Gleichseitige Hyperbeln zu Dreieck und Viereck

Eckart Schmidt

Zu Dreiecken werden Büschel gleichseitiger Umhyperbeln als auch gleichseitiger Berührhyperbeln betrachtet. Gearbeitet wird in baryzentrischen Koordinaten. Abschließend werden gleichseitige Hyperbeln eines Vierecks bzw. Vierseits angesprochen.

Zentren gleichseitiger Umhyperbeln

Fünf Punkte in allgemeiner Lage legen einen Kegelschnitt fest, vier Punkte in allgemeiner Lage bestimmen eine gleichseitige Hyperbel. Für orthozentrische Vierecke ist diese gleichseitige Hyperbel nicht eindeutig bestimmt. Drei nicht kollineare Punkte bestimmen ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln. Zu einer gleichseitigen Umhyperbel eines Dreiecks existiert ein kartesisches Koordinatensystem, in dem sich die Ecken wie folgt darstellen lassen

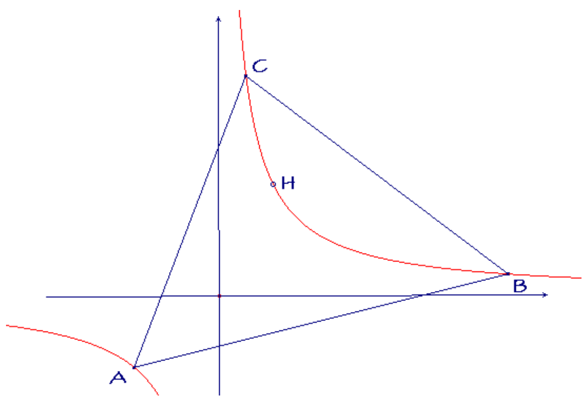
$$A(u;\frac{1}{u})\,,\quad B(v;\frac{1}{v})\,,\quad C(w,\frac{1}{w})\,.$$

Damit errechnet sich z.B. der Höhenschnitt von ABC zu

$$H_{ABC}(-\frac{1}{uvw};-uvw)\,,$$

der somit ebenfalls auf der gleichseitigen Hyperbel liegt.

Mit drei Punkten liegt auch der Höhenschnitt auf einer gleichseitigen Hyperbel.



Mit dieser Vorbemerkung sei das obige kartesische Koordinatensystem verlassen und auf die baryzentrischen Koordinaten des Bezugsdreiecks ABC mit den Seiten a, b, c zurückgegriffen, d.h.

$$A(1:0:0)\,,\quad B(0:1:0)\,,\quad C(0:0:1)$$

mit dem Höhenschnitt $H(S_B S_C : S_C S_A : S_A S_B)$

Dabei sind S_A, S_B, S_C die Conway-Abkürzungen mit

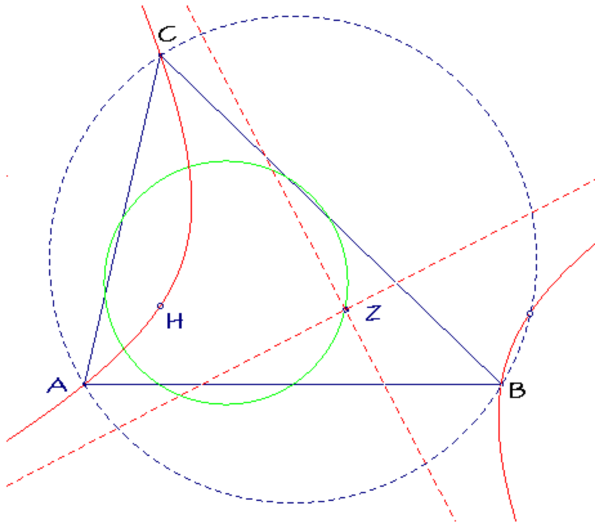
$$2S_A = -a^2 + b^2 + c^2\,, \quad 2S_B = a^2 - b^2 + c^2\,, \quad 2S_C = a^2 + b^2 - c^2\,.$$

