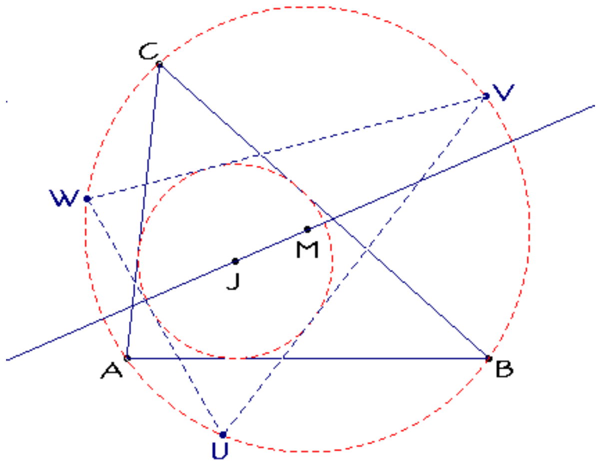
Zwischen In- und Umkreis

Eckart Schmidt

Dreiecke mit gleichem In- und Umkreis sind eingangs Gegenstand dieser Ausarbeitung. Perspektive Zwischendreiecke erhält man für die Büschelpunkte von In- und Umkreis. Die Simson-Geraden eines Umfangspunktes bzgl. der Zwischendreiecke schneiden sich in einem Punkt; die Gesamtheit dieser Punkte liefert einen Kegelschnitt. Ergänzend werden umkreisgleiche Dreiecke mit gleichem Feuerbach-Kreis bzw. Brocard-Kreis untersucht. – Gearbeitet wird in kartesischen und baryzentrischen Koordinaten.



Inkreis und Umkreis

Zwei Kreise mit den Radien ρ und r sind nur dann In- und Umkreis eines Dreiecks, wenn der Abstand d ihrer Mittelpunkte J und M der bekannten Euler-Gleichung genügt:

$$d^2 = r(r - 2\rho).$$

Dann kann aber jeder Punkt U des Umkreises Ecke eines Dreiecks mit dem vorgegebenen Um- und Inkreis sein. Diese Dreiecke UVW seien als Zwischendreiecke angesprochen.

Wir wählen hier erst einmal eines dieser Dreiecke mit den Seitenlängen a, b, c als Bezugsdreieck ABC für baryzentrische Koordinaten. Benutzt werden dabei die Conway-Abkürzungen

$$2S_A = -a^2 + b^2 + c^2, \quad 2S_B = a^2 - b^2 + c^2, \quad 2S_C = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\text{sowie} \quad S = \sqrt{S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A} = 2\Delta\,.$$

Dann ergibt sich für den Inkreis:

$$\text{Inkreismitte} \quad J(a:b:c)\,, \quad \text{Inkreisradius} \quad \rho = \frac{S}{a+b+c}\,,$$

und für den Umkreis erhält man:

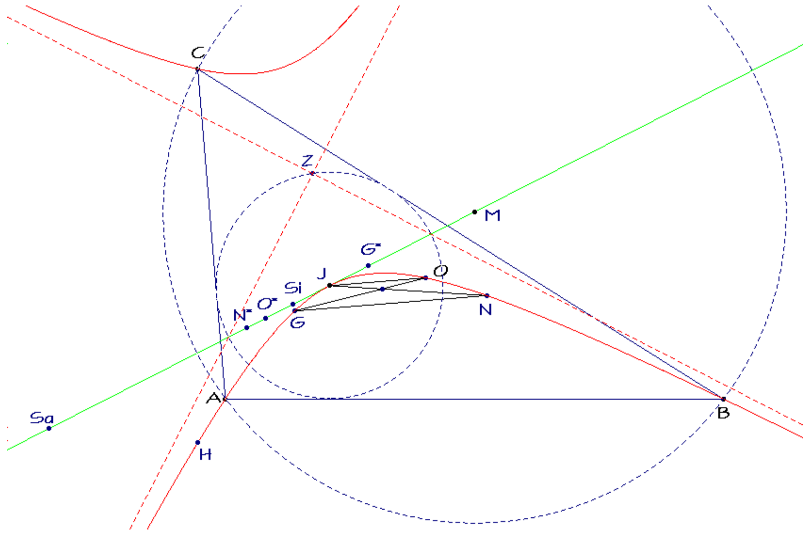
Umkreismitte $M(a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C)$, Umkreisradius $r = \dfrac{abc}{2S}$.

In- und Umkreis sind Kreise eines hyperbolischen Kreisbüschels mit den Büschelpunkten

$$\begin{aligned} S_{i,a}(&a(a-b+c)[(-a+b+c)(a+b-c)(a^2+c^2-ab-bc) \\ &\qquad \pm 2(c-a)\sqrt{2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2}\; S] \\ &: b(-a+b+c)[(a+b-c)(a-b+c)(b^2+c^2-ca-ab) \\ &\qquad \pm 2(c-b)\sqrt{2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2}\; S] \\ &: -2c^2(-a+b+c)(a-b+c)(a^2+b^2-bc-ca)) \end{aligned}$$

auf der Verbindungsgeraden von In- und Umkreismitte. Jeder Kreis durch diese Büschelpunkte schneidet In- und Umkreis senkrecht, so dass S_i und S_a durch Spiegelungen an In- und Umkreis aufeinander abgebildet werden.

