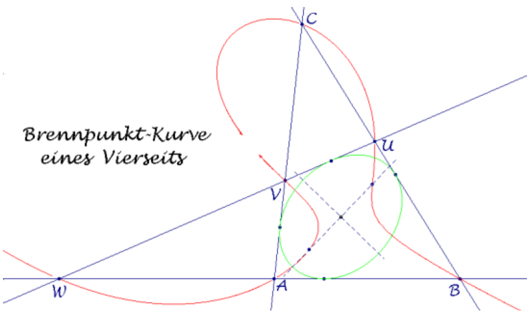
Die Brennpunktkurve eines Vierecks

Eckart Schmidt

Die Brennpunkte der Berührkegelschnitte eines Vierseits liegen auf einer Kurve dritter Ordnung, die als „isogonal non pivotal circular cubic" angesprochen werden kann [Gib$_1$;4.1.2; Fre;2.1] und hier näher untersucht werden soll. – Gearbeitet wird in baryzentrischen Koordinaten eines Teildreiseits.



Die Gleichung der Kurve

Behandelt man Vierecke bzw. Vierseite, die keine Parallelogramme sind, mit baryzentrischen Koordinaten, so wird meist ein Teildreiseit *ABC* als Bezugsdreieck gewählt und die vierte Seite als Tripolare eines Punktes $R(u:v:w)$ angesprochen. Diese Tripolare schneidet die Seiten des Bezugsdreiecks in den Punkten

$$U(0:v:-w),\quad V(-u:0:w),\quad W(u:-v:0).$$

Das Vierseit ist dann durch die Seitengeraden *AB, BU, UV, VA* des Vierecks *ABUV* gegeben. Die Gegenseitenschnitte sind *C* und *W* und der Diagonalenschnitt ist $D(u:v:-w)$.

Einbeschriebene Kegelschnitte eines Dreiecks und zugehörige kubische Kurven werden in *[Fre]* und *[Gib$_2$]* ausführlich behandelt. Für Dreiecke liegen die Brennpunkte einbeschriebener Kegelschnitte bekanntlich isogonal *[Yiu;5.3]*. Die Brennpunkte zu Berührkegelschnitten eines Vierseits sind somit isogonal bzgl. jedes der vier Teildreiseite *ABC, AVW, UBW, UVC*.

Satz 1: Die Brennpunkte der Berührkegelschnitte eines Vierseits liegen isogonal bzgl. der Teildreiseite.

Wertet man diese Isogonalitätsgleichheit aus, so erhält man die Gleichung der Brennpunktkurve, kurz *BP*-Kurve *[Gib$_1$;4.1.2]*:

$$2(uS_A+vS_B+wS_C)+\sum_{zykl}ux(c^2y^2+b^2z^2)=0\ .$$

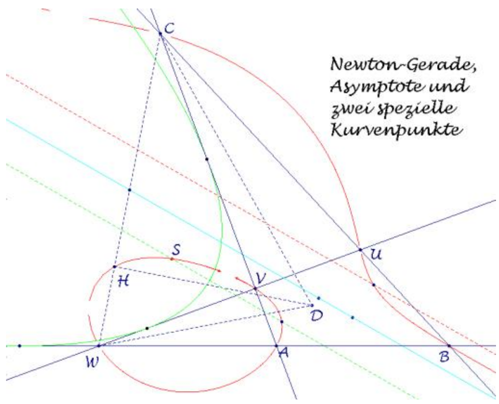
Benutzt werden die Conway-Abkürzungen mit

$$2S_A = -a^2 + b^2 + c^2, \quad 2S_B = a^2 - b^2 + c^2, \quad 2S_C = a^2 + b^2 - c^2,$$

$$\text{sowie } S = \sqrt{S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A} = 2\Delta.$$

