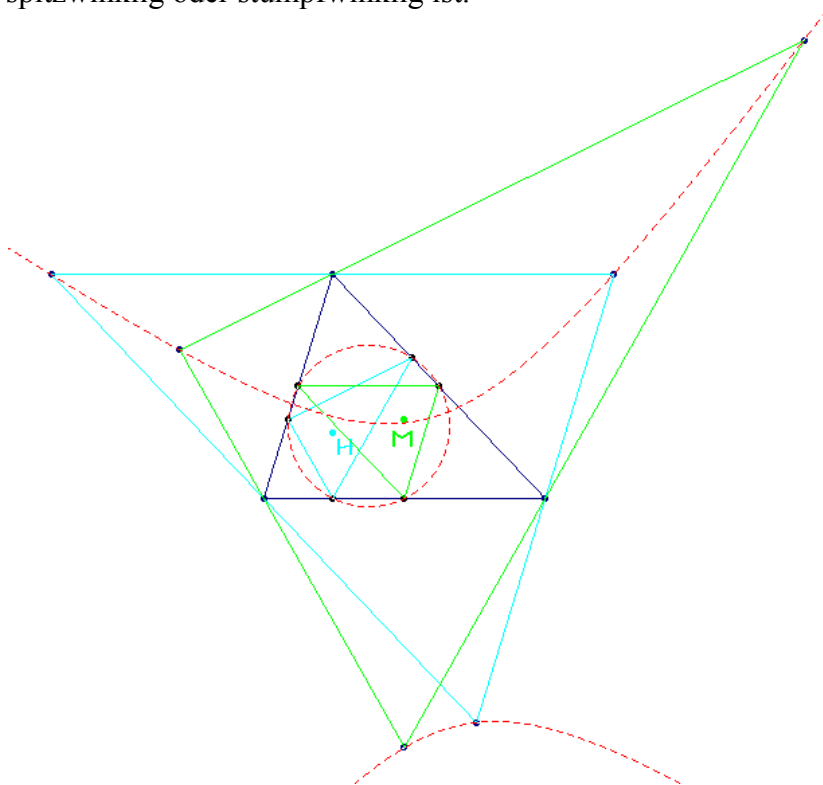
Fußpunktdreiecke und Anti-Fußpunktdreiecke

Eckart Schmidt

Zu einem Punkt der Dreiecksebene werden das Fußpunktdreieck und das Anti-Fußpunktdreieck – d.h. das Dreieck, in dem das Bezugsdreieck Fußpunktdreieck ist – betrachtet. Es wird die Geometrie von Punkten in ihrem Fußpunktdreieck und Anti-Fußpunktdreieck exemplarisch untersucht. Für isogonal konjugierte Punkte ergeben sich allgemeine Zusammenhänge. Betrachtet man die Schar der ähnlichen einbeschriebenen bzw. umbeschriebenen Dreiecke, so lassen sich Ortslinien spezieller Punkte bzw. Einhüllende spezieller Geraden und Kreise aufzeigen. – Gearbeitet wird mit baryzentrischen Koordinaten.

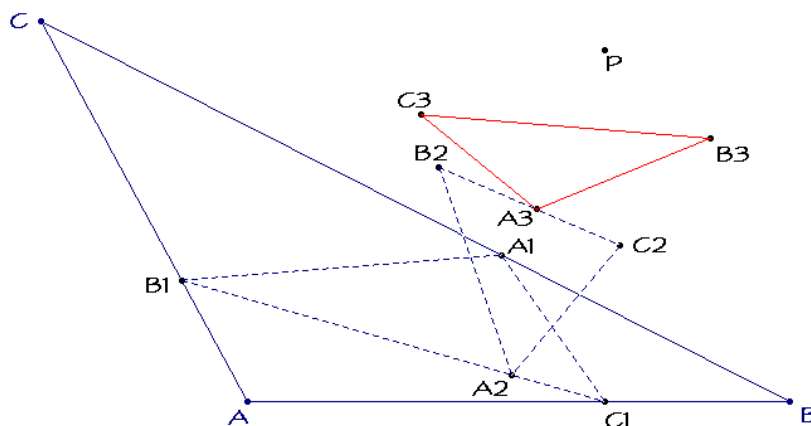
1. Ein Beispiel

Für die Umkreismitte liefern die Seitenmitten das Fußpunktdreieck und die Umkreistangenten das Anti-Fußpunktdreieck. Die Umkreismitte ist im Seitenmittendreieck offensichtlich der Höhenschnitt und im Tangentialdreieck die Inkreis- oder eine Ankreismitte, je nachdem das Dreieck spitzwinklig oder stumpfwinklig ist.



Zur Umkreismitte isogonal konjugiert ist der Höhenschnitt. Sein Fußpunktdreieck besitzt viele interessante Eigenschaften ([1], S.22); z.B. hat es mit dem Fußpunktdreieck der Umkreismitte den Neun-Punkte-Kreis als gemeinsamen Umkreis. Dies lässt sich für isogonal konjugierte Punkte verallgemeinern. Der Höhenschnitt ist in seinem Fußpunktdreieck die Inkreis- oder eine der Ankreismitten, denn die Restdreiecke sind dem Bezugsdreieck ähnlich und die Höhen somit die Winkelhalbierenden des Fußpunktdreiecks.

