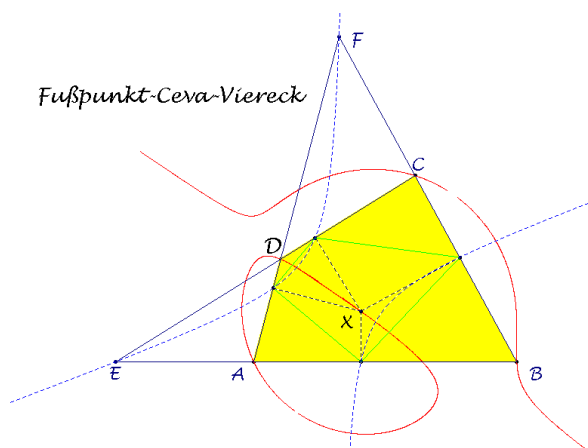


## Fußpunkt-Ceva-Vierecke

Eckart Schmidt

*Es wird der Begriff des Ceva-Dreiecks für Vierecke verallgemeinert [1] und der Frage nachgegangen, welche Fußpunkt-Vierecke Ceva-Vierecke sind. Bei Dreiecken führt diese Fragestellung auf die Darboux-Cubic [2]; für Vierecke ergibt sich ebenfalls eine kubische Kurve, die Gegenstand dieser Ausarbeitung ist. Es werden Punkte dieser Kurve aufgezeigt und die Konstruktionen der Kurve und des Bezugsdreiecks angegeben, zu dem die Kurve eine „pivotal isogonal circular cubic“ ist [2]. – Gearbeitet wird in baryzentrischen Koordinaten.*



### Ceva-Vierecke

Ein Bezugsviereck  $ABCD$  – keine drei Punkte kollinear – sei in baryzentrischen Koordinaten seines Teildreiecks  $ABC$  dargestellt mit dem vierten Punkt

$$D(u : v : w) \text{ mit } u + v + w = 1.$$

Die Wahl normierter Koordinaten für den Punkt  $D$  erleichtert die Darstellung der Ergebnisse, dennoch muss eine unbefriedigende Asymmetrie in Kauf genommen werden.

Vor dem Hintergrund des Satzes von Ceva sei ein Ceva-Viereck wie folgt definiert [1]:

**Definition:** Ein Ceva-Viereck eines Vierecks ist ein einbeschriebenes Viereck, dessen Ecken die Seiten des Bezugsvierecks in Verhältnissen mit Produkt Eins teilen.

Bezeichnet man die Teilverhältnisse, in denen die Viereckseiten  $AB, BC, CD, DA$  geteilt werden, mit  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ( $\alpha\beta\gamma\delta = 1$ ), dann hat das Ceva-Viereck die Ecken:

$$C_a(1:\alpha:0), C_b(0:1:\beta), C_c(u\gamma:v\gamma:1+w\gamma), C_d(u+\delta:v:w).$$

Für Ceva-Vierecke sind die Gegenseitenschnitte

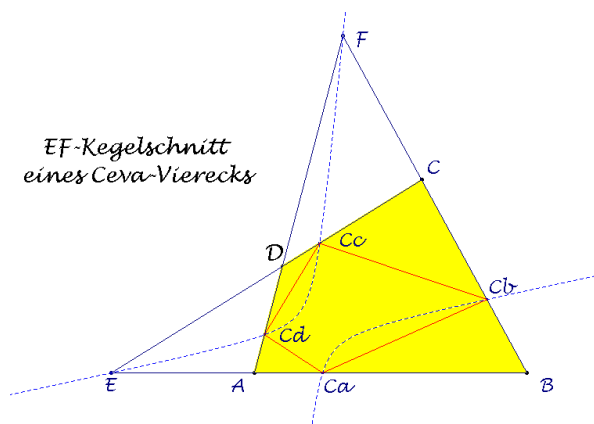
$$E(u:v:0), F(0:v:w)$$

des Bezugsvierecks von besonderer Bedeutung. Sie können in doppelter Belegung als entartetes Ceva-Viereck  $EFEF$  aufgefasst werden, denn sie teilen die Seiten  $AB, BC, CD, DA$  in den Verhältnissen

$$\frac{v}{u}, \frac{w}{v}, -\frac{1}{w}, -u.$$

Die Gegenseiten eines Ceva-Vierecks schneiden sich auf den Diagonalen des Bezugsvierecks; Hintergrund ist der Satz des Menelaos. Bemerkenswerter ist der folgende Satz:

**Satz 1: Ein eckenfremdes einbeschriebenes Viereck ist genau dann ein Ceva-Viereck, wenn seine Ecken mit den Gegenseitenschnitten des Bezugsvierecks auf einem Kegelschnitt liegen.**



Beweis: Die Gegenseitenschnitte  $E, F$  bestimmen mit den Ecken  $C_a, C_b, C_c$  des Ceva-Vierecks einen Kegelschnitt mit der Gleichung:

$$\beta\gamma w(v+u\alpha)xy + \gamma u(w+v\beta)yz + v(1-v\beta\gamma)zx - (\alpha\beta vwx^2 + \beta wuy^2 + uvz^2)\gamma = 0,$$

auf dem auch der vierte Punkt  $C_d$  des Ceva-Vierecks liegt. Dieser Kegelschnitt sei als definierender  $EF$ -Kegelschnitt eines Ceva-Vierecks bezeichnet.

Geht man umgekehrt von einem Kegelschnitt durch die Gegenseitenschnitte  $E$  und  $F$  aus und gibt diesem Kegelschnitt die Gleichung

$$vw^2(v+\mu u)x^2 - u^2w^2y^2 + v\mu^2(v+\kappa w)z^2 - u^2w^2(\kappa yz + \lambda zx + \mu xy) = 0,$$

dann sind die zweiten Schnitte mit den Seiten

$$Q_a(-u:v+\mu u:0), Q_b(0:v+\kappa w:-w),$$

$$Q_c(u : v : \frac{w^2(\lambda u + \kappa v)}{v(v + \kappa w)}) , \quad Q_d(\frac{u^2(\mu v + \lambda w)}{v(v + \mu u)} : v : w) .$$

Diese Punkte teilen die Seiten in den Verhältnissen

$$\frac{v + \mu u}{u} , \quad \frac{w}{v + \kappa w} , \quad \frac{v(v + \kappa w)}{w(\lambda u w - v^2)} , \quad \frac{u(\lambda u w - v^2)}{v(v + \mu u)}$$

mit Produkt Eins. □

Mit Satz 1 lässt sich die Ceva-Eigenschaft eines einbeschriebenen Vierecks schnell entscheiden. Für zahlreiche Beispiele zu Ceva-Vierecken sei auf die Ausarbeitung [1] hingewiesen.

### Fußpunkt-Vierecke

Zu einem Punkt  $X(x : y : z)$  werden die Fußpunkte der Lote auf die Seiten des Vierecks berechnet. Da die Berechnungen sehr aufwändig sind, seien zu einer kürzeren, wenn auch nicht übersichtlicheren Darstellung der Ergebnisse die Conway-Abkürzungen hinzugezogen:

$$2S_A = -a^2 + b^2 + c^2, \quad 2S_B = a^2 - b^2 + c^2, \quad 2S_C = a^2 + b^2 - c^2,$$

sowie  $S^2 = S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A$ .

Damit errechnen sich die Lotfußpunkte zu

$$X_a(c^2 x + S_B z : c^2 y + S_A z : 0) , \quad X_b(0 : S_C x + a^2 y : S_B x + a^2 z),$$

$$X_c(u : v : \frac{(-S_A u + S_B v)(vx - uy) + (a^2 v^2 + b^2 u^2 + 2S_C uv)z}{a^2 vy + b^2 ux + S_C(vx + uy)}),$$

$$X_d(\frac{(S_B v - S_C w)(vz - wy) + (2S_A vw + b^2 w^2 + c^2 v^2)x}{S_A(wy + vz) + b^2 wz + c^2 vy} : v : w).$$