Zu jedem vom Höhenschnitt verschiedenen Punkt $P(u:v:w)$ gibt es dann eine eindeutig durch die Punkte *A, B, C, H, P* bestimmte gleichseitige Umhyperbel mit der Gleichung

$$Det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ S_B S_C & S_C S_A & S_A S_B & S_A{}^2 S_B S_C & S_A S_B{}^2 S_C & S_A S_B S_C{}^2 \\ u^2 & v^2 & w^2 & vw & wu & uv \\ x^2 & y^2 & z^2 & yz & zx & xy \end{pmatrix}$$

$$= (S_B v - S_C w)uyz + (S_C w - S_A u)vzx + (S_A u - S_B v)wxy = 0\,.$$

Eine gleichseitige Umhyperbel durch den Schwerpunkt nennt sich Kiepert-Hyperbel, durch die Umkreismitte Jerabek-Hyperbel und durch die Inkreismitte Feuerbach-Hyperbel.
Wählt man einen Fernpunkt $(\kappa : -\kappa - 1 : 1)$, so erhält man eine gute Parameterdarstellung für die Gleichungen gleichseitiger Umhyperbeln eines Dreiecks.



Das Zentrum eines Umkegelschnitts mit der Gleichung

$$\alpha yz + \beta zx + \gamma xy = 0$$

ergibt sich zu

$$(\alpha(-\alpha + \beta + \gamma) : \beta(\alpha - \beta + \gamma) : \gamma(\alpha + \beta - \gamma))\,.$$

Bestimmt man damit aus der obigen Parameterdarstellung die Zentren der gleichseitigen Umhyperbeln und eliminiert den Parameter, so erhält man als Ortslinie der Zentren den Neun-Punkte-Kreis des Bezugsdreiecks mit der Gleichung

$$S_A x^2 + S_B y^2 + S_C z^2 - a^2 yz - b^2 zx - c^2 xy = 0\,.$$

Die Zentren der gleichseitigen Umhyperbeln eines Dreiecks liegen auf dem Neun-Punkte-Kreis.

Als unmittelbare Folgerung ergibt sich:

Spiegelt man den Höhenschnitt am Zentrum, so erhält man den vierten Schnitt der gleichseitigen Umhyperbel mit dem Umkreis des Dreiecks.

Zentren gleichseitiger Berührhyperbeln

Für einen Berührkegelschnitt des Bezugsdreiecks sind die Berührpunkte Ecken eines Ceva-Dreiecks zum sogenannten Brianchon-Punkt des Berührkegelschnitts. Sei $P(u:v:w)$ der Brianchon-Punkt, so lautet die Gleichung des Berührkegelschnitts

$$v^2w^2x^2 + w^2u^2y^2 + u^2v^2z^2 - 2uvw(wxy + vzx + uyz) = 0 .$$

Liegt der Brianchon-Punkt innerhalb / auf / außerhalb der Steiner-Umellipse, so ist der Berührkegelschnitt eine Ellipse / Parabel / Hyperbel. Für den Brianchon-Punkt einer Hyperbel gilt daher

$$uv + vw + wu > 0 .$$

Damit eine gleichseitige Berührhyperbel existiert, muss das Dreieck notwendigerweise stumpfwinklig sein. Weiterhin muss die Gleichung von zwei Fernpunkten zu orthogonalen Geraden – den Asymptoten – erfüllt werden. Sei $(\kappa : -\kappa - 1 : 1)$ der eine Fernpunkt, so ergibt sich für den anderen

$$(-S_B - \kappa S_B - S_C : -\kappa S_A + S_C : \kappa S_A + S_B + \kappa S_B) .$$

Eliminiert man in den beiden resultierenden Gleichungen den Parameter κ, so erhält man für die Brianchon-Punkte gleichseitiger Berührhyperbeln eine Kurve vierter Ordnung mit der Gleichung

$$S_A x^2(y+z)^2 + S_B y^2(z+x)^2 + S_C z^2(x+y)^2 = 0 ,$$

deren Bild bei der isotom konjugierten Abbildung

$$(x:y:z) \quad \to \quad (yz:zx:xy)$$

einen Kreis mit folgender Gleichung ergibt

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2S_A yz + 2S_B zx + 2S_C xy = 0 .$$

