

# Dreiecksbezogene Inversionen

Eckart Schmidt

Zu einem Dreieck  $ABC$  werden Inversionen betrachtet, die eine Ecke als Zentrum haben und die beiden anderen Ecken vertauschen. Sie seien nach ihren Zentren als  $A$ -,  $B$ - und  $C$ -Inversion bezeichnet. Das Verknüpfen von zweien ergibt die dritte, das Verknüpfen aller drei Inversionen ergibt die Identität. Betrachtet man die Bilder  $P_A, P_B, P_C$  eines Punktes  $P$  bei diesen Inversionen, so liegt es nahe, die Dreiecke  $P_AP_BP_C$  und die Vierecke  $P_AP_BP_CP$  zu untersuchen. Für die Vierecke  $PP_BP_AP_CP$ ,  $PP_AP_BP_CP$  und  $PP_AP_CP_BP$  sind die Punkte  $A, B, C$  die Clifford-Punkte. Die Ecken von Dreieck  $ABC$ , Viereck  $P_AP_BP_CP$  und dessen Diagonal-Dreieck liegen auf einer isogonal-konjugiert-invarianten Zirkularkurve, die auch bzgl. der genannten Inversionen invariant bleibt.

Die Bearbeitung erfolgt analytisch, wobei die Zusammenhänge in baryzentrischen Koordinaten protokolliert werden.

**1.** Da die  $A$ -Inversion die Punkte  $B$  und  $C$  vertauscht, hat ihr Inversionskreis den Radius  $\sqrt{bc}$ , wobei  $a, b, c$  die Seitenlängen des Dreiecks  $ABC$  sind; die Achse dieser Inversion ist die Winkelhalbierende des Innenwinkels bei  $A$ . Zu einem Punkt  $X$  erhält man also den Bildpunkt  $X_A$  durch Kreisspiegelung am Inversionskreis um  $A$  mit anschließender Spiegelung an der Winkelhalbierenden des Innenwinkels bei  $A$  (Abb.1). Auf eine einfache Konstruktionsmöglichkeit des Bildpunktes  $X_A$  sei hier hingewiesen: Ist  $X'$  der Schnittpunkt des Kreises  $k(X,A,B)$  mit der Geraden  $g(X,C)$ , so ist der Bildpunkt der Schnittpunkt des Kreises  $k(X',A,C)$  mit der Geraden  $g(X',B)$ .

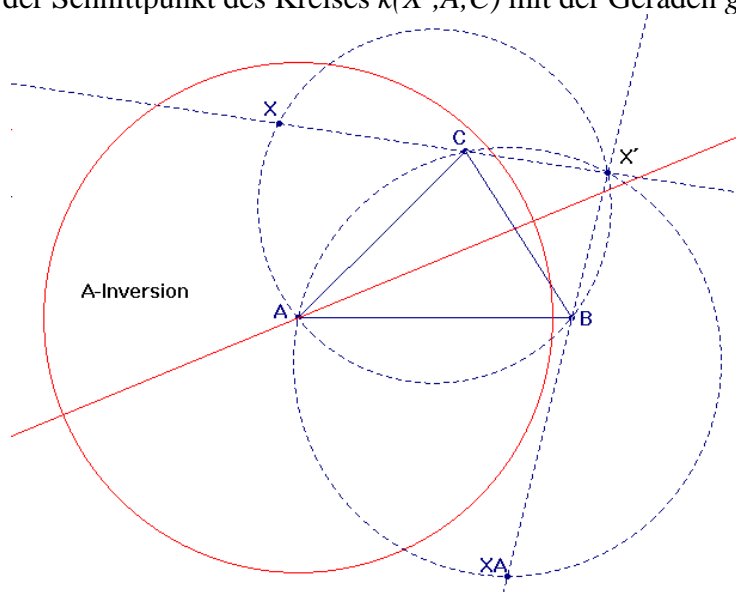


Abb.1

**2.** Folgt man einer Konstruktion des Bildpunktes  $X_A$  analytisch, so ergeben sich für das Bezugsdreieck  $ABC$  die baryzentrischen Koordinaten des Bildpunktes zu