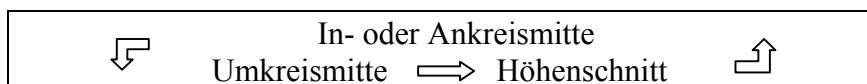
Das Anti-Fußpunktdreieck des Höhenschnitts hat offensichtlich Seiten parallel zu denen des Bezugsdreiecks, so dass dieses das Seitenmittendreieck des Anti-Fußpunktdreiecks ist. Damit ist der Höhenschnitt in seinem Anti-Fußpunktdreieck die Umkreismitte.



In diesem Zusammenhang ist die folgende Eigenschaft von Fußpunktdreiecken höherer Ordnung von Bedeutung ([2], Pedal Triangle):

Das dritte Fußpunktdreieck eines Punktes P ist zum Bezugsdreieck ähnlich. Genauer: Es entsteht aus dem Bezugsdreieck durch eine Drehstreckung bzgl. P .

Daher reicht die Untersuchung eines Punktes in seinem Fußpunkt- und Anti-Fußpunktdreieck, um die geometrische Deutung in seinen Fußpunktdreiecken und Anti-Fußpunktdreiecken höherer Ordnung zu überblicken. Aus unserem Beispiel ergibt sich dann der folgende Dreier-Zyklus (in Pfeilrichtung: Fußpunktdreieck):



Ohne Begründung seien weitere Zusammenhänge ergänzt. Das Fußpunktdreieck der Umkreismitte und das Anti-Fußpunktdreieck des Höhenschnitts sind ähnlich und perspektiv, entsprechend das Fußpunktdreieck des Höhenschnitts und das Anti-Fußpunktdreieck der Umkreismitte. Die Ecken der Anti-Fußpunktdreiecke von Höhenschnitt und Umkreismitte liegen isogonal konjugiert auf einem Kegelschnitt. Diese

Zusammenhänge lassen sich für isogonal konjugierte Punkte verallgemeinern.

2. Baryzentrische Koordinaten

Für Punkte des Umkreises entartet das Fußpunktdreieck bekanntlich auf der Wallace-Simson-Geraden und das Anti-Fußpunktdreieck im dreifach belegten diametralen Punkt. Daher seien Umkreispunkte für die folgenden Untersuchungen ausgeschlossen.

Gibt man dem Punkt P bzgl. eines Dreiecks ABC die baryzentrischen Koordinaten $P(u : v : w)$, so ergeben sich die Fußpunkte der Lote auf die Seiten zu

$$A'(0 : S_C u + a^2 v : S_B u + a^2 w), \quad B'(S_C v + b^2 u : 0 : S_A v + b^2 w) \\ C'(S_B w + c^2 u : S_A w + c^2 v : 0).$$

Benutzt werden die Conway-Abkürzungen:

$$2S_A = -a^2 + b^2 + c^2, \dots \quad \text{und} \quad S = 2\Delta.$$

Für die Seitenlängen des Fußpunktdreiecks $A'B'C'$ gilt

$$a'^2 : b'^2 : c'^2 = a^2(b^2 w^2 + 2S_A v w + c^2 v^2) : b^2(c^2 u^2 + 2S_B w u + a^2 w^2) \\ : c^2(a^2 v^2 + 2S_C u v + b^2 u^2)$$

$$\text{bzw.} \quad a' : b' : c' = a d_A : b d_B : c d_C,$$

wenn d_A, d_B, d_C die Eckabstände des Punktes P sind ([4], S.1214).

In seinem Fußpunktdreieck hat der Punkt P dann die Koordinaten

$$(a^2 v w : b^2 w u : c^2 u v).$$

Dies sind die Koordinaten des isogonalen Partners P^* von P im Bezugsdreieck ([3], S.1210), woraus man aber nur für ABC -ähnliche Fußpunktdreiecke auf die entsprechende geometrische Deutung schließen kann. Dies ist für die Umkreismitte der Fall, die in ihrem ABC -ähnlichen Fußpunktdreieck der Höhenschnitt ist.

Die obigen Seitenverhältnisse und Koordinaten gelten für alle zum Fußpunktdreieck ähnlichen einbeschriebenen Dreiecke gleichen Umlaufsinn mit den Ecken

$$A'(0 : S_C u + a^2 v - S u \kappa : S_B u + a^2 w + S u \kappa), \\ B'(S_C v + b^2 u + S v \kappa : 0 : S_A v + b^2 w - S v \kappa), \\ C'(S_B w + c^2 u - S w \kappa : S_A w + c^2 v + S w \kappa : 0).$$

Dabei ist der Parameter $\kappa = \cot \varphi$ mit dem Miquel-Winkel

$$\varphi = \angle PA'B = \angle PB'C = \angle PC'A.$$

Für $\kappa = 0$ erhält man die Koordinaten des Fußpunktdreiecks.