Dieser Kreis hat den Mittelpunkt im DeLongchamps-Punkt

$$L(S^2 - 2S_BS_C : S^2 - 2S_CS_A : S^2 - 2S_AS_B) .$$

Das Zentrum Z eines Berührkegelschnitts erhält man als Komplement des isotom konjugierten Partners des Brianchon-Punktes P:

$$Z(u(v+w) : v(w+u) : w(u+v)) .$$

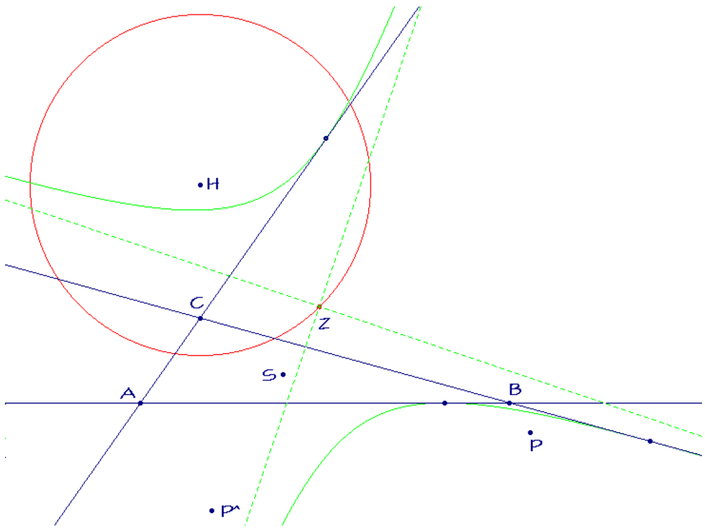
Damit ergibt sich die Ortslinie der Zentren von gleichseitigen Berührhyperbeln aus dem obigen Kreis durch eine Streckung vom Schwerpunkt mit dem Faktor *–1/2*. Dies ist der Polarkreis („polar circle“ [1]) des stumpfwinkligen Bezugsdreiecks, d.h. der Kreis, für den jede Seitengerade die Polare der Gegenecke ist. Der Polarkreis hat die Gleichung

$$S_A x^2 + S_B y^2 + S_C z^2 = 0$$

mit dem Mittelpunkt im Höhenschnitt und einem Radius

$$\frac{\sqrt{-S_A S_B S_c}}{S} \quad \text{(mit} \quad S = 2\Delta\text{)}.$$

Die Zentren der gleichseitigen Berührhyperbeln liegen auf dem Polarkreis des Bezugsdreiecks. Das isotom konjugierte Anti-Komplement des Zentrums ergibt den Brianchon-Punkt.



Geometrie der gleichseitigen Hyperbeln

(1) Gleichseitige Umhyperbeln eines Bezugsdreiecks ABC sind die isogonalen Bilder von Geraden. Das isogonale Bild einer Geraden mit der Gleichung

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

ist ein Umkegelschnitt mit der Gleichung

$$a^2\alpha yz + b^2\beta zx + c^2\gamma xy = 0\,.$$

Gleichseitige Umhyperbeln gehen durch den Höhenschnitt, somit sind ihre isogonalen Bilder Geraden durch die Umkreismitte. Ergänzt sei, dass die Wallace/Simson-Geraden der Umkreis-Schnittpunkte dieser Geraden die Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel sind.

Gleichseitige Umhyperbeln sind die isogonalen Bilder von Geraden durch die Umkreismitte des Bezugsdreiecks. Die Umkreispunkte dieser Geraden liefern mit ihren Wallace/Simson-Geraden die Asymptoten.

So ist z.B. die Jerabek-Hyperbel das isogonale Bild der Euler-Geraden und die Kiepert-Hyperbel das isogonale Bild der Brocard-Achse.

