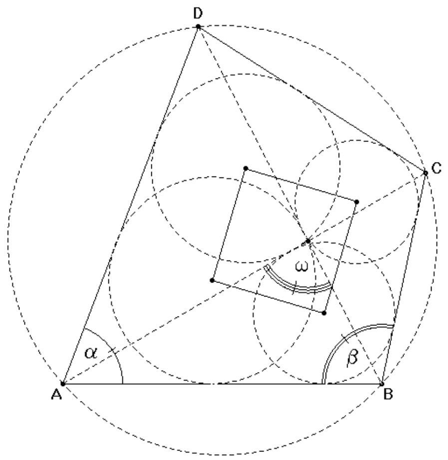
Sehnenvierecke mit Inkreismittenquadrat

Eckart Schmidt

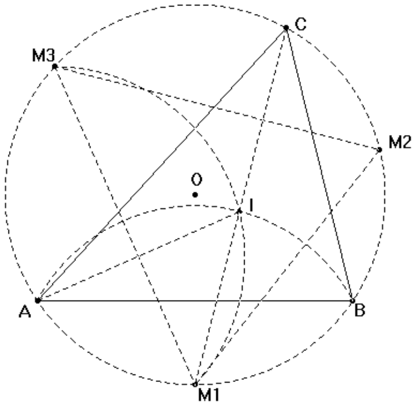


1. Vorbemerkung

Betrachtet werden konvexe Sehnenvierecke ABCD mit den Inkreismitten I_1, I_2, I_3, I_4 der Teildreiecke ABC, BCD, CDA, DAB. Es ist bekannt, dass diese Inkreismitten ein Rechteck bilden [1], hier als IKM-Rechteck angesprochen. Diese IKM-Rechtecke werden näher untersucht; insbesondere wird der Frage nachgegangen, für welche Sehnenvierecke das IKM-Rechteck ein Quadrat ist. Diese Spezialisierung wird abschließend in eine Übersicht für Sehnenvierecke eingebaut.

2. Inkreismitten

Es seien vorweg einige elementargeometrische Eigenschaften der Inkreismitte I eines Dreiecks ABC angesprochen, die im folgenden benutzt werden. Dazu werden auch die Bogenmitten M_1, M_2, M_3 der Bögen auf dem Umkreis herangezogen, die keine Ecke des Dreiecks enthalten.

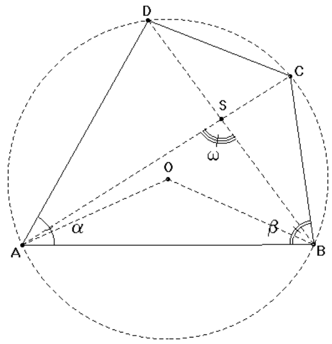


(1) Die Winkelhalbierenden aller Umfangswinkel über einer Sehne gehen durch die Bogenmitte auf dem Umkreis unter der Sehne.

(2) Spiegelt man eine Ecke an der zugehörigen Bogenmittensehne, so erhält man die Inkreismitte als Punkt des an der Bogenmittensehne gespiegelten Umkreises.

(3) Ein Kreis um eine Bogenmitte durch die zugehörigen Ecken des Dreiecks geht auch durch die Inkreismitte.

3. Sehnenvierecke



Konvexe Sehnenvierecke in einem vorgegebenen Kreis seien hier winkelmäßig beschrieben. Für ein Sehnenviereck *ABCD* mit den Innenwinkeln α, β und dem Diagonalenwinkel $\omega = \angle ASB$ seien die Bezeichnungen so gewählt, dass $\alpha \le \beta \le 90°$ ist. Dann ergibt sich für den Mittelpunktswinkel

$$\angle AOB = 180° + \omega - \alpha - \beta$$

das Doppelte der Umfangswinkel $\angle ACB = \angle ADB$.

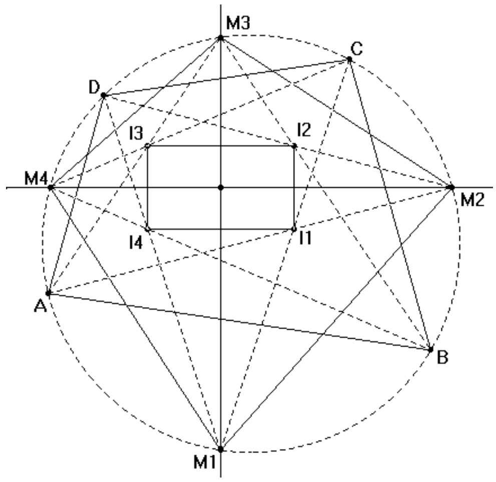
Für die Seitenlängen gilt dann

$$a = \overline{AB} = 2r\cos\frac{\alpha+\beta-\omega}{2}\ ,\ b = \overline{BC} = 2r\cos\frac{-\alpha+\beta+\omega}{2}\ ,$$
$$c = \overline{CD} = -2r\cos\frac{\alpha+\beta+\omega}{2}\ ,\ d = \overline{DA} = 2r\cos\frac{\alpha-\beta+\omega}{2}\ ;$$