Die Verbindungsgerade *JM*



Hier sei einleitend die Feuerbach-Hyperbel angesprochen, eine gleichseitige Umhyperbel des Dreiecks, die daher den Höhenschnitt H enthält. Sie geht durch einige der gängigsten merkwürdigen Punkte des Dreiecks wie die Inkreismitte $J=X(1)$, den Nagel-Punkt $N = X(8)$, den Gergonne-Punkt $G = X(7)$ und den Mittenpunkt $O = X(9)$ [1]. Ihr Zentrum liegt auf dem Inkreis im Feuerbach-Punkt $Z = X(11)$. Das isogonale Bild der Feuerbach-Hyperbel ist die Gerade *JM*. Diese Gerade enthält somit neben $J^* = J$ und $H^* = M$ die Punkte

$$N^*(a^2(s-b)(s-c) : b^2(s-c)(s-a) : c^2(s-a)(s-b)) = X(56),$$

$$G^*(a^2(s-a) : b^2(s-b) : c^2(s-c)) = X(55),$$

$$O^*(a(s-b)(s-c) : b(s-c)(s-a) : c(s-a)(s-b)) = X(57),$$

wobei s den halben Umfang bezeichnet. Weiterhin sind S_i und S_a Punkte dieser Geraden.

Die Abstände dieser Punkte von der Umkreismitte M lassen sich durch die Radien ρ und r von In- und Umkreis (bzw. den Mittenabstand $d=\sqrt{r(r-2\rho)}$) ausdrücken:

$$MJ=d\,,\quad MN^*=\frac{rd}{r-\rho}\,,\quad MG^*=\frac{rd}{r+\rho}\,,\quad MO^*=\frac{d(2r+\rho)}{2r-\rho}\,,$$

$$MS_{i,a}=\frac{r^2+d^2-\rho^2\mp\rho\sqrt{\rho(4r+\rho)}}{2d}\,.$$

Da das Bezugsdreieck ein beliebiges Zwischendreieck war, stimmen alle Zwischendreiecke neben J und M auch in den Punkten N^*, G^*, O^* überein.

Dabei teilen G^* und N^* die Strecke MJ harmonisch im Verhältnis von Umkreis- und Inkreisradius:

$$\frac{MG^*}{G^*J}=-\frac{MN^*}{N^*J}=\frac{r}{\rho}\ .$$

Somit ist G^* das Zentrum der Inversion, die In- und Umkreis aufeinander abbildet.

Weiterhin teilen die Büschelpunkte S_i und S_a die Strecke G^*N^* harmonisch:

$$\frac{G^*S_i}{S_iN^*}=-\frac{G^*S_a}{S_aN^*}=\frac{(r-\rho)\sqrt{\rho(4r+\rho)}}{\rho(r+\rho)}\,.$$

Auch die Strecke O^*J wird durch S_i und S_a harmonisch geteilt:

$$\frac{JS_i}{S_iO^*}=-\frac{JS_a}{S_aO^*}=\frac{2r-\rho}{\sqrt{\rho(4r+\rho)}}\,.$$

Hinterfragt man die Lage der isogonalen Bilder der Büschelpunkte S_i und S_a auf der Feuerbach-Hyperbel, so liegen S_i^* und S_a^* symmetrisch zum Feuerbachpunkt Z auf einer Geraden, die neben G^* und den Mitten von JO und NG auch den Schwerpunkt S enthält.

Zwischendreiecke

Neben der Übereinstimmung in den Punkten der Geraden MJ haben Dreiecke mit gleichem In- und Umkreis viele weitere Gemeinsamkeiten. Hierzu empfiehlt sich ein Blick in Feuerbachs Büchlein [2], in dem zahlreiche geometrische Zusammenhänge in Abhängigkeit von Inkreis- und Umkreisradius angegeben werden, z.B. in §49 die Euler-Gleichung. Hier einige Beispiele:

(1) Das Flächenverhältnis von Zwischendreieck und seinem Berührdreieck ist konstant:

$$\frac{\Delta_{A'B'C'}}{\Delta_{ABC}}=\frac{\rho}{2r}\qquad (\S 8).$$

(2) Die Berührdreiecke A´B´C´ der Zwischendreiecke haben eine konstante Summe der Seitenquadrate:

$$A'B'^2+B'C'^2+C'A'^2=\frac{2\rho^2}{r}(\rho+4r)\qquad (\S 10).$$

(3) Auch das Dreieck $J_aJ_bJ_c$ der Ankreismitten der Zwischendreiecke hat eine konstante Summe der Seitenquadrate:

$$J_aJ_b{}^2 + J_bJ_c{}^2 + J_cJ_a{}^2 = 8r(4r+\rho) \qquad (§16).$$

(4) In den Zwischendreiecken hat die Inkreismitte bzgl. der Ecken ein konstantes Abstandsprodukt:

$$JA \cdot JB \cdot JC = 4\rho^2 r \qquad (§11),$$

gleichbedeutend mit

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\rho}{4r} \qquad (§11).$$

(5) Der Höhenschnitt der Zwischendreiecke hat bzgl. der Ecken eine konstante Abstandssumme

$$HA + HB + HC = 2(r+\rho) \qquad (§32),$$

gleichbedeutend mit

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{\rho + r}{r} \qquad (§32).$$