$$X_A(a^2yz + b^2zx + c^2xy : -b^2(x+y+z)z : -c^2(x+y+z)y).$$

Damit vertauscht die  $A$ -Inversion nicht nur die Ecken  $B(0:1:0)$  und  $C(0:0:1)$ , sondern auch die Inkreismitte  $I(a:b:c)$  und die Ankreismitte  $I_A(-a:b:c)$  sowie die beiden anderen Ankreismitten  $I_B(a:-b:c)$  und  $I_C(a:b:-c)$ . Weiterhin werden z.B. die Umkreismitte

$$M(a^2(-a^2 + b^2 + c^2) : b^2(a^2 - b^2 + c^2) : c^2(a^2 + b^2 - c^2))$$

$$\text{auf } M_A(-a^2 : a^2 + b^2 - c^2 : a^2 - b^2 + c^2),$$

den Spiegelpunkt von  $A$  an  $BC$ , abgebildet und die Spiegelpunkte von  $B$  an  $AC$  und von  $C$  an  $AB$  vertauscht.

Punkt	Bildpunkt bei $A$ -Inversion
( $B$ und $C$ vertauschbar)	
Ecke $B$	Ecke $C$
Mittelpunkt von $A$ und $B$	Spiegelpunkt von $A$ an $C$
Mittelpunkt von $B$ und $C$	Schnittpunkt von Umkreis und Apollonius-Kreis über $\overline{BC}$
... teilt $\overline{AB}$ im Verhältnis $k$	... teilt $\overline{AC}$ im Verhältnis $-k-1$
Inkreismitte $I$	Ankreismitte $I_A$
Ankreismitte $I_B$	Ankreismitte $I_C$
Umkreismitte $M$	Spiegelpunkt von $A$ an $BC$
Höhenschnitt $H$	Schnittpunkt der Spiegelgeraden von $BC$ an $AB$ und $AC$
Schwerpunkt $S$	Schnittpunkt der Kreise $k(A,B,A \text{ an } C \text{ gespiegelt}), k(A,C,A \text{ an } B \text{ gespiegelt})$

**3.** Die  $A$ -Inversion vertauscht nicht nur die Ecken  $B$  und  $C$ , sondern bildet die Gerade  $AB$  auf die Gerade  $AC$  (ohne Punkt  $A$ ) ab. Genauer: Ein Punkt  $P(u:v:0)$ , der die Strecke  $AB$  im Verhältnis  $\frac{v}{u} = k$  teilt, hat den Bildpunkt  $P_A(u:0:-u-v)$ , der

die Strecke  $AC$  im Verhältnis  $\frac{-u-v}{u} = -k-1$  teilt.

Bildet man einen Punkt  $Q(0:v:w)$  der Gegenseitengeraden  $BC$  mit der  $A$ -Inversion ab, so erhält man einen Punkt

$$Q_A(a^2vw : -b^2w(v+w) : -c^2v(v+w))$$

auf dem Umkreis des Dreiecks  $ABC$ , genauer das isogonal-konjugierte Bild des Fernpunktes  $(-v-w : v : w)$  der Geraden  $AQ$ . Umgekehrt wird der Umkreis (ohne Punkt  $A$ ) mit der Gleichung

$$a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy = 0$$

auf die Gerade  $BC$  abgebildet, wie man unmittelbar den Koordinaten von  $X_A$  entnimmt.

**4.** Die A-Inversion bildet Geraden auf Kreise durch den Punkt  $A$  ab. Geraden durch die Umkreismitte  $M$  haben z.B. einen Bildkreis durch  $A$  und den Spiegelpunkt von  $A$  an  $BC$ , d.h. der Mittelpunkt liegt auf  $BC$ .

Teilt die Gerade die Seiten  $\overline{AB}$  und  $\overline{AC}$  in den Verhältnissen  $p$  und  $q$ , so geht der Bildkreis durch  $A$  und die Teilpunkte der Strecken  $\overline{AB}$  und  $\overline{AC}$  zu den Verhältnissen  $-q-1$  und  $-1-p$ .

Betrachtet man z.B. die Mittelsenkrechte der Seite  $\overline{AB}$ , so geht der Bildkreis durch  $A$ , den Spiegelpunkt von  $A$  an  $C$  sowie den Spiegelpunkt von  $A$  an  $BC$ , d.h. es handelt sich um einen Kreis um  $C$  durch  $A$ .