Die *BP*-Kurve enthält die Ecken des Vierecks *ABUV* als auch die Gegenseitenschnitte *C* und *W*, denn die Punktepaare *(A,U)*, *(B,V)*, *(C,W)* können als Brennpunktpaare entarteter Berührkegelschnitte aufgefasst werden.
In der eingangs zitierten Literatur wird diese Kurve als eine *„isogonal non pivotal circular cubic"* dargestellt und der kennzeichnende Punkt *R* als *„the root"* bezeichnet.
Die Mitten der Brennpunktpaare, d.h. die Zentren der einbeschriebenen Kegelschnitte, liegen bekanntlich auf der Newton-Geraden, der Verbindungsgeraden der Diagonalen-mitten, mit der Gleichung

$$(-u+v+w)x + (u-v+w)y + (u+v-w)z = 0.$$



Als charakteristischer Punkt der *BP*-Kurve kann der Brennpunkt der Berührparabel des Vierseits genannt werden *[Ehr;7.4]*:

$$S(x_S : y_S : z_S) = S\left(\frac{a^2}{v-w} : \frac{b^2}{w-u} : \frac{c^2}{u-v}\right).$$

Dieser Punkt ist der Steiner-Punkt (Miquel-Punkt *[Ehr;5.2]*) des Vierseits im gemeinsamen Punkt der Umkreise der Teildreiseite. Als *„singular focus" [Gib$_1$;4.1.2]* der Zirkularkurve liegt er auf dem Umkreis des Bezugsdreiecks.
Das isogonale Bild des Steiner-Punktes ergibt den Fernpunkt der Kurve

$$S^*(v-w : w-u : u-v),$$

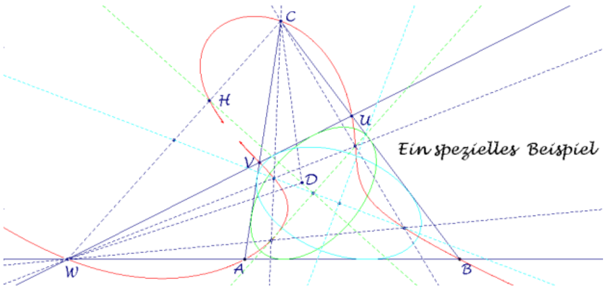
der auch Fernpunkt der Newton-Geraden ist. Spiegelt man den Steiner-Punkt an der Newton-Geraden, so ist eine Parallele zur Newton-Geraden durch diesen Punkt die Asymptote mit der Gleichung.

$$((-u+v+w)x_S + y_S + z_S)x + (x_S + (u-v+w)y_S + z_S)y$$
$$+ (x_S + y_S + (u+v-w)z_S)z = 0 \ .$$

Satz 2: Streckt man die Newton-Gerade vom Steiner-Punkt mit dem Faktor zwei, erhält man die Asymptote.

Residuen und Tangentialpunkte

Einleitend sei ein spezielles Beispiel betrachtet: Die Newton-Gerade schneidet die *BP*-Kurve in zwei isogonalen Punkten, die Brennpunkte eines Berührkegelschnitts sind. Verbindet man diese Brennpunkte mit den Gegenseitenschnitten *C* und *W*, so ergeben sich zwei weitere Brennpunkte, deren zugehöriger Berührkegelschnitt eine Nebenachse senkrecht zu *CW* durch den Diagonalenschnitt *D* hat. Der Fußpunkt *H* dieser Höhe des Diagonaldreiecks *CWD* ist ein Punkt der *BP*-Kurve.



Diese Zusammenhänge lassen sich in folgender Hinsicht verallgemeinern:

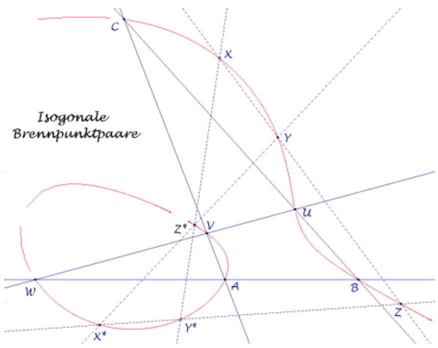
> **Satz 3: Die Verbindungsgeraden zwischen zwei Brennpunktpaaren erzeugen ein weiteres Brennpunktpaar.**