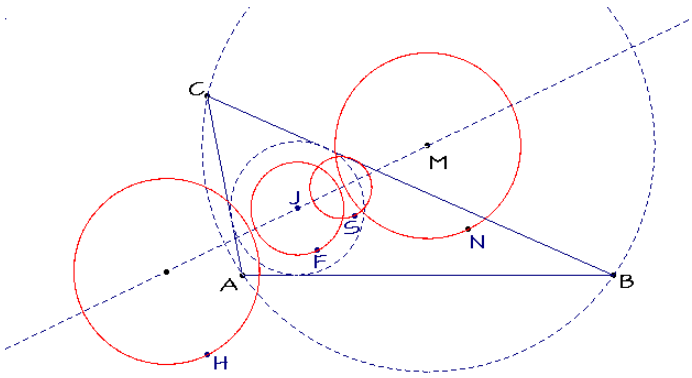
(6) Sei F die Mitte des Feuerbach-Kreises, so gilt

$$JF = \frac{r}{2} - \rho \qquad (§57).$$

Damit ergibt sich für die Mitten der Feuerbach-Kreise der Zwischendreiecke als Ortslinie ein Kreis um die Inkreismitte.
Ergänzt sei der Zusammenhang

$$MN = r - 2\rho\,,$$

d.h. die Ortslinie der Nagel-Punkte der Zwischendreiecke ist ein Kreis um die Umkreismitte.



Auch weitere merkwürdige Punkte der Zwischendreiecke besitzen als Ortslinien Kreise, wie z.B. der Schwerpunkt *S* und der Höhenschnitt *H*. Dabei liegt der Kreis der Höhenschnitte symmetrisch bzgl. der Inkreismitte zum Kreis der Nagelpunkte *N*.

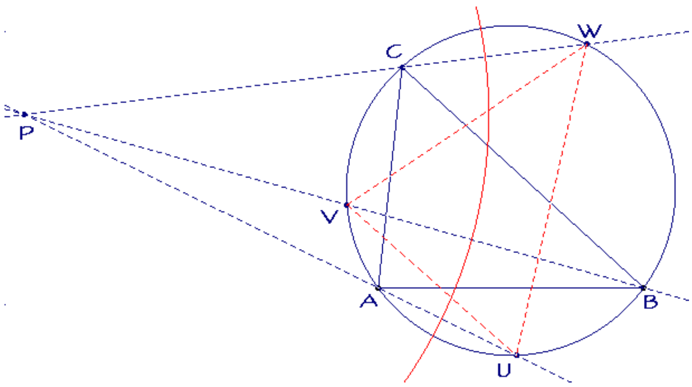
Perspektive Zwischendreiecke

Betrachtet man zwei perspektive Dreiecke mit gleichem Umkreis, so folgt für ein Perspektivzentrum $P(u:v:w)$ außerhalb des Umkreises nach dem Sekantensatz, dass es eine Inversion gibt, die entsprechende Ecken der perspektiven

Dreiecke aufeinander abbildet. Zentrum der Inversion ist das Perspektivzentrum P und der Radius

$$\sqrt{a^2vw + b^2wu + c^2uv}$$

des Inversionskreises ist die Quadratwurzel aus der Potenz von P bzgl. des Umkreises.



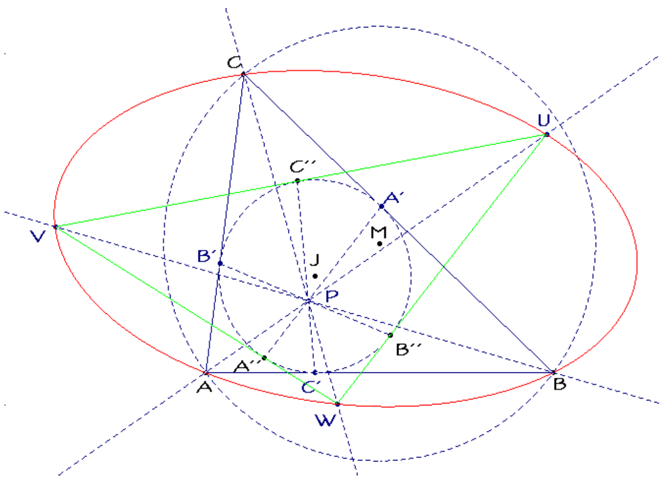
Liegt das Perspektivzentrum P innerhalb des Umkreises, so ist das Dreieck ABC erst an P zu spiegeln, bevor es sich entsprechend durch eine Inversion auf das perspektive Dreieck abbilden lässt.