Andererseits ergeben sich zu einem Punkt $P(u : v : w)$ die Ecken des Anti-Fußpunktdreiecks zu

$$A''(-1 : \frac{b^2 u + S_C v}{a^2 v + S_C u} : \frac{c^2 u + S_B w}{a^2 w + S_B u}),$$

$$B'' \left(\frac{a^2 v + S_C u}{b^2 u + S_C v} : -1 : \frac{c^2 v + S_A w}{b^2 w + S_A v} \right),$$

$$C'' \left(\frac{a^2 w + S_B u}{c^2 u + S_B w} : \frac{b^2 w + S_A v}{c^2 v + S_A w} : -1 \right).$$

Für die Seitenlängen des Anti-Fußpunktdreiecks gilt

$$a'' : b'' : c'' = u^2(b^2 w^2 + 2S_A v w + c^2 v^2) : v^2(c^2 u^2 + 2S_B w u + a^2 w^2) : w^2(a^2 v^2 + 2S_C u v + b^2 u^2)$$

$$\text{bzw. } a'' : b'' : c'' = u d_A : v d_B : w d_C.$$

Der Punkt P hat bzgl. des Anti-Fußpunktdreiecks die Koordinaten

$$(u(b^2 w^2 + 2S_A v w + c^2 v^2) : v(c^2 u^2 + 2S_B w u + a^2 w^2) : w(a^2 v^2 + 2S_C u v + b^2 u^2))$$

$$\text{bzw. } (a''^2 v w : b''^2 w u : c''^2 u v).$$

Diese Seitenverhältnisse und Koordinaten gelten für alle zum Anti-Fußpunktdreieck ähnlichen umbeschriebenen Dreiecke gleichen Umlaufsinn mit den Ecken

$$A_\kappa'' \left(-1 : \frac{b^2 u + S_C v + S v \kappa}{a^2 v + S_C u - S u \kappa} : \frac{c^2 u + S_B w - S w \kappa}{a^2 w + S_B u + S u \kappa} \right),$$

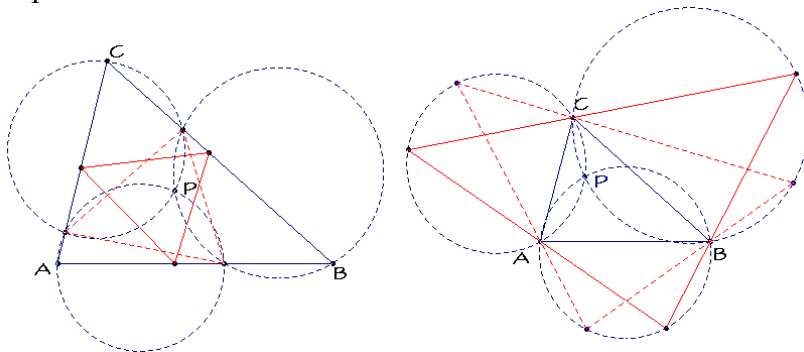
$$B_\kappa'' \left(\frac{a^2 v + S_C u - S u \kappa}{b^2 u + S_C v + S v \kappa} : -1 : \frac{c^2 v + S_A w + S w \kappa}{b^2 w + S_A v - S v \kappa} \right),$$

$$C_\kappa'' \left(\frac{a^2 w + S_B u + S u \kappa}{c^2 u + S_B w - S w \kappa} : \frac{b^2 w + S_A v - S v \kappa}{c^2 v + S_A w + S w \kappa} : -1 \right).$$

Dabei ist $\kappa = \cot \psi$ für den Winkel

$$\psi = \angle P A B_\kappa'' = \angle P B C_\kappa'' = \angle P C A_\kappa''.$$

Für $\kappa = 0$ erhält man die Koordinaten des Anti-Fußpunktdreiecks.



Das Fußpunktdreieck eines Punktes P ist somit Repräsentant einer Schar ähnlicher einbeschriebener Dreiecke mit dem Miquel-Punkt P , der in allen diesen Dreiecken die gleichen baryzentrischen Koordinaten und damit die gleiche geometrische Bedeutung hat ([3], S. 1228). Diese ähnlichen einbeschriebenen Dreiecke entstehen aus dem Fußpunktdreieck durch eine Drehstreckung bzgl. P (Satz von Miquel). Entsprechend ist das Anti-Fußpunktdreieck eines Punktes P Repräsentant einer Schar ähnlicher umbeschriebener Dreiecke, deren Ecken auf den Kreisen $k(PBC)$, $k(APC)$, $k(ABP)$ liegen. Auch diese ähnlichen umbeschriebenen Dreiecke entstehen aus dem Anti-

Fußpunktdreieck durch eine Drehstreckung bzgl. P , so dass P in allen diesen Dreiecken die gleiche geometrische Bedeutung hat (vgl. 6.).