(2) Besonders einfache Gleichungen für Um- und Berührkegelschnitte erhält man, wenn man sie wie folgt erzeugt:

Betrachtet man zu dem Geradenbüschel eines Punktes $P(u:v:w)$ die Tripole, so ist deren Ortslinie ein Umkegelschnitt mit der Gleichung

$$uyz + vzx + wxy = 0\,;$$

dies ist das isogonale Bild der Tripolaren von P^*. Hier sei ergänzt: Für gleichseitige Umhyperbeln muss P ein Punkt der Tripolaren des Höhenschnitts sein mit der Gleichung

$$S_B S_C x + S_C S_A y + S_A S_B z = 0\,.$$

Betrachtet man für ein stumpfwinkliges Bezugsdreieck zu den Punkten einer Geraden g mit der Gleichung

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

die Tripolaren, so sind sie die Einhüllenden eines Berührkegelschnitts mit der Gleichung

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 - 2(\alpha\beta xy + \beta\gamma yz + \gamma\alpha zx) = 0\,.$$

Dabei ist der Tripol der Geraden g der Brianchon-Punkt.
Ergänzt sei hier: Für gleichseitige Berührhyperbeln muss die Gerade g Tangente sein einer Hyperbel mit der Gleichung:

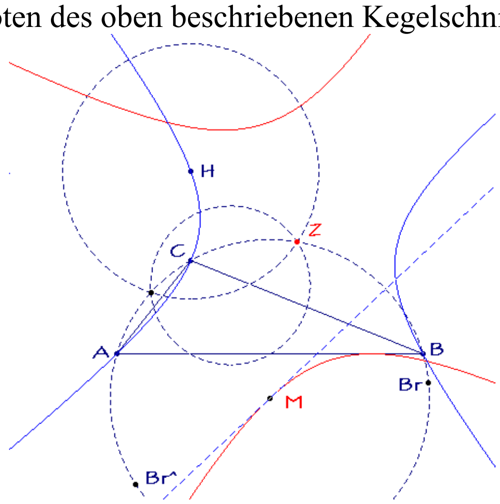
$$S^2(x^2 + y^2 + z^2)$$
$$+ 2(2S_A S_B - S^2)xy + 2(2S_B S_C - S^2)yz + 2(2S_C S_A - S^2)zx = 0$$

Diese Hyperbel hat ihr Zentrum im Lemoine-Punkt und geht durch eine Streckung mit dem Faktor

$$\frac{abc}{\pm\sqrt{-S_A S_B S_C}}$$

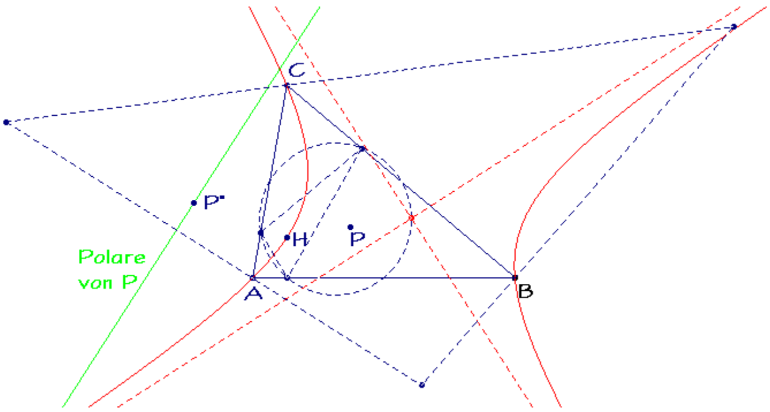
in eine Umhyperbel über, die das isogonale Bild der Tripolaren des Höhenschnitts ist.

(3) Für ein stumpfwinkliges Dreieck gibt es zwei Punkte, die sowohl Zentrum einer gleichseitigen Umhyperbel als auch Zentrum einer gleichseitigen Berührhyperbel sein können. Diese Zentren liegen in den gemeinsamen Schnittpunkten von Neun-Punkte-Kreis, Polarkreis, Umkreis und Tripolaren des Höhenschnitts. Die gleichseitige Berührhyperbel geht dann durch die Umkreismitte und die gleichseitige Umhyperbel ist das isogonale Bild der Tangente in diesem Punkt. Die erzeugende Gerade der gleichseitigen Berührhyperbel ist eine der Asymptoten des oben beschriebenen Kegelschnitts.