Fasst man zusätzlich den Inkreis des Bezugsdreiecks ABC ins Auge, so sind die Berührpunkte A',B',C' der Seiten die Ecken des Ceva-Dreiecks des Gergonne-Punktes G:

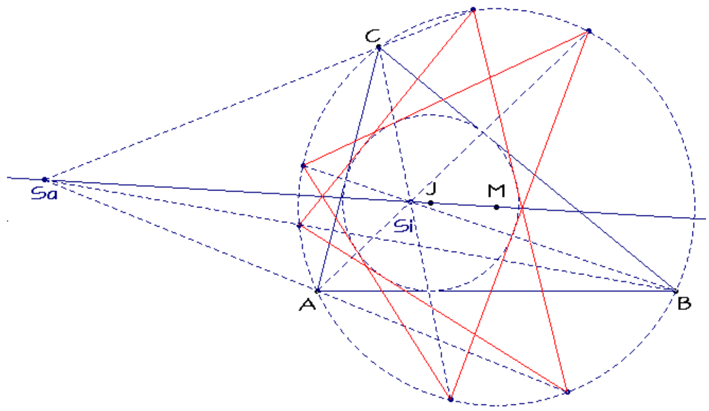
$$A'(0:(s-c)(s-a):(s-a)(s-b)),$$
$$B'((s-b)(s-c):0:(s-a)(s-b)),$$
$$C'((s-b)(s-c):(s-c)(s-a):0).$$

Betrachtet man ein zu $A'B'C'$ perspektives Dreieck $A''B''C''$ im Inkreis und dazu das umbeschriebene Tangentendreieck UVW, so liegen die Ecken U, V, W P-perspektiv auf einem Umkegelschnitt des Bezugsdreiecksdreiecks ABC mit der Gleichung

$$\frac{uyz}{-(s-a)u+(s-b)v+(s-c)w}+\frac{vzx}{(s-a)u-(s-b)v+(s-c)w}$$
$$+\frac{wxy}{(s-a)u+(s-b)v-(s-c)w}=0$$



Dieser Kegelschnitt wird für die Büschelpunkte S_i und S_a zum Umkreis. Damit liefern die Büschelpunkte als Perspektivzentren zu einem Zwischendreieck *ABC* zwei *ABC*-perspektive Zwischendreiecke, die symmetrisch zu *JM* liegen.



Simson-Geraden

Zur weiteren Behandlung werden kartesische Koordinaten herangezogen. Ursprung sei die Umkreismitte $M(0;0)$, *x*-Achse die Gerade *MJ* mit $J(d;0)$. Jeder Punkt

$$U(r\cos\varphi; r\sin\varphi)$$

des Umkreises kann Ecke eines Zwischendreiecks *UVW* sein. Dann errechnen sich die weiteren Ecken zu:

$$\begin{aligned}\text{V,W}\Big(\, & r[(d^2+r^2-2\rho^2-2dr\cos\varphi)(2dr-(d^2+r^2)\cos\varphi) \\ & \pm 4r\rho^2\sin\varphi\sqrt{d^2+r^2-\rho^2-2dr\cos\varphi}\,]/ \\ & (d^2+r^2-2dr\cos\varphi)^2; \\ & (r^2-d^2)[\pm\sqrt{d^2+r^2-\rho^2-2dr\cos\varphi}(2dr-(d^2+r^2)\cos\varphi) \\ & -r(d^2+r^2-2\rho^2-2dr\cos\varphi)\sin\varphi]/ \\ & (d^2+r^2-2dr\cos\varphi)^2\Big).\end{aligned}$$

Es liegt nahe, zu einem festen Umfangspunkt

$$K(r\cos\kappa; r\sin\kappa)$$

die Simson-Geraden bzgl. der Zwischendreiecke zu untersuchen. Dabei zeigt sich, dass diese Simson-Geraden ein Büschel bilden mit dem gemeinsamen Punkt

$$K^\wedge(d+\rho\cos\kappa;(r-\rho)\sin\kappa) \quad \text{(kartesisch).}$$

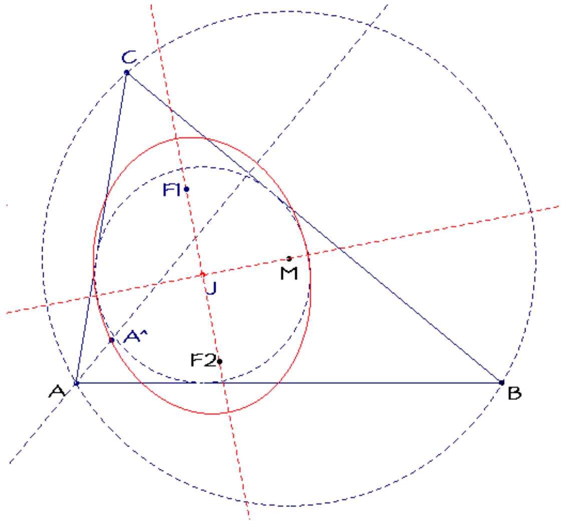
Für ein Zwischendreieck *ABC* als Bezugsdreieck für baryzentrische Koordinaten erhält man z.B. für die Ecke *A* diesen Schnitt der Simson-Geraden zu