Diese Lotfußpunkte bilden, sofern sie nicht in Ecken des Bezugsvierecks sind, ein Ceva-Viereck, wenn sie nach Satz 1 mit den Gegenseitenschnitten  $E$  und  $F$  auf einem Kegelschnitt liegen. Eine Auswertung der obigen Determinante ergibt als Ortslinie der Punkte  $X$  eine Kurve dritten Grades mit der „unerfreulichen“ Gleichung

$$\begin{aligned} & a^2 y z (u(u+v)(y(c^2 v + S_A w) + z(b^2 w + S_A v)) - w(wy - vz)(a^2 v + S_C u)) \\ & - c^2 x y (w(v+w)(x(b^2 u + S_C v) + y(a^2 v + S_C u)) - u(uy - vx)(c^2 v + S_A w)) \\ & - z x (S_A u v x (b^2 w + c^2 v) + S_B v^2 (S_A u z - S_C w x) - S_C v w z (a^2 v + b^2 u) \\ & \quad + (b^2 u + S_C v)(b^2 w + S_A v)(wx - uz)) \\ & - x y z (a^2 w (u+v)(b^2 w - S_B v) - c^2 u (v+w)(b^2 u - S_B v) \\ & \quad + a^2 v w (S_A v + S_C w) - b^2 u w (S_A u - S_C w) - c^2 u v (S_A u + S_C v)) = 0. \end{aligned}$$

Die Ecken des Bezugsvierecks erfüllen diese Gleichung ebenso wie die absoluten Kreispunkte

$$(S_B + S_C : -S_C \pm i S : -S_C \mp i S) ,$$

so dass die Ortslinie als Zirkularkurve (circular cubic [2]) angesprochen werden kann. Der einzige reelle Fernpunkt der Kurve ist der Fernpunkt der Mittelsenkrechten der Gegenseitenschnitte  $E$  und  $F$ :

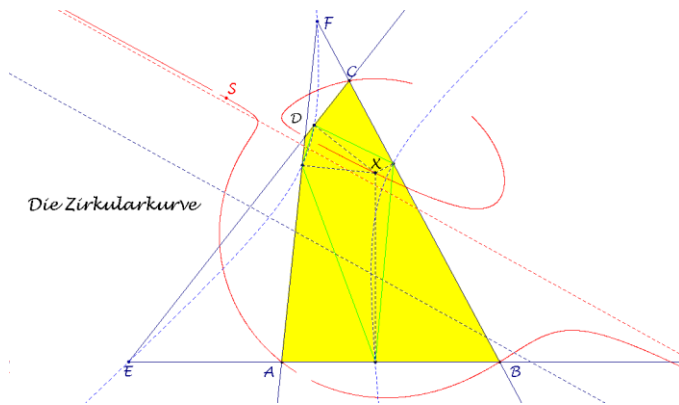
$$H^*(a^2vw - u(S_Bv - S_Cw) : -b^2wu - v(S_Au + S_Cw) : c^2uv - w(S_Bv - S_Au)).$$

Ein weiterer Punkt der Kurve kann unmittelbar angegeben werden. Die Umkreise der Teildreiecke  $ABF$ ,  $BCE$ ,  $CDF$ ,  $DAE$  schneiden sich im Miquel-Punkt  $S$  (auch Steiner-Punkt) des Vierecks  $ABCD$ :

$$S\left(\frac{a^2}{v+w} : \frac{S_Bv - S_Au}{u+v} + \frac{S_Bv - S_Cw}{v+w} : \frac{c^2}{u+v}\right).$$

Das Fußpunkt-Viereck des Miquel-Punktes entartet bekanntlich kollinear [3] und ist somit ein entartetes Ceva-Viereck.

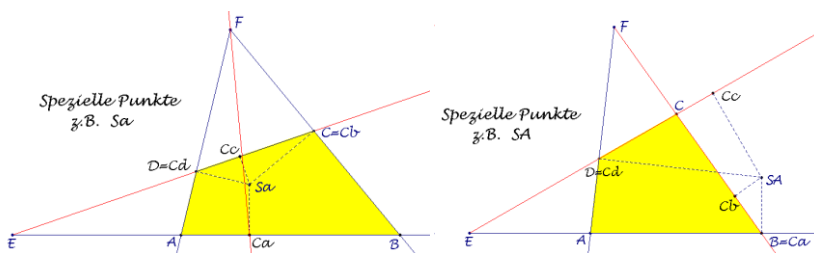
**Satz 2:** Die Ortslinie der Punkte, deren Fußpunktviereck auch Ceva-Viereck ist, ist eine Zirkularkurve, die die Ecken und den Miquel-Punkt des Vierecks enthält und deren Asymptote parallel zur Mittelsenkrechten der Gegenseitenschnitte verläuft.