und für die Diagonalenlängen erhält man

$$e = \overline{AC} = 2r\sin\beta\ ,\ f = \overline{BD} = 2r\sin\alpha\ .$$

4. IKM-Rechtecke



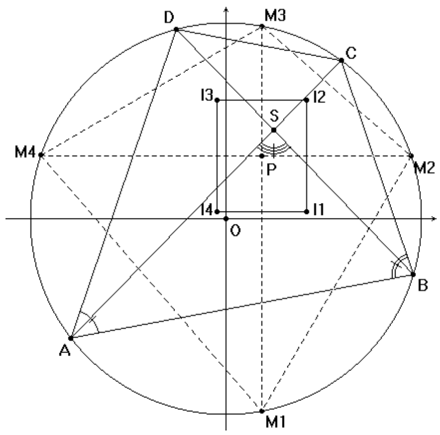
Zu einem konvexen Sehnenviereck *ABCD* wird ergänzend das Bogenmittenviereck $M_1M_2M_3M_4$ betrachtet, dessen Diagonalen senkrecht zueinander sind. Begründung: Zeichnet man in M_1, M_2, M_3, M_4 die Tangenten an den Umkreis, so erhält man ein Tangentenviereck, winkelgleich zum Ausgangsviereck und somit Sehnen-Tangenten-Viereck, in dem bekanntlich die Berührdiagonalen M_1M_3 und M_2M_4 senkrecht zueinander sind.
Die Verbindungsgeraden AM_2 und CM_1 sind Winkelhalbierende im Teildreieck *ABC* (1); ihr Schnittpunkt ist die Inkreismitte I_1. Entsprechend erhält man die anderen Inkreismitten.

Satz 1: In einem konvexen Sehnenviereck bilden die Inkreismitten der Teildreiecke ein Rechteck, symmetrisch zu den Diagonalen des Bogenmittenvierecks [1].

Beweis: Ein Kreis um M_1 durch A und B geht auch durch I_1 und I_4 (3), deren Mittelsenkrechte die Winkelhalbierende von $\angle I_1M_1I_4 = \angle CM_1D$ ist und somit auch durch M_3 geht (1); d.h. I_4I_1 ist senkrecht und symmetrisch zu M_1M_3. Entsprechend folgen die weiteren Orthogonalitäten und Symmetrien.

5. Seitenlängen des IKM-Rechtecks

Zur Berechnung der Seitenlängen des IKM-Rechtecks bietet sich ein Koordinatensystem an, das sich an der Orthogonalität der Diagonalen des Bogenmittenvierecks orientiert.



Wählt man ein kartesisches Koordinatensystem, dessen Ursprung im Umkreismittelpunkt *O* liegt und dessen Achsen parallel zu den Bogenmittendiagonalen M_4M_2 und M_1M_3 verlaufen, so erhält man für Punkte auf dem Einheitskreis folgende Koordinatenpaare:

$$M_1(-\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\,;-\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}))\,,\ \ M_2(\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\,;\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}))\,,$$

$$M_3(-\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\,;\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}))\,;\ \ M_4(\sin(-\frac{\alpha+\beta}{2})\,;\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}))\,;$$

$$A(-\cos(\beta-\frac{\omega}{2})\,;-\sin(\beta-\frac{\omega}{2})),\ \ \ B(\cos(\alpha-\frac{\omega}{2})\,;-\sin(\alpha-\frac{\omega}{2})),$$

$C(-\cos(\beta+\frac{\omega}{2})\,;\sin(\beta+\frac{\omega}{2})),\qquad D(\cos(\alpha+\frac{\omega}{2})\,;\sin(\alpha+\frac{\omega}{2}))$.

Der Schnittpunkt P der Bogenmittendiagonalen errechnet sich

$$\text{zu}\quad P(-\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\,;\cos\frac{\alpha+\beta}{2})$$

und für die Inkreismitte $I_1 = AM_2 \cap CM_1$ erhält man

$$I_1(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\omega}{2}\,;-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\omega}{2}).$$

Hieraus ergeben sich die Seitenlängen des IKM-Rechtecks allgemein zu

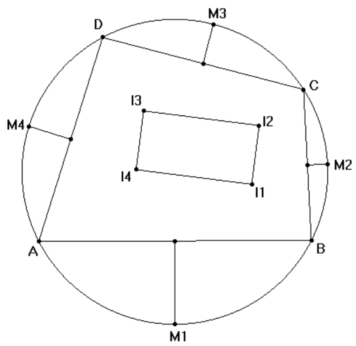
$$\overline{I_1I_2}=\overline{I_3I_4}=2r(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\omega}{2})$$

$$\text{und}\ \overline{I_2I_3}=\overline{I_4I_1}=2r(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\omega}{2})\quad .$$