$$A^\wedge(a^3:(s-a)S_C:(s-a)S_B) \quad \text{(baryzentrisch).}$$

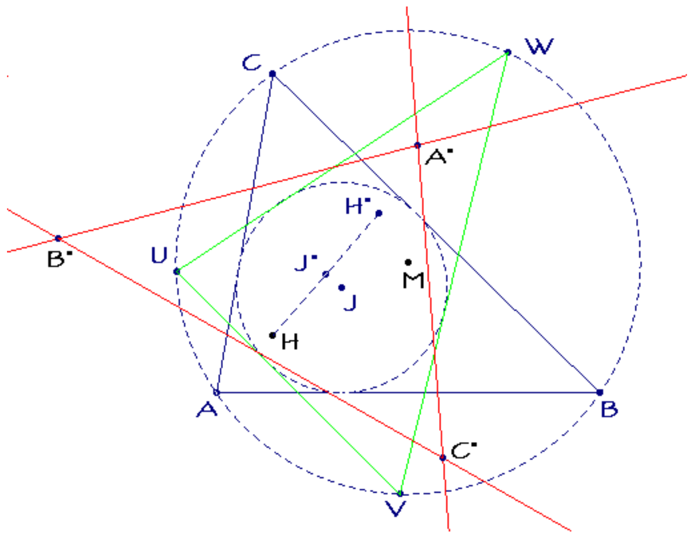
Aus dieser Darstellung ergibt sich, dass $A^\wedge$ auf der Höhe h_a des Bezugsdreiecks liegt, diese im Verhältnis $(s-a)/a$ teilt, d.h. von der Seite den Inkreisdurchmesser als Abstand hat.
Für die Ortslinie der Simson-Geraden-Schnitte ergibt sich unmittelbar aus den kartesischen Koordinaten durch Eliminieren des Parameters κ eine Ellipse mit der Gleichung

$$\left(\frac{x-d}{\rho}\right)^2+\left(\frac{y}{r-\rho}\right)^2=1.$$

Diese Ellipse hat ihr Zentrum in der Inkreismitte *J* mit der Hauptachse $r-\rho$, der Nebenachse ρ und der Brennweite *d*.



Abschließend sei angemerkt: Die Simson-Geraden der Ecken *A, B, C* eines Zwischendreiecks bzgl. eines weiteren Zwischendreiecks *UVW* bilden ein Dreieck *A°B°C°*, das zum Dreieck *ABC* ähnlich ist, denn die Simson-Geraden zweier Umfangspunkte schneiden sich unter dem halben Mittelpunktswinkel der beiden Punkte. Das an der Inkreismitte gespiegelte Dreieck *ABC* ist ein Beispiel. Die Dreiecke *A°B°C°* haben einen gemeinsamen Punkt *X(944)*, den an ihrer Inkreismitte *J°* gespiegelten Höhenschnitt *H°*. Dieser Punkt fällt in den Höhenschnitt *H* des Bezugsdreiecks.



Feuerbach-Kreis und Umkreis

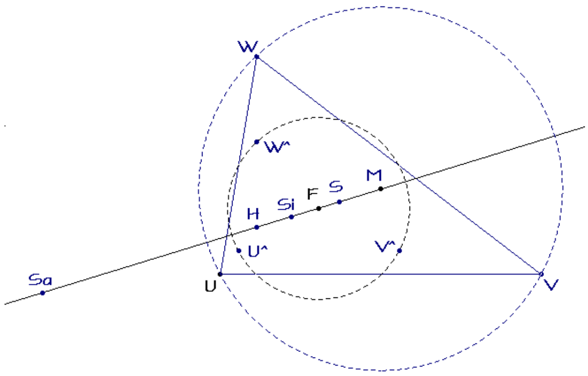
In diesem Abschnitt werden umkreisgleiche Dreiecke mit gemeinsamem Feuerbach-Kreis betrachtet. Wir wollen auch hier von „Zwischendreiecken“ sprechen. Der Radius des Feuerbachoder Neun-Punkte-Kreises ist bekanntlich der halbe Umkreisradius *r*. Der Mittelpunkt *F* habe von *M* den Abstand *d*. Dabei muss $d < \frac{3}{2}r$ sein; für $d < \frac{r}{2}$ kann jeder Umkreispunkt Ecke eines Dreiecks mit gleichem Feuerbach-Kreis und Umkreis sein. Benutzt sei ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Ursprung in der Umkreismitte $M(0;0)$ und $F(d;0)$. Verbindungsgerade der Mittelpunkte ist die Euler-Gerade, auf der auch der Höhenschnitt $H(2d;0)$, der Schwerpunkt $S(\frac{2d}{3};0)$ und die Büschelpunkte

$$S_{i,a}(\frac{4d^2+3r^2 \mp \sqrt{16d^4-40d^2r^2+9r^4}}{8d};0)$$

von Feuerbach-Kreis und Umkreis liegen. Dabei sind

S, H, F, M als auch *S, H,* S_i, S_a

in harmonischer Lage.