Polaren zu gleichseitigen Umhyperbeln

Betrachtet werden das Büschel gleichseitiger Umhyperbeln eines Dreiecks ABC und ein beliebiger Punkt $P(u:v:w)$ der Dreiecksebene. Die Polaren von P bzgl. der gleichseitigen Umhyperbeln schneiden sich in einem Punkt
$P°(u(-uS_A+vS_B+wS_C):v(uS_A-vS_B+wS_C):w(uS_A+vS_B-wS_C))$.
Die Zuordnung $P \rightarrow P°$ ist die Isogonalität bzgl. des Höhenfußpunktdreiecks, d.h. $P°$ ist das Perspektivzentrum des Höhenfußpunktdreiecks und des Anti-Ceva-Dreiecks von P (H-Ceva conjugate of P).



Einige Beispiele dieser Zuordnung; benutzt werden die ETC-Indizes [2]:

P	I	S	M	H	X(5)	X(6)
P°	X(46)	X(193)	X(155)	H	X(52)	X(25)

Angemerkt sei, dass die Pole einer Geraden bzgl. des Büschels der gleichseitigen Umhyperbeln einen Umkegelschnitt des Höhenfußpunktdreiecks ergeben und zwar das bzgl. des Höhenfußpunktdreiecks isogonale Bild der Geraden.

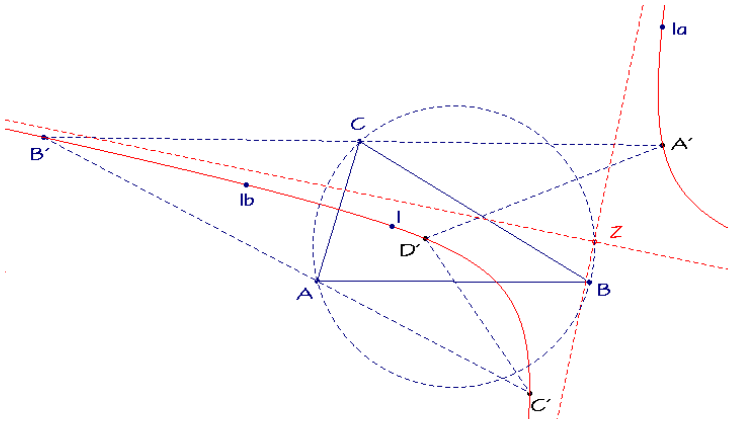
Pole zu gleichseitigen Berührhyperbeln

Für die erzeugende Gerade
$$g: \quad \alpha x+\beta y+\gamma z=0$$
eines Berührkegelschnitts mit der Gleichung
$$\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2-2(\alpha\beta xy+\beta\gamma yz+\gamma\alpha zx)=0$$
müssen die Koeffizienten α, β, γ die Bedingung
$$S_A(\beta+\gamma)^2+S_B(\gamma+\alpha)^2+S_C(\alpha+\beta)^2=0$$
erfüllen, damit es sich um eine gleichseitige Berührhyperbel handelt.
Zu einer fest vorgegebenen Geraden
$$p: \quad \kappa x+\lambda y+\mu z=0$$
ergeben die Pole