Genauer: Betrachtet man zu zwei nicht isogonalen Punkten $X(x_1 : x_2 : x_3)$ und $Y(y_1 : y_2 : y_3)$ die isogonalen Punktepaare *(X,X*)* und *(Y,Y*)*, dann liegen die Schnitte

$$XY^* \cap X^*Y = (XY \cap X^*Y^*)^* = Z^* \quad \text{und} \quad Z = XY \cap X^*Y^*$$

$$= \left(\frac{a^2(b^2 z_1 z_2 - c^2 y_1 y_2)}{y_1 z_2 - y_2 z_1} : \frac{b^2(c^2 x_1 x_2 - a^2 z_1 z_2)}{z_1 x_2 - z_2 x_1} : \frac{c^2(a^2 y_1 y_2 - b^2 x_1 x_2)}{x_1 y_2 - x_2 y_1}\right)$$

ebenfalls isogonal auf der Kurve, wenn die Punkte *X* und *Y* auf der Kurve liegen.



Mit Satz 3 ergibt sich eine Möglichkeit, zu zwei nicht isogonalen Kurvenpunkten *X* und *Y* den dritten Schnitt

$$Z = res(X,Y) = XY \cap X^*Y^* = res(X^*,Y^*)$$

der Verbindungsgeraden *XY* mit der Kurve zu konstruieren und zu berechnen. Für Punkte auf den Seitengeraden des

Bezugsdreiecks versagt aber die obige Berechnungsgrundlage. Deshalb seien hier die Residuen der Gegeneckenpaare angegeben.

$$res(A,U) = (\frac{u(c^2v^2 + b^2w^2) - 2vw(uS_A + vS_B + wS_C)}{c^2v^2 - b^2w^2} : -v : w),$$

$$res(B,V) = (-u + \frac{v(c^2u^2 + a^2w^2) - 2uw(uS_A + vS_B + wS_C)}{c^2u^2 - a^2w^2} : w),$$

$$res(C,W) = (u : -v : \frac{2uv(S_Au + S_Bv + S_Cw) - (b^2u^2 + a^2v^2)w}{b^2u^2 - a^2v^2}).$$

Dabei erweist sich der letzte Punkt als Höhenfußpunkt H im Diagonaldreieck CWD

$$mit \qquad res(res(A,U), res(B,V)) = res(C,W)^* = H^*.$$

Satz 4. Die Verbindungsgerade der Gegenseitenschnitte eines Vierecks schneidet die Brennpunktkurve im Höhenfußpunkt des Diagonaldreiecks.

Abschließend sei der Fall isogonaler Kurvenpunkte X und X^* aufgegriffen, die nicht auf den Seiten des Vierecks liegen. Dann lässt sich das Residuum wie folgt konstruieren: Das *ABC*-isogonale Bild der Verbindungsgeraden XX^* ist ein Umkegelschnitt des Teildreiseits *ABC*, das *BUW*-isogonale Bild ein entsprechender Umkegelschnitt des Teildreiseits *BUW*. Das *ABC*-isogonale Bild des vierten Schnitts dieser beiden Kegelschnitte ergibt *res(X,X*)*. Folgt man dieser Konstruktion analytisch, so erhält man

$$res(X, X^*) = (\frac{yz(a^2yz(vz + wy) - x^2(b^2wz + c^2vy))}{c^2y^2 - b^2z^2}$$

$$: \frac{zx(b^2zx(wx + uz) - y^2(c^2ux + a^2wz))}{a^2z^2 - c^2x^2}$$

$$: \frac{xy(c^2xy(vx + uy) - z^2(a^2vy + b^2ux))}{b^2x^2 - a^2y^2}).$$

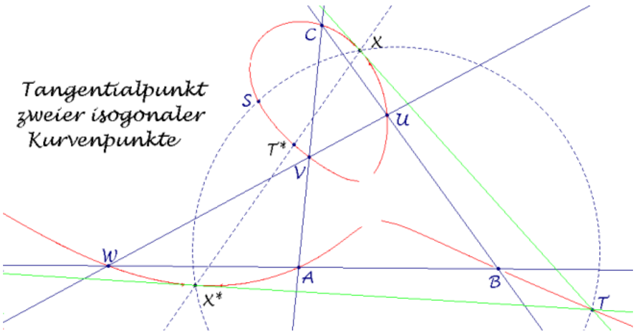
Die Bedeutung dieses Punktes liegt darin, dass sein isogonales Bild der Schnitt der Kurventangenten in X und X^* ist:

$$res(X, X^*)^* = \tan(X, X^*) = (\frac{a^2x(b^2z^2 - c^2y^2)}{vy(c^2x^2 - a^2z^2) - wz(a^2y^2 - b^2x^2)}$$

$$: \frac{b^2y(c^2x^2 - a^2z^2)}{wz(a^2y^2 - b^2x^2) - ux(b^2z^2 - c^2y^2)} : \frac{c^2z(a^2y^2 - b^2z^2)}{ux(b^2z^2 - c^2y^2) - vy(c^2x^2 - a^2z^2)}).$$

Zur Begründung: Im Grenzfall von Satz 3, wenn man Y auf der Kurve in X überführt, werden aus den Geraden XY und X^*Y^* Tangenten mit dem Schnittpunkt *tan(X,X*)*. Die Geraden X^*Y, XY^* fallen zusammen; ihr dritter Schnitt mit der Kurve ist *res(X,X*)*. Dann gilt *tan(X,X*)=res(X,X*)**.

Satz 5: Der Tangentialpunkt zweier isogonaler Punkte der Brennpunktkurve ist das isogonale Bild des dritten Kurvenschnitts der Verbindungsgeraden.



Z.B. ist der Tangentialpunkt des Steiner-Punkts S der Schnitt K der Asymptote mit der Kurve.
Die obigen Berechnungsgrundlagen versagen für die Kurvenpunkte A, B, C, U, V, W auf den Seiten des Vierseits. Die Tangenten in diesen Punkten erweisen sich als isogonale Bilder der Diagonalen des Vierseits bei richtiger Wahl des Bezugsdreiecks. So ist die Tangente im Punkt A das isogonale Bild der Diagonalen AU, wobei als Bezugsdreieck ABC bzw. AVW gewählt werden kann. Entsprechend ergeben sich die weiteren Tangenten:

$$t_A = (AU)^*_{ABC,AVW}, \quad t_B = (BV)^*_{ABC,UBW}, \quad t_C = (CW)^*_{ABC,UVC},$$
$$t_U = (AU)^*_{UBW,UVC}, \quad t_V = (BV)^*_{UVC,AVW}, \quad t_W = (CW)^*_{UBW,AVW}.$$

Dabei gilt

tan(A,U)=res(A,U), tan(B,V)=res(B,V)*,*
tan(C,W)=res(C,W)=H*.*

Die Steiner-Inversion

Hier sei eine Abbildung angesprochen, die sich am Steiner-Punkt S des Vierseits orientiert und ebenfalls die Brennpunkte der Berührkegelschnitte vertauscht:

> **Definition: Die Steiner-Inversion eines Vierecks besteht aus der Spiegelung an einer Geraden durch den Steiner-Punkt und der Spiegelung an einem Kreis um den Steiner-Punkt, so dass die Gegenecken des Vierecks vertauscht werden.**

Diese Steiner-Inversion liefert zu einem Punkt $(x:y:z)$ den Bildpunkt

$$\left(a^2\left(\frac{a^2yz}{v-w}+\frac{b^2z(wx+uy+uz)}{(v-w)(w-u)}-\frac{c^2y(vx+uy+uz)}{(u-v)(v-w)}\right)\right.$$
$$:b^2\left(-\frac{a^2z(vx+wy+vz)}{(v-w)(w-u)}+\frac{b^2xz}{w-u}+\frac{c^2x(vx+uy+vz)}{(u-v)(w-u)}\right)$$
$$\left.:c^2\left(\frac{a^2y(wx+wy+vz)}{(u-v)(v-w)}-\frac{b^2x(wx+wy+uz)}{(u-v)(w-u)}+\frac{c^2xy}{u-v}\right)\right).$$