Für einen Umkreispunkt $U(r\cos\varphi; r\sin\varphi)$ ergeben sich die fehlenden Ecken eines „Zwischendreiecks“ *UVW* zu

$$V,W(d-\frac{1}{2}r\cos\varphi \pm \frac{r\sin\varphi\sqrt{-4d^2+3r^2+4dr\cos\varphi}}{2\sqrt{4d^2+r^2-4dr\cos\varphi}};$$

$$-\frac{1}{2}r\sin\varphi \pm \frac{(2d-r\cos\varphi)\sqrt{-4d^2+3r^2+4dr\cos\varphi}}{2\sqrt{4d^2+r^2-4dr\cos\varphi}}).$$

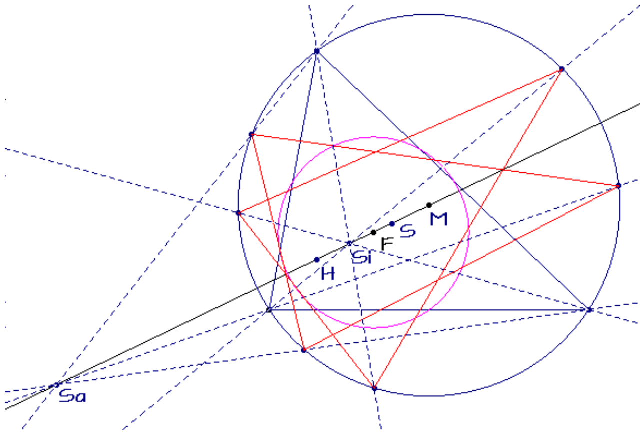
Betrachtet man zu einem Umkreispunkt $K(r\cos\kappa, r\sin\kappa)$ die Simson-Geraden bzgl. der Zwischendreiecke, so bilden sie ein Büschel mit dem gemeinsamen Punkt

$$K\wedge(\frac{2d+r\cos\kappa}{2};\frac{r\sin\kappa}{2}).$$

Für eine Ecke eines Zwischendreiecks ist dieser Punkt die Mitte des oberen Höhenabschnitts auf dem Feuerbach-Kreis. Damit ist die Ortslinie der Simson-Geraden-Schnitte der vorgegebene Feuerbach-Kreis mit der Gleichung

$$(x-d)^2+y^2=\frac{r^2}{4}.$$

Angemerkt sei noch, dass auch die Büschelpunkte S_i und S_a wieder Perspektivzentren für zwei weitere Zwischendreiecke sind, die spiegelbildlich zur Euler-Geraden liegen.



Berechnet man den Abstand von Umkreismitte und Höhenschnitt ergänzend baryzentrisch, so liefert der Vergleich

$$MH^2 = 9r^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 4d^2 .$$

D.h.: umkreisgleiche Dreiecke mit gleichem Höhenschnitt haben eine konstante Summe der Seitenquadrate.
Blickt man in das Büchlein von Feuerbach, so folgt dieses Ergebnis aus den Zusammenhängen

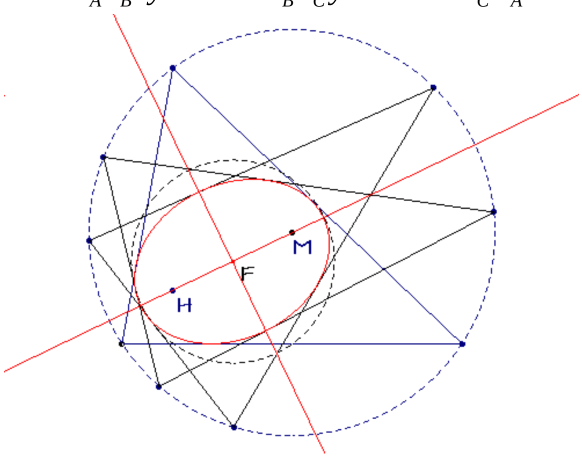
$$MH^2 = r(r - 4\rho_H) \qquad (\S 53)$$

und $$a^2 + b^2 + c^2 = 4r(\rho_H + 2r) \qquad (\S 27),$$

wobei ρ_H der Inkreisradius des Höhenfußpunktdreiecks ist. Die erste dieser Gleichungen ist dabei die Euler-Gleichung für das Höhenfußpunktdreieck. Da Feuerbach bevorzugt ρ_H als Variable benutzt, ließen sich aus seinem Büchlein weitere Invarianten für die hier betrachteten „Zwischendreiecke“ finden.