$$(\beta\mu+\gamma\lambda:\gamma\kappa+\alpha\mu:\alpha\lambda+\beta\kappa)$$
bzgl. des Büschels gleichseitiger Berührhyperbeln nach Elimination von α, β, γ die Gleichung eines Kegelschnitts:
$$\begin{aligned}
&x^2\kappa^2(a^2\kappa^2+b^2\lambda^2+c^2\mu^2-2(-S_A\lambda\mu+S_B\mu\kappa+S_C\kappa\lambda)\\
&+y^2\lambda^2(a^2\kappa^2+b^2\lambda^2+c^2\mu^2-2(S_A\lambda\mu-S_B\mu\kappa+S_C\kappa\lambda)\\
&+z^2\mu^2(a^2\kappa^2+b^2\lambda^2+c^2\mu^2-2(S_A\lambda\mu+S_B\mu\kappa-S_C\kappa\lambda)\\
&-2xy\kappa\lambda(a^2\kappa^2+b^2\lambda^2-c^2\mu^2-2S_C\kappa\lambda)\\
&-2yz\lambda\mu(-a^2\kappa^2+b^2\lambda^2+c^2\mu^2-2S_A\lambda\mu)\\
&-2zx\mu\kappa(a^2\kappa^2-b^2\lambda^2+c^2\mu^2-2S_B\mu\kappa)=0
\end{aligned}$$
Dieser entartet linear für Geraden durch eine Ecke des Bezugsdreiecks; dabei teilen Gerade und Ortslinie durch eine Ecke die Gegenseite harmonisch. Die Pole der Winkelhalbierenden eines Innenwinkels liegen auf der Winkelhalbierenden des zugehörigen Außenwinkels; die Pole einer Seitenhalbierenden liegen auf der zugehörigen Seitenparallelen und umgekehrt.
Ist die Gerade eine Sekante/Tangente/Passante des Polarkreises, so ist dieser Kegelschnitt eine Hyperbel/Parabel/Ellipse.
Ist die Gerade eine Mittelparallele z.B. zu *AB*, so ergibt sich der an der Seitenmitte gespiegelte Polarkreis mit der Gleichung
$$S_A(y+z)^2+S_B(z+x)^2+S_Cz^2=0\,.$$

Gleichseitige Hyperbeln durch vier Punkte

Betrachtet man zu einem Bezugsdreieck *ABC* einen Punkt der Dreiecksebene mit seinem Anti-Ceva-Dreieck, so erhält man vier Punkte, die hier als Anti-Ceva-Punkte angesprochen seien. Eine mögliche Koordinatendarstellung ist
$$A'(-u:v:w)\,,\quad B'(u:-v:w)\,,\quad C'(u:v:-w)\,,\quad D'(u:v:w)\,.$$
Die Anti-Ceva-Punkte legen eine gleichseitige Hyperbel fest mit der Gleichung
$$(b^2w^2-c^2v^2)x^2+(c^2u^2-a^2w^2)y^2+(a^2v^2-b^2u^2)z^2=0\,.$$
Das Zentrum dieser gleichseitigen Hyperbel
$$Z\left(\frac{1}{b^2w^2-c^2v^2}:\frac{1}{c^2u^2-a^2w^2}:\frac{1}{a^2v^2-b^2u^2}\right)$$
liegt auf dem Umkreis des Bezugsdreiecks.
Aus der Gleichung dieser gleichseitigen Hyperbel ist ersichtlich, dass mit jedem Punkt auch die Anti-Ceva-Punkte auf der Hyperbel liegen. Da insbesondere die Inkreismitte ein Punkt der Hyperbel ist, liegen auch die Ankreismitten auf der Hyperbel. Für das Ankreismittendreieck ist der Umkreis des Bezugsdreiecks der Neun-Punkte-Kreis, so dass das Büschel der gleichseitigen Hyperbeln zu Anti-Ceva-Punkten das Büschel der Umhyperbeln des Ankreismittendreiecks ist. Das Bezugsdreieck liegt dabei selbstpolar zu jeder dieser gleichseitigen Hyperbeln.



Da vier Punkte in allgemeiner Lage, d.h. nicht auf zwei zueinander senkrechten Geraden, immer Anti-Ceva-Punkte ihres Diagonaldreiecks sind, enthält dieser Abschnitt entsprechende Aussagen über die gleichseitige Umhyperbel eines Vierecks.

Vier Punkte in allgemeiner Lage haben eine eindeutige gleichseitige Umhyperbel, die die Inkreismitte und die Ankreismitten des Diagonaldreiecks enthält und deren Zentrum auf dem Umkreis des Diagonaldreiecks liegt.