Dies sind die Berechnungsgrundlagen für die folgenden Betrachtungen.

3. Weitere Dreier-Zyklen

Geht man vom Schwerpunkt $S(1:1:1)$ aus, so hat dieser in seinem Anti-Fußpunktdreieck nach den obigen Berechnungsgrundlagen die Koordinaten $(a'^2:b'^2:c'^2)$ und ist somit in seinem Anti-Fußpunktdreieck der Lemoine-Punkt, das isogonal konjugierte Bild des Schwerpunktes.

Andererseits hat der Schwerpunkt in seinem Fußpunktdreieck die Koordinaten $(a^2:b^2:c^2)$. Übersetzt man die Seitenlängen a, b, c nach obigen Ausführungen in die Seitenlängen und Koordinaten des zugehörigen Fußpunktdreiecks, so erhält man

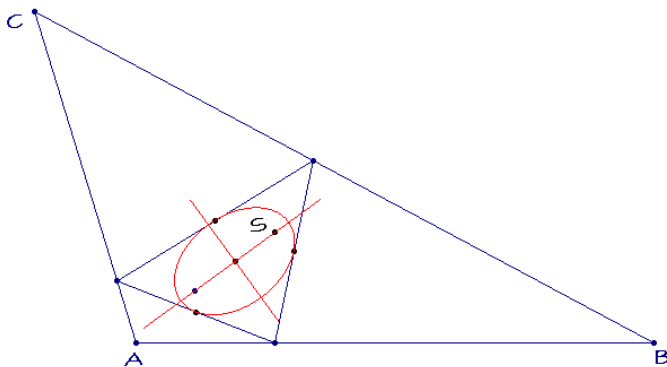
$$\begin{aligned} (u':v':w') &= (u'^2(b'^2w'^2 + 2S_A'v'w' + c'^2v'^2) \\ &\quad : v'^2(c'^2u'^2 + 2S_B'w'u' + a'^2w'^2) \\ &\quad : w'^2(a'^2v'^2 + 2S_C'u'v' + b'^2u'^2)), \end{aligned}$$

woraus sich ein Gleichungssystem zur Bestimmung der homogenen Koordinaten u', v', w' ergibt. Eine Auswertung liefert einen der Punkte:

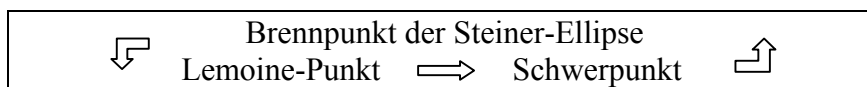
$$\left(b'^2 + W \pm \sqrt{(b'^2 + W)^2 - a'^2c'^2} : a'^2 + W \mp \sqrt{(a'^2 + W)^2 - b'^2c'^2} : c'^2 \right)$$

mit $W = \sqrt{S_A'^2 + S_B'^2 + S_C'^2 - S'^2}$.

Diese beiden Punkte sind bzgl. $A'B'C'$ isogonal konjugiert und haben ihren Mittelpunkt im Schwerpunkt von $A'B'C'$. – Der Schwerpunkt ist also in seinem Fußpunktdreieck einer der Brennpunkte der Steiner-Ellipse.



Da sich jeder der beiden isogonal konjugierten Brennpunkte der Steiner-Ellipse in seinem Fußpunktdreieck als Lemoine-Punkt erweist, erhält man folgenden weiteren Dreier-Zyklus:

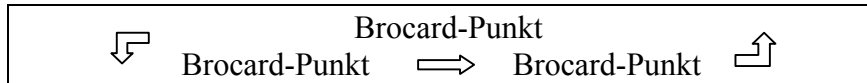


Der Dreier-Zyklus entartet für die Brocard-Punkte $(a^2b^2 : b^2c^2 : c^2a^2)$ oder $(a^2c^2 : b^2a^2 : c^2b^2)$.

Das Fußpunktdreieck eines Brocard-Punktes ist dem Bezugsdreieck ähnlich:

$$ABC \sim C'A'B' \text{ oder } ABC \sim B'C'A'$$

und ergibt sich durch eine Drehstreckung bzgl. des Brocard-Punktes. Damit ist ein Brocard-Punkt auch gleicher Brocard-Punkt in seinem Fußpunktdreieck .