Diese Inkreismittenabstände lassen folgende geometrische Interpretation zu:

Satz 2: Die halben Seitenlängen des IKM-Rechtecks eines konvexen Sehnenvierecks sind jeweils das geometrische Mittel der Bogenmittenabstände gegenüberliegender Seiten:

$$r(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\omega}{2})\ \textbf{und}\ r(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\omega}{2})\,\textbf{.}$$



Beweis: Bezeichnet man den Abstand einer Bogenmitte von der zugehörigen Seite als Bogenmittenabstand der betreffenden Seite, so errechnet sich dieser Bogenmittenabstand

$$\text{für die Seite a zu}\qquad r\left(1-\sin\frac{\alpha+\beta-\omega}{2}\right)$$

$$\text{und für die Gegenseite c zu}\ r\left(1-\sin\frac{\alpha+\beta+\omega}{2}\right)$$

$$\text{mit dem geometrischen Mittel}\quad r(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\omega}{2})$$

$$\text{als halbem Inkreismittenabstand}\ \overline{I_2I_3}=\overline{I_4I_1}\ .$$

6. Sehnenvierecke mit IKM-Quadrat

Für Sehnenvierecke, deren IKM-Rechteck ein Quadrat ist, müssen die Produkte der Bogenmittenabstände gegenüberliegender Seiten übereinstimmen. Damit gilt für die kennzeichnenden Winkel

$$\sin\frac{90°-\omega}{2}=\sqrt{2}\sin\frac{\alpha-90°}{2}\cos\frac{\beta+90°}{2}.$$

Hieraus lässt sich ablesen, dass man für spitze Winkel α und β einen stumpfen Diagonalenwinkel erhält. Eine übersichtlichere Berechnungsgrundlage für den Diagonalenwinkel und weitere leicht nachzurechnende Eigenschaften enthält der folgende Satz.

Satz 3: Sehnenvierecke mit IKM-Quadrat sind dadurch gekennzeichnet, dass die Produkte der Bogenmittenabstände gegenüberliegender Seiten übereinstimmen.
Zusammenfassend gilt in Sehnenvierecken mit IKM-Quadrat:

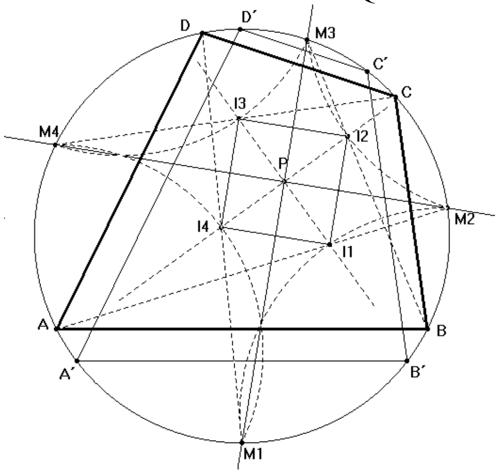
(a) für die Winkel
$1-\sin\omega=(1-\sin\alpha)(1-\sin\beta)$ **mit** $\alpha\le\beta\le 90°\le\omega$ **;**

(b) für die Seiten:
$(2r+a)(2r+c)=(2r+b)(2r+d)$ **;**

(c) für die Diagonalen:
$(2r-e)(2r-f)=2r(2r-g)$ **,**
wobei g die sogenannte dritte Diagonale ist [2].