### Spezielle Punkte der Zirkularkurve

Fallen Fußpunkte der Lote eines Punktes auf die Seiten in Eckpunkte des Vierecks, so entartet der  $EF$ -Kegelschnitt zu einem Geradenpaar. Diese Fälle seien hier eingangs aufgegriffen.

Dazu sei eine Senkrechte zu einer Seite z.B.  $AB$  im Punkte  $A$  mit  $a_A$  bzw. im Punkte  $B$  mit  $a_B$  bezeichnet usw. ... Für folgende Schnitte ergibt sich dann ein Fußpunkt-Viereck, dessen  $EF$ -Kegelschnitt in einem Geradenpaar entartet.



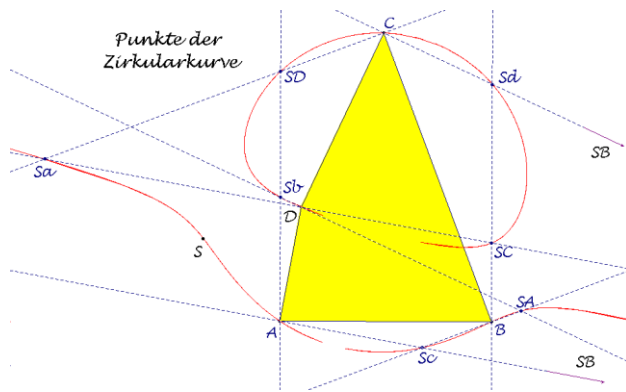
$$a_A \cap c_D = S_b, \quad b_B \cap d_A = S_c, \quad c_C \cap a_B = S_d, \quad d_D \cap b_C = S_a,$$

$$a_A \cap b_C = S_D, \quad b_B \cap c_D = S_A, \quad c_C \cap d_A = S_B, \quad d_D \cap a_B = S_C.$$

Die Punkte  $S_a, S_b, S_c, S_d$  ergeben sich, wenn man zu einer Seite die Senkrechten in den Endpunkten der angrenzenden Seiten zum Schnitt bringt; die Punkte  $S_A, S_B, S_C, S_D$  erhält man zu den Eckpunkten im Schnitt der Senkrechten in den Endpunkten der anliegenden Seiten.

Bzgl. des Miquel-Punktes ergeben sich dann folgende Kollinearitäten, die in 3x3-Rastern zeilen- und spaltenmäßig aufgelistet seien:

$$\begin{bmatrix} S & S_a & S_c \\ S_b & S_D & A \\ S_d & C & S_B \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} S & S_a & S_c \\ S_b & D & S_A \\ S_d & S_C & B \end{bmatrix}$$



Für weitere Zusammenhänge seien auch die Koordinaten angegeben:

$$S_a(a^2 : -S_C : \frac{S^2 w(v+w) + (a^2 v + S_C u)(c^2 v + S_A w)}{b^2 u w + v(S_A u - S_B v + S_C w)}),$$

$$S_b(\frac{S^2 u(u+v) + (a^2 v + S_C u)(c^2 v + S_A w)}{b^2 u w + v(S_A u - S_B v + S_C w)} : -S_A : c^2),$$

$$S_c(a^2 : \frac{S_B(b^2 w + S_A v)}{c^2 v + S_A w} : -S_B), \quad S_d(-S_B : \frac{S_B(b^2 u + S_C v)}{a^2 v + S_C u} : c^2).$$

$$S_A(a^2 : \frac{S^2 u v + (a^2 w + S_B u)(b^2 u + S_C v)}{-a^2 v w + u(S_A u - S_B v - S_C w)} : -S_B),$$

$$S_B(\frac{a^2 v + S_C u}{b^2 u + S_C v} : -1 : \frac{c^2 v + S_A w}{b^2 w + S_A v}),$$

$$S_C(-S_B : \frac{S^2 v w + (c^2 u + S_B w)(b^2 w + S_A v)}{-c^2 u v - w(S_A u + S_B v - S_C w)} : c^2), \quad S_D(\frac{a^2}{S_C} : -1 : \frac{c^2}{S_A}).$$