Gerade	Bildkreis bei A-Inversion
( $B$ und $C$ vertauschbar)	
Gerade durch $A$	Spiegelgerade an der Winkelhalbierenden
Seitengerade $AB$	Seitengerade $AC$
Seitengerade $BC$	Umkreis Dreieck $ABC$
Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$	Kreis um $C$ durch $A$
Mittelsenkrechte zu $\overline{BC}$	Apollonius-Kreis über $\overline{BC}$
Höhe durch $B$	Kreis durch $A$ und $C$ mit Mittelpunkt auf $AB$
Winkelhalbierende durch $B$	Kreis durch $A$ und $C$ mit Mittelpunkt auf dem Umkreis
Seitenhalbierende durch $B$	Kreis durch $A$ und $C$ und den Spiegelpunkt von $A$ an $B$

Betrachtet man dagegen die Mittelsenkrechte der Gegenseite  $\overline{BC}$ , so geht der Bildkreis durch  $A$  und den Spiegelpunkt von  $A$  an  $BC$ , d.h. der Mittelpunkt liegt auf der Seitengeraden  $BC$ . Bildet man die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten mit dem Umkreis

$$(-a^2 : b(c+b) : c(b+c)) \text{ und } (a^2 : b(c-b) : c(b-c))$$

mit der A-Inversion ab, so erhält man die Punkte

$$(0 : b : c) \text{ und } (0 : b : -c),$$

die die Seite  $\overline{BC}$  in den Verhältnissen  $\frac{c}{b}$  und  $-\frac{c}{b}$  teilen. Damit

ist das Bild der Mittelsenkrechten von  $\overline{BC}$  bei der  $A$ -Inversion der Apollonius-Kreis über der Seite  $\overline{BC}$ .

Es sei ergänzt, dass die Apollonius-Kreise über  $AB$  und  $AC$  die Bilder der Kreise um  $C$  durch  $B$  und um  $B$  durch  $C$  sind.

Abschließend (Abb.2): Das Bild der Euler-Geraden ist ein Kreis durch  $A$  und den Spiegelpunkt von  $A$  an  $BC$ , dessen Mittelpunkt die Seite  $\overline{BC}$  im Verhältnis

$$\frac{(c^2 - a^2)c^2}{(b^2 - a^2)b^2} \text{ teilt } (a < b < c).$$

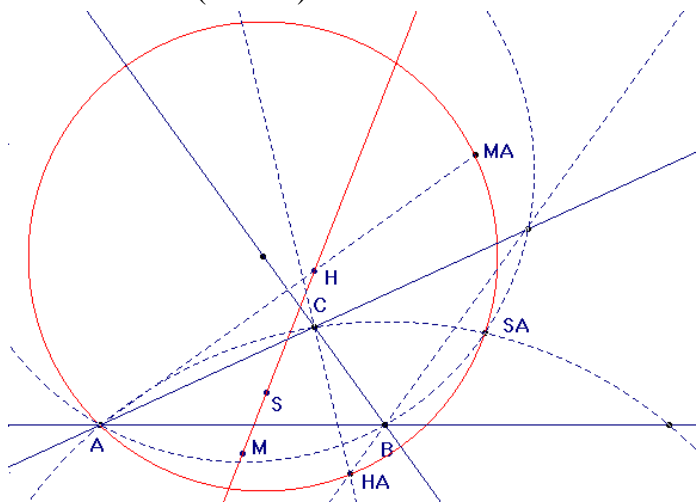


Abb.2

**5.** Betrachtet man zu einem Punkt  $P(u : v : w)$  die Bilder bei der  $A$ -,  $B$ - und  $C$ -Inversion

$$P_A(a^2vw + b^2uw + c^2uv : -b^2(u + v + w) : -c^2(u + v + w)),$$

$$P_B(-a^2(u + v + w) : a^2vw + b^2uw + c^2uv : -c^2(u + v + w)),$$

$$P_C(-a^2(u + v + w) : -b^2(u + v + w) : a^2vw + b^2uw + c^2uv),$$

so erhält man ein Dreieck  $P_AP_BP_C$ , das punktperspektiv zum Ausgangsdreieck ist: Das Perspektivzentrum ist das isogonal-konjugierte Bild  $P^*(a^2vw : b^2uw : c^2uv)$  von  $P$  (Abb.3). Für Umkreispunkte  $P$  ist das Perspektiv-Zentrum ein Fernpunkt.