Gleichseitige Berührhyperbeln zu vier Geraden

In diesem Abschnitt seien zu einem erzeugenden Punkt $P(u:v:w)$ und seinen Anti-Ceva-Punkten die Tripolaren angesprochen mit den Gleichungen

$$g_a: \quad -vwx + wuy + uvz = 0, \quad g_b: \quad vwx - wuy + uvz = 0$$

$$g_c: \quad vwx - wuy + uvz = 0, \quad g_d: \quad vwx + wuy + uvz = 0.$$

Diese bilden ein vollständiges Vierseit, dessen Diagonalendreieck ABC ist. Das Diagonalendreieck als Dreiseit der Diagonalen ist nicht mit dem Diagonaldreieck zu verwechseln. Die Gegeneckenpaare des Vierseits sind dann

$$A_{1,2}(0:\pm v:w), \quad B_{1,2}(u:0:\pm w), \quad C_{1,2}(\pm u:v:0).$$

Die Gegeneckenmitten liegen auf der sogenannten Newton-Geraden [3] mit der Gleichung

$$g_N: \quad v^2w^2x + w^2u^2y + u^2v^2z = 0,$$

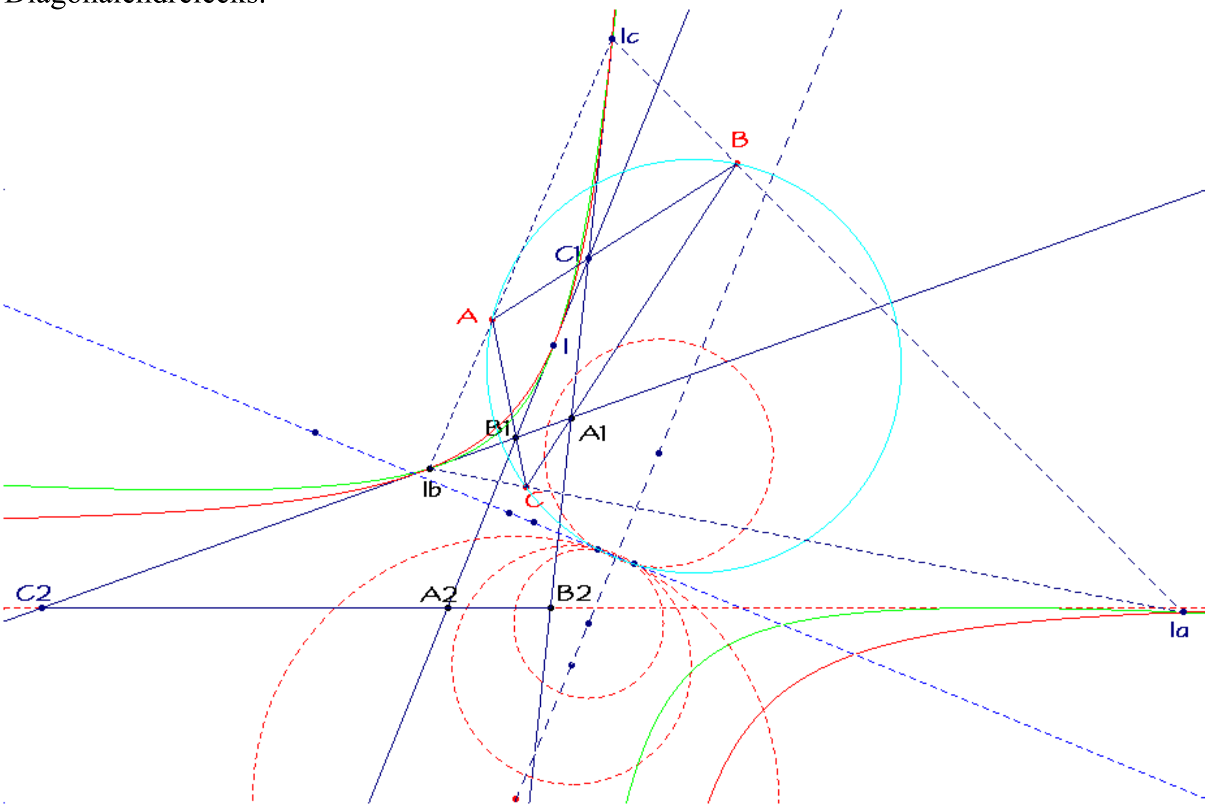
und die Polarkreismitten (Höhenschnitte) der Teildreiseite liegen ebenfalls auf einer Geraden („orthocentric line“ [3]) senkrecht zur Newton-Geraden:

$$g_H: \quad ((b^2-c^2)\alpha^2 - b^2\beta^2 + c^2\gamma^2)x + (a^2\alpha^2 + (c^2-a^2)\beta^2 - c^2\gamma^2)y$$
$$+ (-a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + (a^2-b^2)\gamma^2)z = 0$$