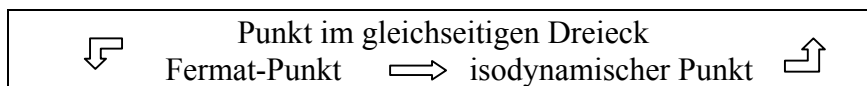
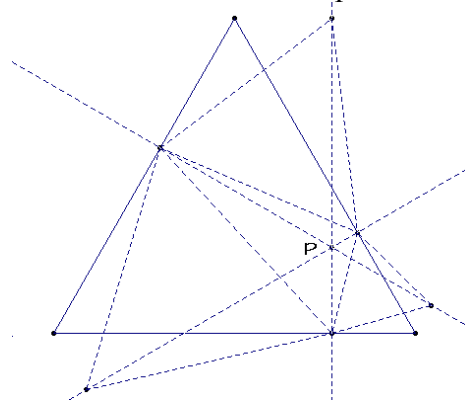
Einen weiteren Spezialfall erhält man, wenn man die Gleichseitigkeit von Fußpunktdreieck bzw. Anti-Fußpunktdreieck untersucht. Für Punkte der Apollonius-Kreise ergeben sich gleichschenklige und damit für die isodynamischen Punkte

$$(a^2(S \pm \sqrt{3}S_A) : b^2(S \pm \sqrt{3}S_B) : c^2(S \pm \sqrt{3}S_C))$$

gleichseitige Fußpunktdreiecke ([3], S.1229). Untersucht man die Gleichseitigkeit der Anti-Fußpunktdreiecke, so ergeben sich die Fermat-Punkte:

$$((S \pm \sqrt{3}S_B)(S \pm \sqrt{3}S_C) : (S \pm \sqrt{3}S_C)(S \pm \sqrt{3}S_A) : (S \pm \sqrt{3}S_A)(S \pm \sqrt{3}S_B))$$

Damit ist jeder Punkt in der Ebene eines gleichseitigen Dreiecks einer der Fermat-Punkte seines Fußpunktdreiecks und einer der isodynamischen Punkte seines Anti-Fußpunktdreiecks.



Die Fermat-Punkte sind also in ihren Fußpunktdreiecken isodynamische Punkte.

Weitere Dreier-Zyklen für gängige merkwürdige Punkte des Dreiecks wurden nicht gefunden. Hinderlich sind die in der skizzierten Untersuchungsmethode auszuwertenden Gleichungen. Dagegen kann eine Modifikation des zweiten Dreier-Zyklus angegeben werden, wenn man die Ecken der Anti-Ceva-Dreiecke $S_aS_bS_c$ und $L_aL_bL_c$ von Schwerpunkt S und Lemoine-Punkt L mit einbezieht.

Es ergibt sich unmittelbar, dass der Punkt $S_a(-1:1:1)$ in seinem Anti-Fußpunktdreieck der Punkt $(-a''^2:b''^2:c''^2)$ ist. In seinem Fußpunktdreieck ist S_a einer der Punkte

$$(b'+c' \pm \sqrt{(-a'+b'+c')(a'+b'+c')}: -b': -c').$$

Diese beiden Punkte sind isogonal konjugiert, haben den Mittelpunkt A' und liegen mit der Inkreismitte I' kollinear.

$L_a(-a^2:b^2:c^2) \iff S_a(-1:1:1)$

4. Isogonal konjugierte Punkte

Hier seien die Zusammenhänge des Eingangsbeispiels verallgemeinert. Dazu seien die Ecken des Fußpunktdreiecks des isogonal konjugierten Punktes P^* mit A_* , B_* , C_* und die Ecken des Anti-Fußpunktdreiecks von P^* mit A_*'' , B_*'' , C_*'' bezeichnet.

$$\begin{aligned} A_* & (0:(b^2u + S_C v):(c^2u + S_B w)v), \\ B_* & ((a^2v + S_C u)w:0:(c^2v + S_A w)u), \\ C_* & ((a^2w + S_B u)v:(b^2w + S_A v)u:0), \\ A_*'' & (-1:\frac{b^2(a^2v + S_C u)}{a^2(b^2u + S_C v)}:\frac{c^2(a^2w + S_B u)}{a^2(c^2u + S_B w)}), \\ B_*'' & (\frac{a^2(b^2u + S_C v)}{b^2(a^2v + S_C u)}:-1:\frac{c^2(b^2w + S_A v)}{b^2(c^2v + S_A w)}), \\ C_*'' & (\frac{a^2(c^2u + S_B w)}{c^2(a^2w + S_B u)}:\frac{b^2(c^2v + S_A w)}{c^2(b^2w + S_A v)}:-1). \end{aligned}$$

Damit lassen sich die Zusammenhänge aus dem Eingangsbeispiel verallgemeinern (siehe erste Abbildung).

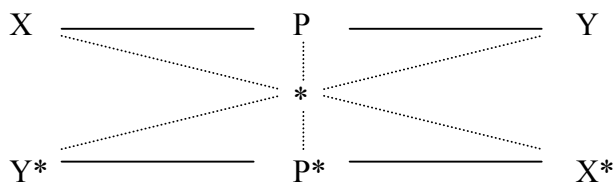
Die Fußpunktdreiecke von isogonal konjugierten Punkten haben einen gemeinsamen Umkreis und die Anti-Fußpunktdreiecke einen gemeinsamen Umkegelschnitt.
Das Fußpunktdreieck von P und das Anti-Fußpunktdreieck von P^* sind ähnlich und perspektiv (und umgekehrt).
Die Anti-Fußpunktdreiecke von P und P^* haben isogonal konjugierte Ecken.