Die zugehörige Geradenperspektivität der Dreiecke  $ABC$  und  $P_AP_BP_C$  wirft die Frage nach Einhüllenden auf, wenn der Punkt  $P$  eine vorgegebene Linie durchläuft. Zwei Beispiele:

(i) Durchläuft  $P$  eine Seitengerade  $BC$ , so hüllen die Perspektivachsen eine Hyperbel ein mit den Asymptoten  $AB$  und  $AC$ , die  $BC$  in der Seitenmitte berührt (Abb.4). Diese Hyperbel erhält man übrigens auch, wenn man die Einhüllende der Verbindungsgeraden von Punkten  $Q$  auf  $AB$  und  $Q_A$  auf  $AC$  betrachtet.

(ii) Durchläuft  $P$  den Umkreis des Dreiecks  $ABC$ , so hüllen die Perspektivachsen die Steiner-Ellipse ein (Abb.5).

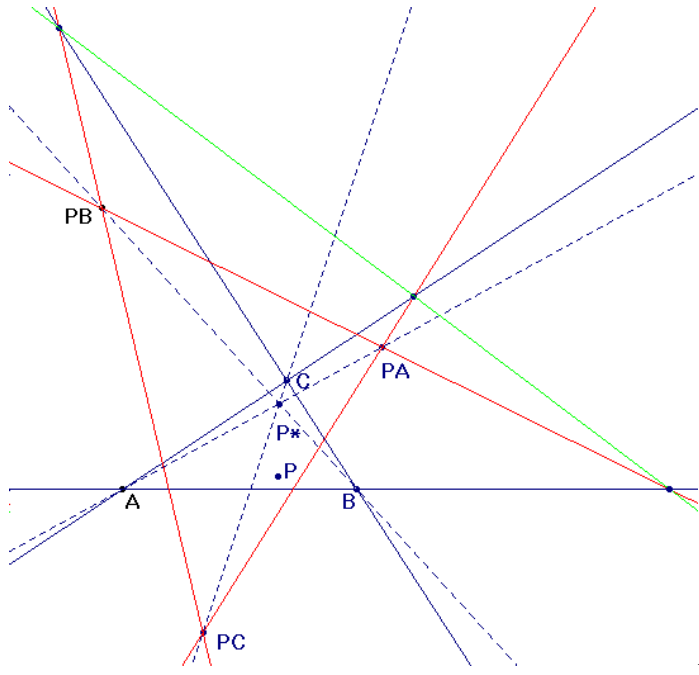


Abb.3

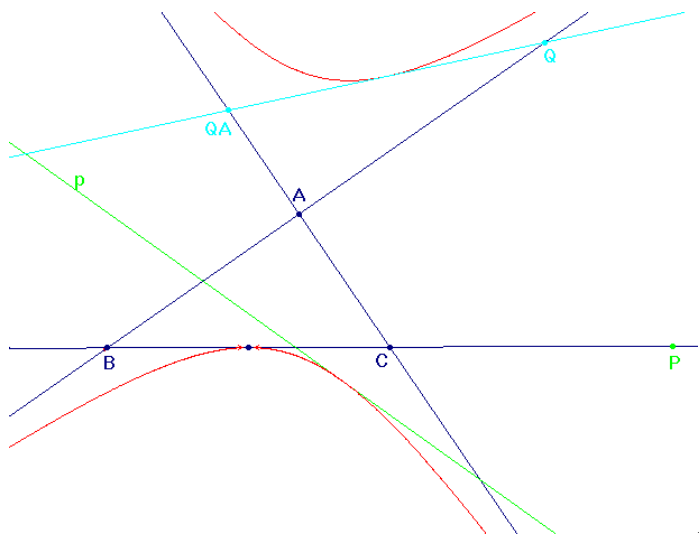


Abb.4

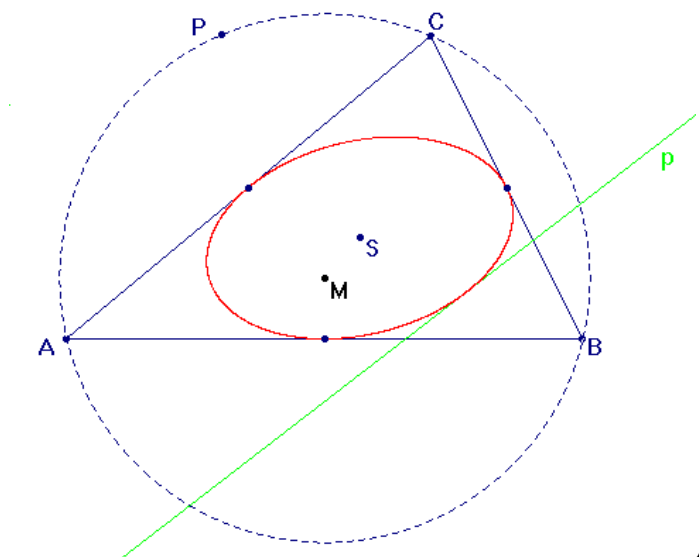


Abb.5