Ein neuer Aspekt ergibt sich aus folgendem Zusammenhang: Im Vergleich zu den Zwischendreiecken von In- und Umkreis haben die „Zwischendreiecke“ von Feuerbach-Kreis und Umkreis einen gemeinsamen Berührkegelschnitt: eine Ellipse mit den isogonalen Brennpunkten in Umkreismitte M und Höhenschnitt H und dem Feuerbach-Kreis als Hauptkreis. Wählt man eines der „Zwischendreiecke“ als Bezugsdreieck, so lautet die Gleichung dieser Ellipse in baryzentrischen Koordinaten

$$a^4 S_A{}^2 x^2 + b^4 S_B{}^2 y^2 + c^4 S_C{}^2 z^2$$
$$- 2a^2b^2 S_A S_B xy - 2b^2c^2 S_B S_C yz - 2c^2a^2 S_C S_A zx = 0 .$$



Brocard-Kreis und Umkreis

Es sollen nun umkreisgleiche Dreiecke mit gleichem Brocard-Kreis betrachtet werden. Benutzt werden baryzentrische Koordinaten eines Bezugsdreiecks. Der Brocard-Kreis ist der Thales-Kreis über der Umkreismitte M und dem Lemoine-Punkt

$$L(a^2 : b^2 : c^2) = X(6)$$

Auf diesem Kreis liegen die isogonalen Brocard-Punkte

$$B_1(a^2b^2 : b^2c^2 : c^2a^2) \quad \text{und} \quad B_2(a^2c^2 : b^2a^2 : c^2b^2)$$

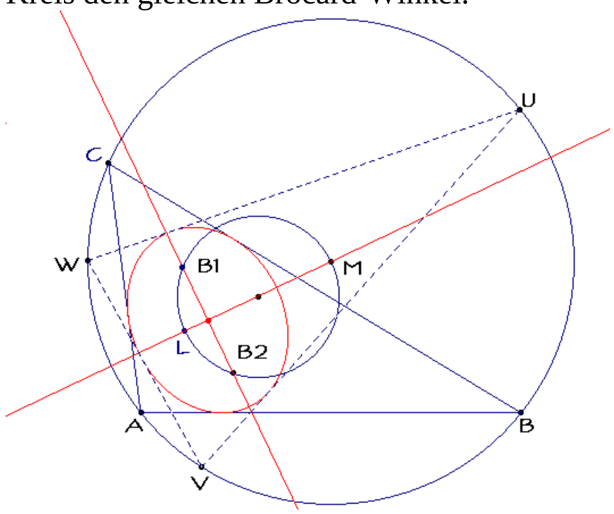
symmetrisch zu der Geraden ML. Dabei ist der Umfangswinkel über Brocard-Punkt und Lemoine-Punkt der Brocard-Winkel ω mit

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(S_A + S_B + S_C) = 2S_\omega = 2S\cot\omega .$$

Der Durchmesser des Brocard-Kreises errechnet sich damit zu

$$ML = r\sqrt{1 - 3\tan^2\omega} .$$

Damit haben alle Dreiecke mit gleichem Umkreis und gleichem Brocard-Kreis den gleichen Brocard-Winkel.



Die isogonalen Brocard-Punkte sind die Brennpunkte einer Berührellipse mit der Gleichung

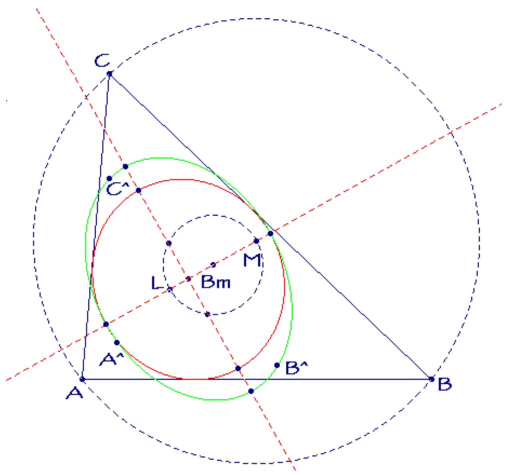
$$b^4c^4x^2 + c^4a^4y^2 + a^4b^4z^2 - 2a^2b^2c^2(a^2yz + b^2zx + c^2xy) = 0 .$$

Das Zentrum liegt in der Brocard-Mitte

$$B_m(a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C) = X(39)$$

mit der Hauptachse $\dfrac{r}{\sqrt{1+\cot^2\omega}}$ und der Nebenachse $\dfrac{2r}{1+\cot^2\omega}$.

Da diese Achsenlängen nur von dem Radius des Umkreises und dem Brocard-Winkel abhängen, haben alle Dreiecke mit gleichem Umkreis und Brocard-Kreis auch die gleiche Berührellipse mit Brennpunkten in den Brocard-Punkten.
Wegen der aufwändigen Berechnungen sei hier nur erwähnt, dass die Simson-Geraden eines Umfangspunktes bzgl. der hier betrachteten Zwischendreiecke wieder im Büschel liegen, wobei die Büschelpunkte eine Ellipse ergeben.