Isogonal konjugierte Punkte P und P^* haben bekanntlich Fußpunktdreiecke mit gemeinsamem Umkreis ([4], S.67). Der gemeinsame Umkegelschnitt der Anti-Fußpunktdreiecke lässt sich nachweisen, indem man die Kollinearität der Schnittpunkte der Gegenseiten des Sechsecks $A_* B_* C_* A_*'' B_*'' C_*''$ untersucht. Die beiden letzten Aussagen bestätigt man unmittelbar aus den Koordinaten.

Ergänzend sei erwähnt, dass Punkte, deren Fußpunktdreieck und Anti-Fußpunktdreieck perspektiv sind, auf der Darboux-Cubic liegen ([5], K004)

5. Dreier-Zyklen isogonaler Punkte

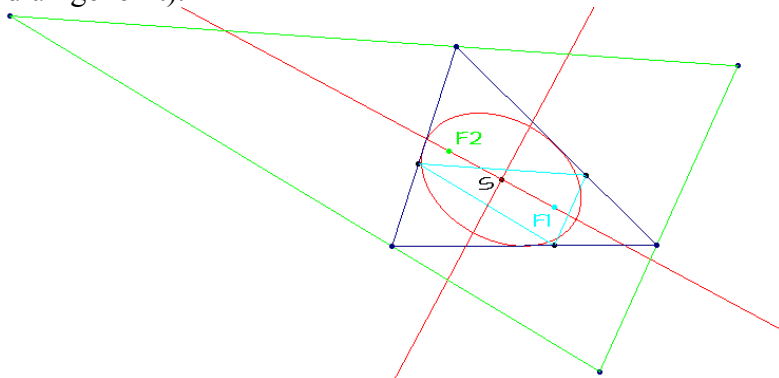
Die isogonalen Verwandtschaften in den aufgezeigten Dreier-Zyklen legen es nahe, die Dreier-Zyklen isogonal konjugierter Punkte P und P^* zu untersuchen. Die bisher aufgezeigten Dreier-Zyklen genügen offenbar dem folgenden Schema:



Hintergrund ist der folgende allgemeingültige Zusammenhang:

Zwei isogonal konjugierte Punkte haben – der eine in seinem Fußpunktdreieck, der andere in seinem Anti-Fußpunktdreieck – isogonal konjugierte geometrische Deutung.

Beispiel: Ein Brennpunkt der Steiner-Ellipse ist in seinem Fußpunktdreieck der Lemoine-Punkt während der andere Brennpunkt in seinem Anti-Fußpunktdreieck der Schwerpunkt ist (und umgekehrt).



Zum Beweis seien P und P^* die isogonal konjugierten Punkte. Das Fußpunktdreieck von P und das Anti-Fußpunktdreieck von P^* sind streckungsähnlich bezüglich eines Punktes

$$Z \left(\begin{array}{l} a^2(b^2u + S_C v)(c^2u + S_B w) : b^2(a^2v + S_C u)(c^2v + S_A w) \\ : c^2(b^2w + S_A v)(a^2w + S_B u) \end{array} \right)$$

mit dem Streckungsfaktor

$$\frac{a^2 b^2 c^2 (u + v + w)^2}{S^2 (a^2 v w + b^2 w u + c^2 u v)}$$

Der bzgl. des Fußpunktdreiecks von P isogonal konjugierte Punkt zu P

$$\begin{pmatrix} a^2(b^2c^2u^2 + b^2S_Bwu + c^2S_Cuv + (S^2 + S_B S_C)vw) \\ : b^2(c^2a^2v^2 + c^2S_Cuv + a^2S_Avw + (S^2 + S_C S_A)wu) \\ : c^2(a^2b^2w^2 + a^2S_Avw + b^2S_Bwu + (S^2 + S_A S_B)uv) \end{pmatrix}$$

wird durch die obige Streckung in den Punkt P^* überführt. \square

Für die bisher aufgezeigten Dreier-Zyklen ergeben sich daraus kaum neue Aspekte, da zwei Punkte des Zyklus isogonal konjugiert sind und der dritte eine isogonal konjugierte Alternative hat. Deshalb sei abschließend ein Dreier-Zyklus angesprochen, bei dem das nicht der Fall ist.

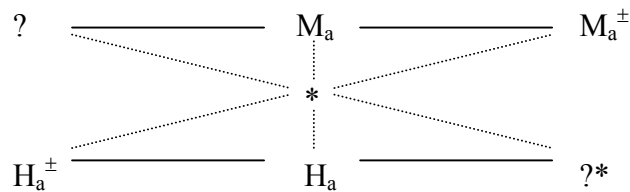
Die isogonal konjugierten Punkte seien $M_a(-a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C)$ und $H_a(-S_B S_C : S_C S_A : S_A S_B)$ der Anti-Ceva-Dreiecke der Umkreismitte M und des Höhenschnitts H . M_a ist in seinem Fußpunktdreieck einer der Punkte

$$M_a^\pm(S'^2 + 2S_B'S_C' \pm S'\sqrt{S'^2 + 8S_B'S_C'} : 2S_C'S_A' : 2S_A'S_B'),$$

die nicht isogonal sind. Ihre isogonalen Partner sind

$$H_a^\pm(-S'^2 - 2S_B'S_C' \pm S'\sqrt{S'^2 + 8S_B'S_C'} : 2b'^2S_B' : 2c'^2S_C'),$$