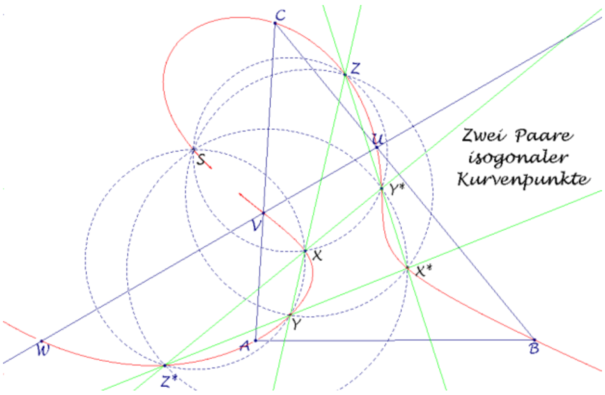
Die Steiner-Inversion vertauscht nicht nur die Gegenecken eines Vierecks, sondern auch die Gegenseitenschnitte. Der Diagonalenschnitt, der nicht auf der Kurve liegen muss, wird in

den Tangentialpunkt *[Stä]* (isoptic point, Bennett-Punkt *[Cun;3.21]*) des Vierecks abgebildet.
Bemerkenswert ist, dass für Punkte der *BP*-Kurve die Steiner-Inversion mit der Isogonalität bzgl. der Teildreiseite übereinstimmt. Das Entfernungsprodukt zweier Brennpunkte vom Steiner-Punkt ist somit konstant. Umfassender gilt der folgende Satz:

> **Satz 6. Die Steiner-Inversion eines Vierecks bildet die Brennpunktkurve unter Vertauschung der Brennpunkte auf sich ab.**

Die Steiner-Inversion bildet die Seitengeraden des Vierecks auf die Umkreise der Teildreiseite ab. Satz 3 kann jetzt präzisiert werden: Zu zwei isogonalen Punktepaaren *(X,X*)* und *(Y,Y*)* auf der Brennpunktkurve werden die Verbindungsgeraden *XY* und *X*Y** durch die Steiner-Inversion auf Kreise durch den Steiner-Punkt abgebildet. Der zweite Schnitt dieser Bildkreise ist das isogonale Bild *Z** des Schnitts *Z* der Geraden *XY* und *X*Y**, nach Satz 3 Punkt der Kurve.

> **Satz 5. Zu zwei isogonalen Punktepaaren *(X,X*)* und *(Y,Y*)* auf der Brennpunktkurve liegen die zweiten Schnitte der Kreise *k(S,X,Y)* und *k(S,X*,Y*)* bzw. *k(S,X,Y*)* und *k(S,X*,Y)* isogonal auf der Kurve.**



Ergänzt sei, dass das Vierseit der Geraden *XY*, *YX**, *X*Y**, *Y*X* den gleichen Steiner-Punkt und die gleiche Brennpunktkurve wie das Ausgangsvierseit hat.

Die Höhenfußpunkte des Diagonalendreiseits

Betrachtet man das Diagonalendreiseit aus den Geraden *AU*, *BV*, *CW*, dann erhält man die Ecken $AU \cap BV = D(u:v:-w)$ sowie

$$AU \cap CW = E(u:-v:w) \quad und \quad BV \cap CW = F(-u:v:w)$$

des Diagonalendreiseits mit den Höhenfußpunkten

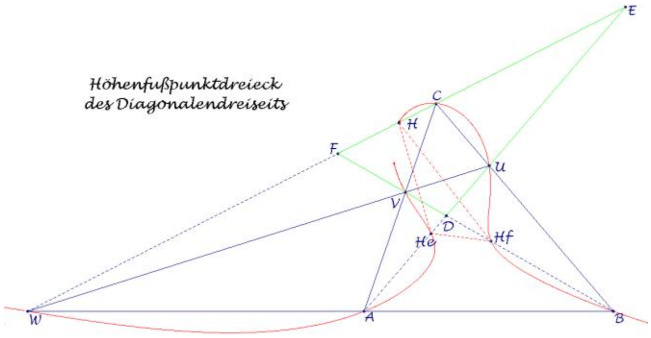
$$H = res(C,W) = \tan(C,W)^*,$$

$$H_e(u : \frac{2uw(S_A u + S_B v + S_C w) - (c^2u^2 + a^2w^2)v}{c^2u^2 - a^2w^2} : -w),$$

$$H_f\left(\frac{2vw(S_A u + S_B v + S_C w) - (c^2v^2 + b^2w^2)u}{c^2v^2 - b^2w^2} : v : -w\right).$$

Bemerkenswert ist, dass die HH_eH_f-Isogonalität für Kurvenpunkte mit der *ABC*-Isogonalität übereinstimmt.