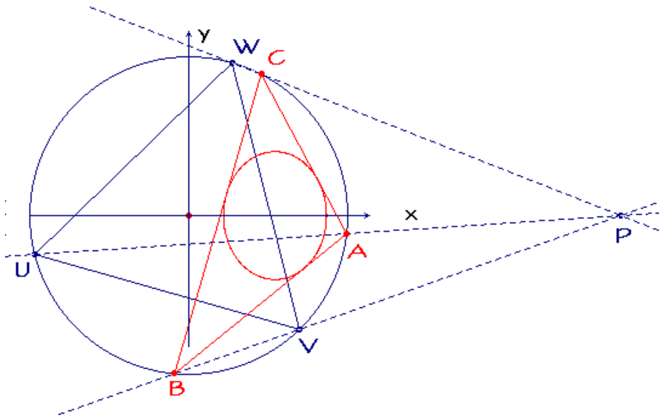
Gleichseitige Dreiecke im Kreis

Hier seien im Umkreis abschließend perspektive Dreiecke zu gleichseitigen Dreiecken näher untersucht. Dazu werden wieder kartesische Koordinaten herangezogen: Der Ursprung liege in der Umkreismitte $M(0;0)$ und das Perspektivzentrum $P(p;0)$ sei ein Punkt im Abstand p von der Umkreismitte. Das gleichseitige Dreieck sei durch eine der Ecken $U(r\cos\varphi; r\sin\varphi)$ auf dem Umkreis festgelegt. Die Verbindungsgerade PU schneidet dann den Umkreis im Punkt

$$A\left(\frac{r(2pr-(p^2+r^2)\cos\varphi)}{p^2+r^2-2pr\cos\varphi};\frac{r(p^2-r^2)\sin\varphi}{p^2+r^2-2pr\cos\varphi}\right).$$

Für $\varphi \pm 120°$ erhält man die Ecken B und C des perspektiven Dreiecks ABC. Durchläuft U die Punkte des Umkreises, so hüllen die Seiten von ABC einen Kegelschnitt ein mit der Gleichung

$$\frac{\left(x-\frac{3pr^2(p^2+r^2)}{2(p^2-pr+r^2)(p^2+pr+r^2)}\right)^2}{\frac{r^2(p^2-r^2)^4}{4(p^2-pr+r^2)^2(p^2+pr+r^2)^2}}+\frac{y^2}{\frac{r^2(p^2-r^2)^2}{4(p^2-pr+r^2)(p^2+pr+r^2)}}=1\cdot$$

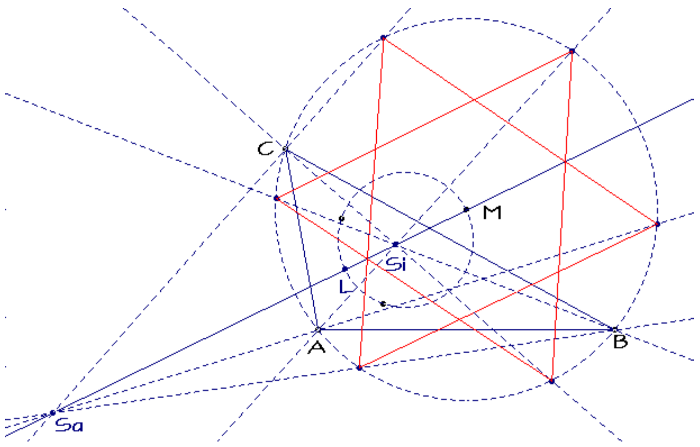


Dieser Kegelschnitt ist eine Ellipse. Dabei ist der Krümmungskreisradius für die Nebenscheitel der halbe Umkreisradius. Spiegelt man P am Umkreis und benutzt diesen Spiegelpunkt als Perspektivzentrum, so erhält man ein an PM

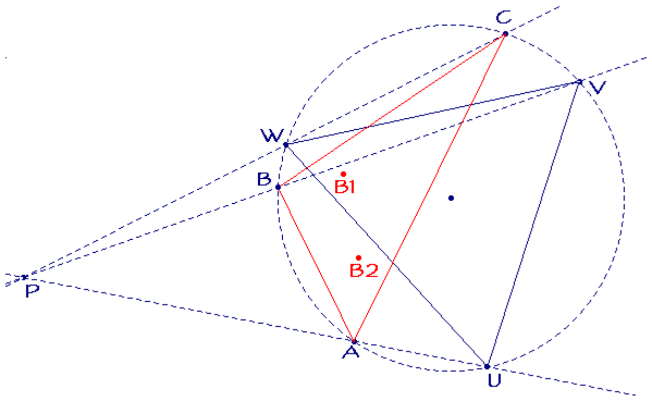
gespiegeltes perspektives Dreieck mit der gleichen Berührellipse.
Hierzu ein abschließendes Ergebnis: Die zu den „Zwischendreiecken“ von Brocard-Kreis und Umkreis aufgezeigte Berührellipse ergibt sich für die Perspektivzentren mit

$$p = r\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{3}\tan\omega}{1 \mp \sqrt{3}\tan\omega}},$$

und diese Zentren sind die Büschelpunkte von Brocard-Kreis und Umkreis.



Damit haben zu festem Perspektivzentrum alle gleichseitigen Dreiecke in einem Kreis perspektive Dreiecke mit gleichen Brocard-Punkten.



Literatur

[1] C. Kimberling: Encyclopedia of Triangle Centers. – http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.

[2] K. W. Feuerbach: Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks … – Haarlem. – P. Visser Azn. – 1908.

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de