Als weitere Kurvenpunkte seien die dritten Schnitte mit den Seiten angesprochen:

$$S_a^*(a^2 v + S_C u - \frac{u^2(c^2 v + S_A w)}{w(v+w)} : -b^2 u - S_C v - \frac{u v(c^2 v + S_A w)}{w(v+w)} : 0),$$

$$S_b^*(0 : b^2 w + S_A v + \frac{v w(a^2 v + S_C u)}{u(u+v)} : -c^2 v - S_A w + \frac{w^2(a^2 v + S_C u)}{u(u+v)}),$$

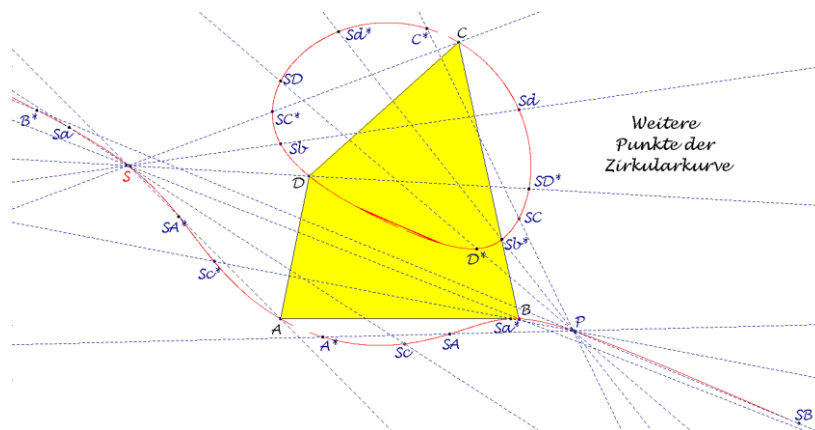
$$S_c^*(u : v : \frac{-c^2 u v(v+w)}{a^2 v w + b^2 w u + S_A u v}), \quad S_d^*(\frac{-a^2 v w(u+v)}{b^2 w u + c^2 u v + S_C v w} : v : w).$$

Dabei zeigt sich, dass  $S_a S_a^*$ ,  $S_b S_b^*$ ,  $S_c S_c^*$ ,  $S_d S_d^*$  Parallelen zur Asymptote sind.

Auf eine Angabe der Koordinaten weiterer Kurvenpunkte sei aus Platzgründen verzichtet.

### „Pivotal isogonal circular cubic“

Interpretiert man die Zirkularkurve als „pivotal isogonal cubic“ bzgl. eines noch zu bestimmenden Bezugsdreiecks, dann muss der Pivot-Punkt im Fernpunkt der Asymptoten liegen und die Verbindungsgeraden isogonaler Punkte sind Parallelen zur Asymptote [2]. In diesem Sinne bezeichne  $X^*$  das isogonale Bild von  $X$ . Betrachtet man z.B. die dritten Schnitte der Geraden  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$ ,  $SD$  mit der Zirkularkurve, so erhält man  $S_A^*$ ,  $S_B^*$ ,  $S_C^*$ ,  $S_D^*$  als isogonale Bilder der Punkte  $S_A$ ,  $S_B$ ,  $S_C$ ,  $S_D$ .



Die Geraden  $S_a^* S_c^*$  und  $S_b^* S_d^*$  schneiden sich auf der Kurve in einem Punkt  $P$ . Kreise durch zwei isogonale Punkte und den Miquel-Punkt  $S$  enthalten immer auch den Punkt  $P$ ; „circular pole“ [4] der Strecke  $SP$  ist also der Fernpunkt  $H^*$ . Da  $S_a^*$  und  $S_c^*$  bzw.  $S_b^*$  und  $S_d^*$  jeweils auf Gegenseiten, d.h. entarteten Umkegelschnitten des Vierecks liegen, kann der Punkt  $P$  als „conic pole“ [4] des Vierecks angesprochen werden. Schneidet also ein Umkegelschnitt des Vierecks die Zirkularkurve in zwei weiteren Punkten, so liegen diese Punkte mit  $P$  kollinear. So liefern die Umkegelschnitte durch jeweils  $S_A$ ,  $S_B$ ,  $S_C$ ,  $S_D$  in einem weiteren Schnitt mit der Zirkularkurve die isogonalen Bilder  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$ ,  $D^*$  der Ecken des Vierecks. Zusammenfassend gilt:

$$\begin{aligned} S, P, H^* & \text{ kollinear,} \\ S, P, X, X^* & \text{ konzyklisch,} \\ S, P, X, X^*, Y, Y^* & \text{ auf einem Kegelschnitt.} \end{aligned}$$