Die vier Polarkreise der Teildreiseite haben – wenn sie sich überhaupt schneiden – ein oder zwei gemeinsame Punkte:

$$K_{1,2}(u^2(a^2v^2w^2 - b^2w^2u^2 + c^2u^2v^2 \pm W):$$
$$v^2(-a^2v^2w^2 + b^2w^2u^2 + c^2u^2v^2 \mp W): -2c^2u^2v^2w^2)$$

mit $W=\sqrt{avw+bwu+cuv}\sqrt{-avw+bwu+cuv}$
$$\sqrt{avw-bwu+cuv}\sqrt{avw+bwu-cuv}\,.$$
Diese Schnitte der Polarkreise liegen in den gemeinsamen Punkten der Newton-Geraden und des Umkreises des Diagonalendreiecks.



Ein vollständiges Vierseit hat entweder keine/eine/zwei gleichseitige Berührhyperbeln, je nachdem die Newton-Gerade eine Passante/Tangente/Sekante des Umkreises des Diagonalendreiecks ist.

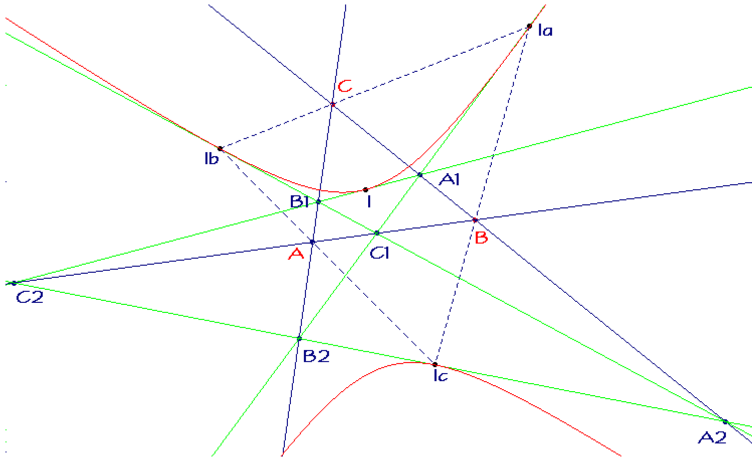
Gibt es zwei gleichseitige Berührhyperbeln, so liegen deren Schnittpunkte in der Inkreismitte und den Ankreismitten des Diagonalendreiecks; damit sind es gleichseitige Umhyperbeln des Ankreismittendreiecks.

Im eindeutigen Fall einer gleichseitigen Berührhyperbel ist $W=0$
$$\text{z.B. } avw+bwu+cuv=0\,,$$
dann ist die Tripolare des erzeugenden Punktes $P(u:v:w)$ eine Tangente in der Inkreismitte.

Ein vollständiges Vierseit hat eine eindeutige gleichseitige Berührhyperbel, wenn eine der Geraden durch die Inkreismitte des Diagonalendreiecks geht.

In diesem Fall erhält die gleichseitige Berührhyperbel des Vierseits die einfache Gleichung

$$bcvwx^2 + cawuy^2 + abuvz^2 = 0\,.$$



Das Zentrum dieser gleichseitigen Berührhyperbel liegt auf dem Umkreis und der Steiner-Punkt des Vierseits auf dem Neun-Punkte-Kreis des Diagonalendreiecks.

Literatur

[1] E. W. Weisstein: “Polar Circle“. - http://mathworld.wolfram.com/PolarCircle.html

[2] C. Kimberling: Encyclopedia of Triangle Centers. – http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.

[3] J.P. Ehrmann: Steiner´s Theorems on the Complete Quadrilateral. – Forum Geometricorum, Volume 4 (2004), 35.

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de