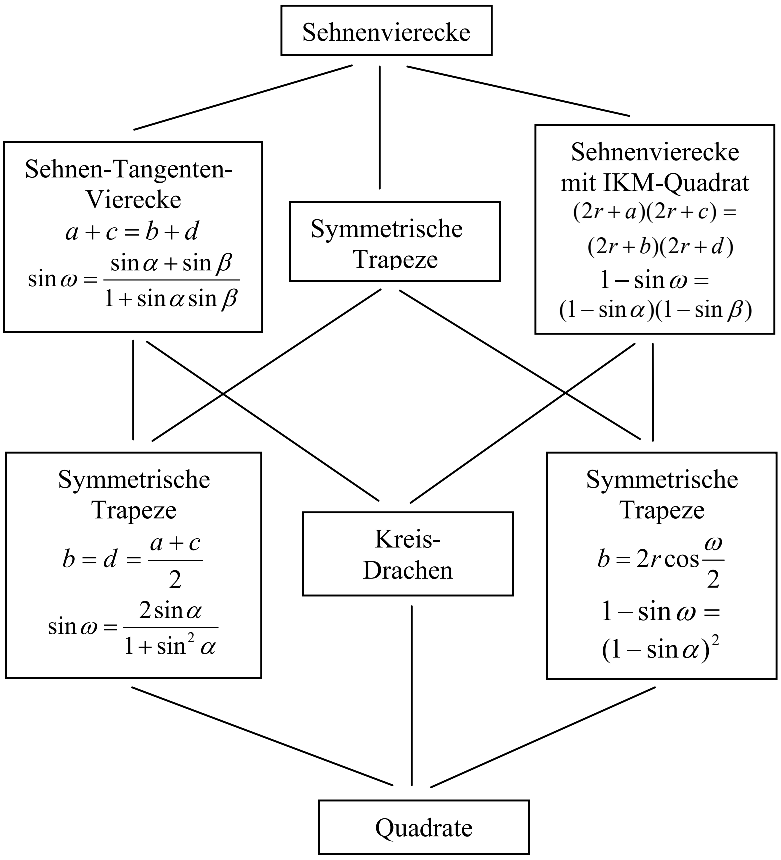
7. Eine Konstruktionsmöglichkeit

Eine geometrisch naheliegende Konstruktion für ein Sehnenviereck mit IKM-Quadrat zu vorgegebenen Winkeln α und β ergibt sich unmittelbar aus den Überlegungen in 4.
Man zeichne ein Beispiel A´B´C´D´ eines konvexen Sehnenvierecks mit den Winkeln α und β; dazu das Bogenmittenviereck $M_1M_2M_3M_4$. Spiegelt man den Umkreis an der Sehne M_1M_2, so erhält man im Schnitt mit der Winkelhalbierenden des rechten Winkels $\angle M_1PM_2$ die Inkreismitte I_1 (2) und entsprechend die anderen Inkreismitten des IKM-Quadrats. Die Schnittpunkte der Geraden I_1M_2, I_2M_3, I_3M_4, I_4M_1 mit dem Umkreis ergeben dann die Ecken *A, B, C, D* des gesuchten Sehnenvierecks mit IKM-Quadrat.



8. Baum der Sehnenvierecke

Betrachtet man als spezielle Sehnenvierecke nicht nur die symmetrischen Trapeze und Sehnen-Tangenten-Vierecke, sondern auch Sehnenvierecke mit IKM-Quadrat, so lässt sich die folgende Übersicht entwickeln.



Die symmetrischen Trapeze unter den Tangentenvierecken sind diejenigen, in denen die Schenkel und die Mittellinie gleichlang sind. Sehnen-Tangenten-Vierecke mit IKM-Quadrat sind offensichtlich Kreisdrachen. Symmetrische Trapeze mit Inkreismittenquadrat sind dagegen nicht so leicht geometrisch anzusprechen: Gibt man den Schnittwinkel ω der Diagonalen vor, so erhält man für die Längen

der Schenkel $b = d = 2r\cos\dfrac{\omega}{2}$,

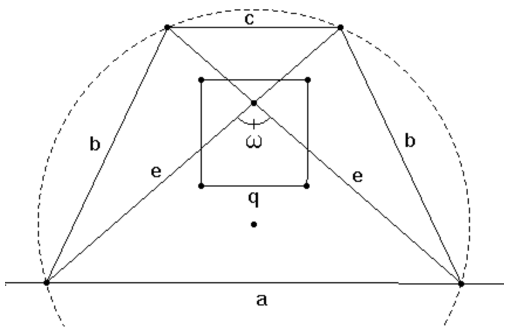
der Diagonalen $e = \sqrt{2r+b}(\sqrt{2r+b} - \sqrt{2r-b}) = f$

und der parallelen Seiten $a, c = \dfrac{e}{2r}\sqrt{4r^2-b^2} \pm \dfrac{b}{2r}\sqrt{4r^2-e^2}$.

Für die Seitenlänge des IKM-Quadrats gilt dann

$$2r - q = \sqrt{4r^2-b^2} \ ,$$

d.h. $e = b + q$, wobei q doppelter Bogenmittenabstand des Schenkels b ist.



Die Übersicht zeigt abschließend, dass sich Sehnenvierecke mit IKM-Quadrat als eine geometrisch aufschlussreiche Spezialisierung erweisen.

Literatur:

[1] U. Ansorge: Eine interessante Eigenschaft für Sehnenvierecke. - alpha 10/1995, S.14.

[2] W. Dörband: Das konvexe Sehnenviereck als Pendant zum Dreieck. – PM 3/34. Jg. 1992

Eckart Schmidt - Hasenberg 27 - D 24223 Raisdorf
http://eckart_schmidt.bei.t-online.de
eckart_schmidt@t-online.de