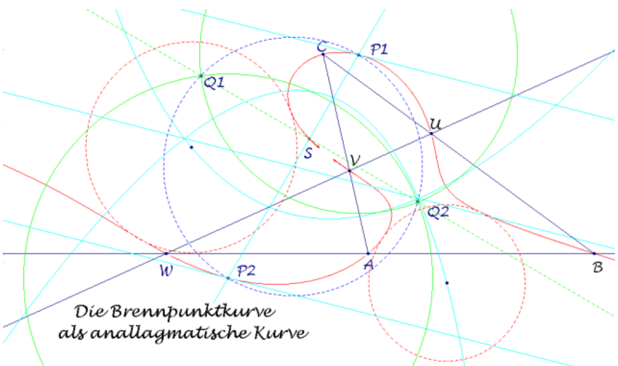
Satz 6: Die Brennpunktkurve enthält die Höhenfußpunkte des Diagonalendreiseits *[Fre;2.1]*. Die Isogonalität bzgl. dieses Höhenfußpunktdreiecks bildet die Brennpunktkurve unter Vertauschung der Brennpunkte auf sich ab.



Die Brennpunktkurve als anallagmatische Kurve

Eine Kurve wird als anallagmatisch bezeichnet, wenn sie invariant unter einer Kreisspiegelung ist. Dies sei für die *BP*-Kurve aufgezeigt, auch wenn eine analytische Behandlung in den Berechnungen erstickt.

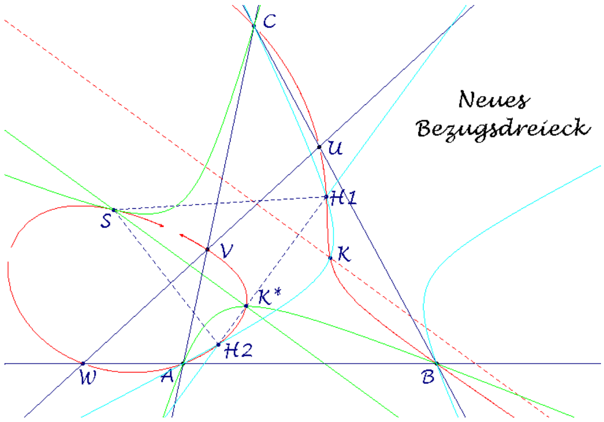
Die Punkte Q_1, Q_2 seien die Fixpunkte der Steiner-Inversion. Ihre Mittelsenkrechte schneidet die Kurve neben dem Steiner-Punkt S in zwei isogonalen Punkten P_1, P_2, die mit Q_1, Q_2 konzyklisch liegen und deren Tangenten parallel zur Asymptote (bzw. zur Newton-Gerade) verlaufen. Die Kreise für die Inversionen, unter denen die *BP*-Kurve invariant bleibt, sind dann die Kreise um P_1 und P_2 durch Q_1, Q_2.



Als anallagmatische Kurve ist die *BP*-Kurve auch Einhüllende zweier Kreisscharen. Die Kreismitten liegen auf zwei Parabeln und die Kreise schneiden jeweils einen Inversionskreis senkrecht. Die beiden Parabeln haben einen gemeinsamen Brennpunkt im Steiner-Punkt S und die Leitlinien sind die asymptotenparallelen Tangenten in P_1, P_2.

Die *BP*-Kurve als „isogonal pivotal focal circular cubic"

Unter bestimmten Voraussetzungen kann die Brennpunktkurve auch als „isogonal pivotal focal circular cubic" *[Gib$_1$;4.1.3]* angesprochen werden. Hat die vierte Seite *UV* des Vierseits keinen oder zwei Schnitte mit den In- und Umkreisen des Bezugsdreiecks, dann besteht die Brennpunktkurve aus zwei Kurvenstücken. Es gibt dann drei Zentren P_1, P_2, P_3, bzgl. derer die Kurve anallagmatisch ist. Dies sind drei der vier Punkte, in denen die Tangente parallel zur Asymptote ist. Diese vier Punkte bilden ein orthozentrisches Viereck mit einem Diagonaldreieck SH_1H_2, dem Höhenfußpunktdreieck von $P_1P_2P_3$, wobei S der Steiner-Punkt des Vierseits ist. Benutzt man SH_1H_2 als Bezugsdreieck, so ist die Brennpunktkurve eine „isogonal pivotal focal circular cubic" mit einem Pivot-Punkt im Fernpunkt der Höhe durch den Steiner-Punkt S.