Die in diesem Abschnitt angesprochenen Zusammenhänge können auch mit einer Punktrechnung auf der Zirkularkurve nachvollzogen werden [5]. Bezeichnet man den dritten Schnitt einer Verbindungsgeraden zweier Kurvenpunkte  $X$  und  $Y$  mit der Kurve als Residuum  $res(X, Y)$ , so sei diese Punktrechnung mit Gruppeneigenschaften folgendermaßen umrissen. Dabei sei  $H$  den Hauptpunkt der Zirkularkurve im Schnitt der Kurve mit

der Asymptote; das isogonale Bild  $H^*$  ist der Fernpunkt der Asymptoten und Nullelement der Verknüpfung.

- (1)  $X + Y =_{\text{def}} \text{res}(X, Y)^* \Leftrightarrow \text{res}(X, Y) = (X + Y)^*$
- (2)  $-X = \text{res}(X, H)$
- (3)  $X, Y, Z$  kollinear  $\Leftrightarrow X + Y + Z = H$
- (4)  $X, X^*$  isogonal konjugiert  $\Leftrightarrow X + X^* = H$
- (5)  $T_X$  Tangentialpunkt von  $X$   $\Leftrightarrow T_X = H - 2X$
- (6)  $X, Y$  korrespondierend  $\Leftrightarrow T_X = T_Y \Leftrightarrow 2X = 2Y$
- (7)  $X_1, X_2, X_3, X_4$  konzyklisch  $\Leftrightarrow \sum_i X_i = H$
- (8)  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ , auf einem Kegelschnitt  
 $\Leftrightarrow \sum_i X_i = 2H$ .

Für vier Punkte  $A, B, C, D$  einer Zirkularkurve, deren Miquel-Punkt  $S$  ebenfalls auf der Zirkularkurve liegt, haben die oben angesprochenen Punkte folgende Darstellung. Ansatzpunkt sind die Umkreise der Teildreiseite durch die Punkte  $S_a, S_b, S_c, S_d$ , die diametral zu den Gegenseitenschnitten  $E$  und  $F$  liegen.

$$S = H - A - B - C - D, \quad P = -S,$$

$$S_a = H - S - C - D, \quad S_b = H - S - D - A,$$

$$S_c = H - S - A - B, \quad S_d = H - S - B - C,$$

$$S_A = H - B - C - D, \quad S_B = H - C - D - A,$$

$$S_C = H - D - A - B, \quad S_D = H - A - B - C.$$

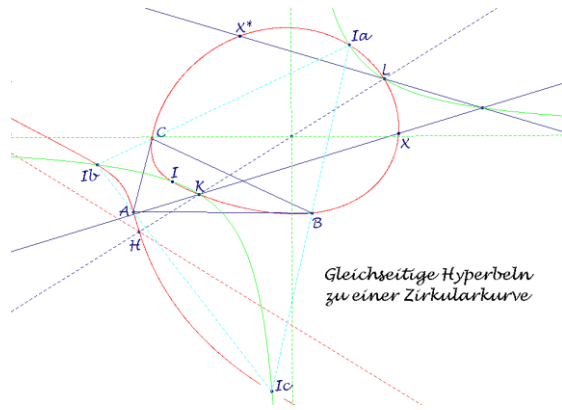
Die Darstellungen der isogonalen Bilder ergeben sich nach (4). Eine unmittelbare Folgerung ist die Kollinearität des Miquel-Punktes  $S$  und des „conic pole“  $P$  mit dem Hauptpunkt  $H$  der Zirkularkurve.