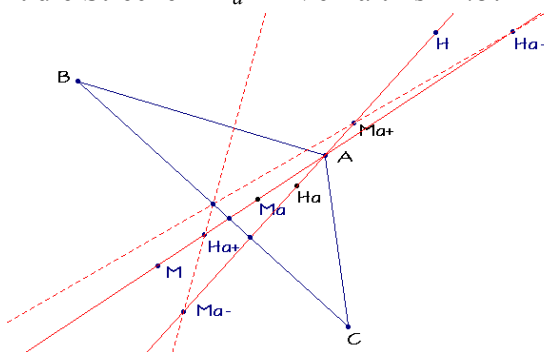
die in ihren Fußpunktdreiecken die geometrische Bedeutung von H_a haben.



Eine Berechnung der fehlenden isogonalen Partner des Diagramms muss leider dahingestellt bleiben. Sie liegen auf einer isogonal invarianten Zirkularkurve mit dem Pivot-Punkt im Fernpunkt der Höhe h_a .

Zur Geometrie der Punkte des Diagramms sei folgendes angemerkt:

Die Punkte M_A^\pm liegen auf der Ecktransversalen AH , die Punkte H_A^\pm auf der Ecktransversalen AM . Die Verbindungsgeraden $H_A^+M_A^-$ und $H_A^-M_A^+$ schneiden sich im Mittelpunkt von BC . Die Mitte der Punkte M_A^\pm teilt die Höhe im Verhältnis $1:3$; die Mitte von H_A^\pm teilt die Strecke AM_a im Verhältnis $-1:3$.

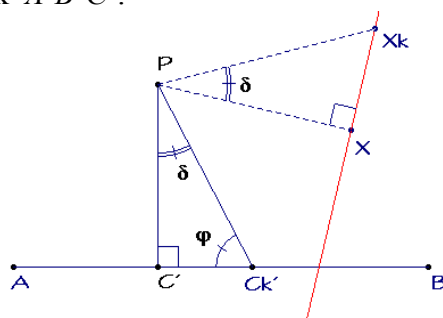


6. Ortslinien und Einhüllende

Betrachtet man zu einem Fußpunktdreieck $A'B'C'$ alle ähnlichen einbeschriebenen Dreiecke $A_\kappa'B_\kappa'C_\kappa'$ bzw. zum Anti-Fußpunktdreieck $A''B''C''$ alle ähnlichen umbeschriebenen Dreiecke $A_\kappa''B_\kappa''C_\kappa''$ gleichen Umlaufsinn, so stellt sich die Frage nach den Ortslinien spezieller Dreieckspunkte.

Für die zu einem Fußpunktdreieck ähnlichen einbeschriebenen Dreiecke gleichen Umlaufsinn liegen die merkwürdigen Punkte auf Geraden und die merkwürdigen Geraden hüllen Parabeln ein.
Für die zu einem Anti-Fußpunktdreieck ähnlichen umbeschriebenen Dreiecke gleichen Umlaufsinn liegen die merkwürdigen Punkte auf Kreisen und die merkwürdigen Geraden sind kopunktal.

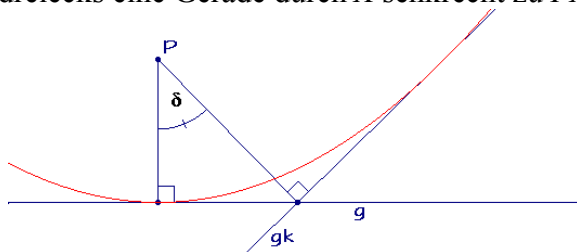
Der Punkt P hat in allen einbeschriebenen Dreiecken $A_\kappa'B_\kappa'C_\kappa'$ die gleiche geometrische Bedeutung, denn diese Dreiecke entstehen durch eine Drehstreckung bzgl. P aus dem Fußpunktdreieck $A'B'C'$.



Dabei gehört zum Drehwinkel δ mit $\varphi = 90^\circ - \delta$ und $\kappa = \cot \varphi$ der Streckungsfaktor

$$\sqrt{1 + \kappa^2} = \frac{1}{\sin \varphi} = \frac{1}{\cos \delta}.$$

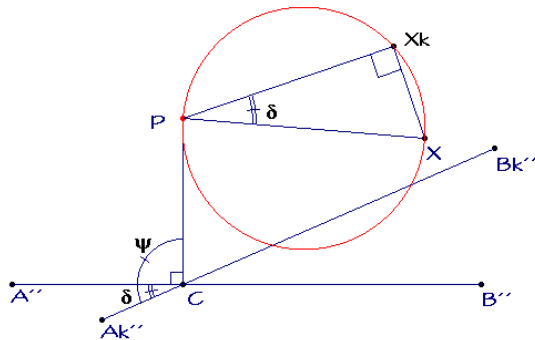
Daher ist die Ortslinie zu einem merkwürdigen Punkt $X \neq P$ des Fußpunktdreiecks eine Gerade durch X senkrecht zu PX .