Eine Konstruktion dieses Bezugsdreiecks kann z.B. wie folgt durchgeführt werden: Der Schnitt einer Parallelen zur Asymptote durch den Steiner-Punkt S mit dem isogonalen Bild der Asymptote (einem Umkegelschnitt von ABC) ist das isogonale Bild K^* des Punktes

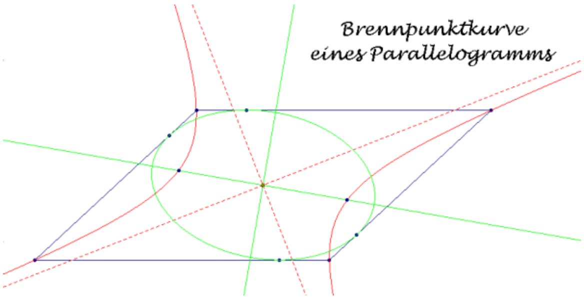
$$K\left(\frac{a^2(b^2(u-v)^2-c^2(w-u)^2)}{(-u+v+w)x_S+y_S+z_S}:\frac{b^2(c^2(v-w)^2-a^2(u-v)^2)}{x_S+(u-v+w)y_S+z_S}:\frac{c^2(a^2(w-u)^2-b^2(v-w)^2)}{x_S+y_S+(u+v-w)z_S}\right),$$

in dem die Asymptote die Brennpunktkurve schneidet. Eine Senkrechte in K^* zur Asymptote schneidet das isogonale Bild dieser Senkrechten (einen weiteren Umkegelschnitt von ABC) in zwei isogonalen Punkten H_1 und H_2 auf der Brennpunktkurve. SH_1H_2 ist dann das Bezugsdreieck mit dem Pivot-Punkt im Fernpunkt der Höhe SK^*.

Schlussbemerkung

Interessante Beispiele der Brennpunktkurve ergeben sich für spezielle Vierecke. Für ein ortho-diagonales Viereck ist das letztgenannte Bezugsdreieck das Steiner-Dreieck *[Sch;10-5]*,

und für ein Tangentenviereck ist die Brennpunktkurve eine Strophoide *[Sch;10-6]*.
Abschließend sei angemerkt, dass die obige analytische Behandlung für Parallelogramme versagt, da ein Bezugsdreieck fehlt. Für Parallelogramme erweist sich die gleichseitige Umhyperbel als Brennpunktkurve.



Literatur

[Yiu] Paul Yiu: A Tour of Triangle Geometry. – Department of Mathematical Sciences, Florida Atlantic University, 2004.

[Gib$_1$] J.-P. Ehrmann and B. Gibert: Special Isocubics in the Triangle Plane. – http://pagesperso-orange.fr/bernard.gibert/.

[Gib$_2$] Bernard Gibert: Cubics passing through the Foci of an Inscribed Conic. – April 20, 2007. http.//bernard. gibert.pagesperso-orange.fr/files/inconicfoci.html.

[Fre] Lang Fred: The pedal circle center transformation. – July 9, 2007. http://home.citycable.ch/langfamille/ PagesWEB/PedalCircleCenterTransformation.pdf

[Stä] R. Stärk und D. Baumgartner: Ein merkwürdiger Punkt des Vierecks. – PM 1/44, Jg. 2002, S.19.

[Cun] H. M. Cundy and C. F. Parry: Geometrical Properties of some Euler and Circular Cubics. Part 2. – Journal of Geometry 68, S.58-75, 2000.

[Ehr] J.-P. Ehrmann: Steiner´s Theorems on the Complete Quadrilateral. – Forum Geometricorum, Volume 4 (2004) 35-52.

[Sch] Eckart Schmidt: http://eckartschmidt.de.

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de