Diese Zusammenhänge gelten unabhängig von der Eigenschaft, dass der Fernpunkt  $H^*$  der Asymptoten auch Fernpunkt der Mittelsenkrechten der Gegenseitenschnitte  $E$  und  $F$  des Vierecks ist; dies lässt sich mit obiger Punktrechnung leider nicht einfangen.

## Das Bezugsdreieck

In diesem Abschnitt soll ein Bezugsdreieck konstruiert werden, zu dem die Zirkularkurve eine „pivotal isogonal circular cubic“ ist.

Es wurden eine Reihe konstruierbarer isogonaler Punktepaare der Zirkularkurve aufgezeigt. Damit ist es möglich, die „polar conic“ [4] des Fernpunktes  $H^*$  zu konstruieren, dies ist eine gleichseitige Hyperbel durch die Mitten isogonaler Punktepaare, wobei eine Asymptote dieser Hyperbel auch die Asymptote der Zirkularkurve ist. Die Hyperbel schneidet die Zirkularkurve in Punkten mit Tangenten parallel zur Asymptote. Diese Punkte sind die In- und Ankreismitten des Bezugsdreiecks.



Die „polar conic“ des Fernpunktes ist eine spezielle gleichseitige Umhyperbel des orthozentrischen Vierecks aus den In- und Ankreismitten des Bezugsdreiecks. Allgemein liegen zu zwei mit dem Hauptpunkt  $H$  kollinearen Kurvenpunkten  $K$  und  $L = res(H, K)$  einer „pivotal isogonal circular cubic“ die Schnitte der Verbindungsgeraden  $KX$  und  $LX^*$  mit zwei isogonalen Kurvenpunkten auf einer gleichseitigen Hyperbel durch die In- und Ankreismitten des Bezugsdreiecks mit Zentrum im Mittelpunkt von  $K$  und  $L$ . Da diese Verallgemeinerung in der Literatur nicht gefunden wurde, sei hier kurz darauf eingegangen: Zu einem Bezugsdreieck  $ABC$  und einem Fernpunkt

$$H^*(\beta - \gamma : \gamma - \alpha : \alpha - \beta), \text{ d.h. } H\left(\frac{a^2}{\beta - \gamma} : \frac{b^2}{\gamma - \alpha} : \frac{c^2}{\alpha - \beta}\right),$$

hat die zugehörige Zirkularkurve die Gleichung

$$a^2 yz(y(\alpha - \beta) - z(\gamma - \alpha)) + b^2 zx(z(\beta - \gamma) - x(\alpha - \beta)) + c^2 xy(x(\gamma - \alpha) - y(\beta - \gamma)) = 0.$$

Zu einem Punkt  $K(k : l : m)$  auf der Zirkularkurve und dem Hauptpunkt  $H$  ist der dritte kollineare Kurvenpunkt

$$L\left(-\frac{k^2}{\beta - \gamma} + \frac{kl}{\gamma - \alpha} + \frac{mk}{\alpha - \beta} : \frac{kl}{\beta - \gamma} - \frac{l^2}{\gamma - \alpha} + \frac{lm}{\alpha - \beta} : \frac{mk}{\beta - \gamma} + \frac{lm}{\gamma - \alpha} - \frac{m^2}{\alpha - \beta}\right).$$

Zu zwei isogonalen Punkten

$$X(x : y : z) \text{ und } X^*(a^2 yz : b^2 zx : c^2 xy)$$

liegen dann die Schnitte der Verbindungsgeraden  $KX$  und  $LX^*$  auf einer gleichseitigen Hyperbel mit der Gleichung

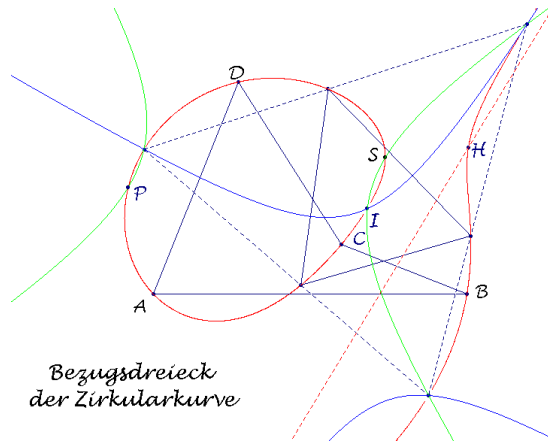
$$(b^2 m^2 - c^2 l^2)x^2 + (c^2 k^2 - a^2 m^2)y^2 + (a^2 l^2 - b^2 k^2)z^2 = 0,$$

auf der die In- und Ankreismitten

$$I(a : b : c), \quad I_a(-a : b : c), \quad I_b(a : -b : c), \quad I_c(a : b : -c)$$

liegen.