Unterwirft man eine Gerade dieser Drehstreckung, so schneiden sich Gerade g und Bildgerade g_κ im Fußpunkt des Lotes von P auf g_κ , d.h. die Geraden hüllen eine Parabel ein mit dem Brennpunkt P und der Scheiteltangente g .

Ergänzt sei: Die Umkreise der Dreiecke $A_\kappa'B_\kappa'C_\kappa'$ hüllen einen Berührkegelschnitt von ABC ein, für den P Brennpunkt ist.

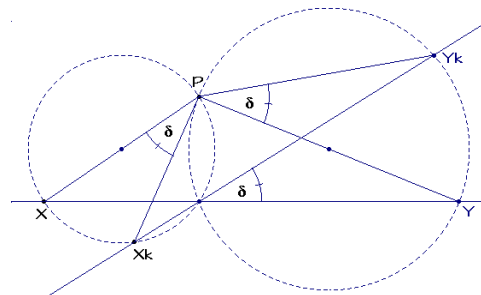
Auch die zum Anti-Fußpunktdreieck $A''B''C''$ von P ähnlichen umbeschriebenen Dreiecke $A_{\kappa}''B_{\kappa}''C_{\kappa}''$ entstehen aus $A''B''C''$ durch eine Drehstreckung bzgl. P .



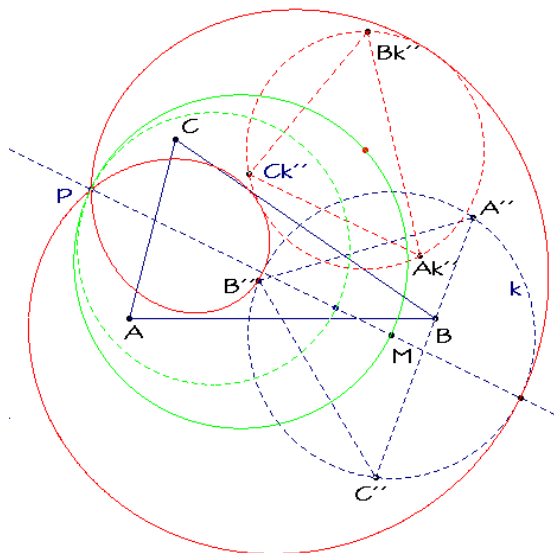
Dabei gehört zum Drehwinkel δ mit $\psi = 90^\circ + \delta$ und $\kappa = \cot \psi$ der Streckungsfaktor

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \kappa^2}} = \sin \psi = \cos \delta .$$

Daher ist die Ortslinie zu einem merkwürdigen Punktes $X \neq P$ des Anti-Fußpunktdreiecks ein Kreis, genauer der Thales-Kreis über PX .



Unterwirft man eine Gerade XY , die nicht durch P geht, dieser Drehstreckung, so durchlaufen X_{κ} und Y_{κ} Kreise, und zwar die Thales-Kreise über PX und PY . Berücksichtigt man den Drehwinkel δ , so müssen sich XY und $X_{\kappa}Y_{\kappa}$ im zweiten Schnitt der beiden Thales-Kreise schneiden, d.h. die Bildgeraden liegen im Büschel.



Abschließend sei ergänzt, dass die Umkreise der zum Anti-Fußpunktdreieck ähnlichen umbeschriebenen Dreiecke eine Pascalsche Schnecke mit Doppelpunkt P ergeben. Sei M die Umkreismitte und k der Umkreis des Anti-Fußpunktdreiecks, so ist diese Pascalsche Schnecke ([6], S.137) Einhüllende aller Kreise, deren Mittelpunkte auf dem Thales-Kreis über PM liegen und einen weiteren Kreis durch P senkrecht schneiden, der Thales-Kreis über P und seiner Spiegelung an k ist.

Literatur

- [1] E. Donath: Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks. – VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976.
- [2] Weisstein, Eric W. „...“ From MathWorld -- A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/...html>.
- [3] G. Berkhan , W. Fr. Meyer: Neuere Dreiecksgeometrie. – Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften III AB 10. B.G. Teubner, Leipzig 1898-1904.
- [4] R. Honsberger: Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry. – The Mathematical Association of America, Washington 1995.
- [5] <http://perso.wanadoo.fr/bernard.gibert/Examples/k004.html>.
- [6] H. Schmidt: Ausgewählte höhere Kurven. – Kesselringsche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1949.

Eckart Schmidt - Holstenstr.42 - D 24223 Raisdorf
<http://eckartschmidt.de>
eckart_schmidt@t-online.de