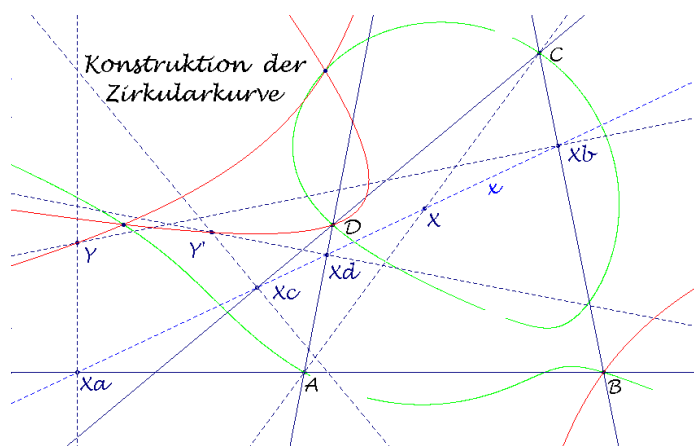


Betrachtet man nun für die hier untersuchte Zirkularkurve die gleichseitige Hyperbel für den Fernpunkt, d.h. die schon angesprochene „polar conic“, und die gleichseitige Hyperbel für den Miquel-Punkt, so liefern die vier Schnitte die In- und Ankreismitten des Bezugsdreiecks, das dann das Anti-Ceva-Dreieck eines dieser Punkte bzgl. des Dreiecks der restlichen drei Punkte ist. Leider konnte kein direkterer geometrischer Bezug zwischen Viereck und Bezugsdreieck der Zirkularkurve gefunden werden.

### Konstruktion der Zirkularkurve

Nach obigen Ausführungen lässt sich die Zirkularkurve nach bekannten Verfahren zu Bezugsdreieck und Fernpunkt konstruieren [2]. Hier sei eine weitere Konstruktionsmöglichkeit aufgezeigt:

Ausgehend von einem Viereck  $ABCD$  sei  $X$  ein variabler Punkt auf der Diagonalen  $AC$  und  $x$  eine Gerade durch  $X$ , die die Seiten in den Punkten  $X_a, X_b, X_c, X_d$  schneidet. Bezeichnet man den Schnitt der Senkrechten in  $X_a$  und  $X_b$  zu den entsprechenden Seiten mit  $Y$  und entsprechend den Schnitt der Senkrechten in  $X_c$  und  $X_d$  zu den Seiten mit  $Y'$ , dann sind die Ortlinien von  $Y$  und  $Y'$  bei variabler Geraden  $x$  durch  $X$  Kegelschnitte, deren Schnitte Punkte der Zirkularkurve sind. Durch Variation des Punktes  $X$  auf der Diagonalen  $AC$  erhält man weitere Punkte der Zirkularkurve.



## Literatur

- [1] E. Schmidt: Ceva-Dreiecke und Ceva-Vierecke. – <http://eckartschmidt.de>.
- [2] B. Gibert: Cubics in the Triangle Plane. – <http://perso.orange.fr/bernard.gibert/>.
- [3] J.-P. Ehrmann: Steiner's Theorems on the Complete Quadrilateral. – Forum Geometricorum, Volume 4 (2004) 35-52.
- [4] H. M. Cundy and C. F. Parry: Some Cubic Curves associated with a Triangle. – Journal of Geometry, Vol. 53 (1995).
- [5] F. Lang: Geometry and Group Structures of some Cubics. – Forum Geometricorum, Vol. 2 (2002) 135-146.

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Schwentinental  
<http://eckartschmidt.de>  
[eckart\\_schmidt@t-online.de](mailto:eckart_schmidt@t-online.de)