6. Betrachtet man zu einem Punkt  $P$  und seinen Bildern  $P_A$ ,  $P_B$ ,  $P_C$  bei den drei Inversionen die zugehörigen vollständigen Vierseite  $PP_BP_AP_CP$ ,  $PP_AP_BP_CP$ ,  $PP_AP_CP_BP$  so erweisen sich die Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  als Clifford-Punkte dieser Vierseite. Der Clifford-Punkt ist der Schnittpunkt der Umkreise der vier Teildreiecke eines vollständigen Vierseits und liegt mit den Umkreismitten konzyklisch [1].

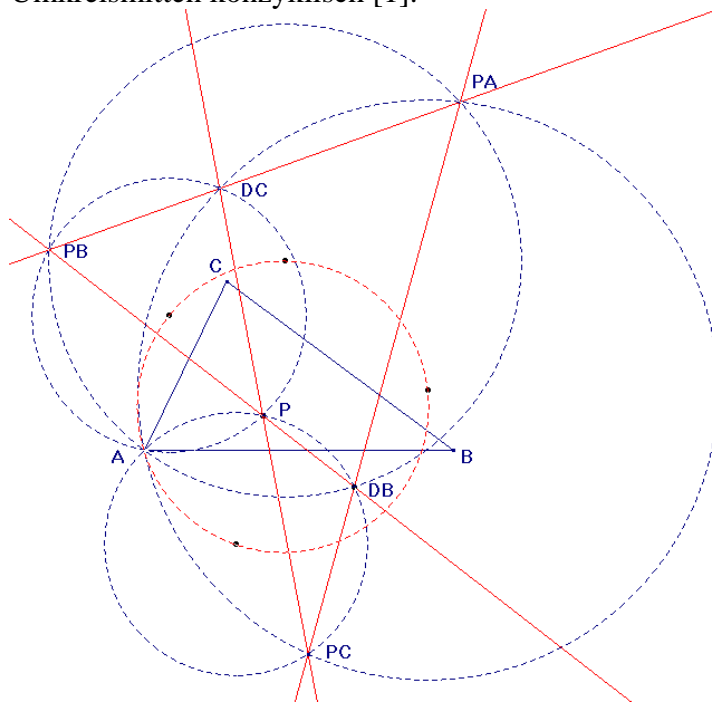


Abb.6

Abbildung 6 zeigt das Vierseit  $PP_BP_AP_CP$  mit dem Clifford-Punkt  $A$ . Dabei bezeichnet

$D_X$  den Schnittpunkt von  $PP_X$  und  $P_YP_Z$ ;

d.h.  $D_AD_BD_C$  ist das Diagonaldreieck der Punkte  $P_A$ ,  $P_B$ ,  $P_C$ ,  $P$ .

Auf eine aufwendige Darstellung der baryzentrischen Koordinaten wird hier verzichtet. Erwähnt sei, dass die Geraden  $PP_X$  und  $P_YP_Z$  die Strecke  $\overline{YZ}$  harmonisch teilen.

7. Betrachtet wird weiterhin das vollständige Vierseit  $PP_BP_AP_CP$  (Abb.6) mit dem Clifford-Punkt  $A$ . Die  $A$ -Inversion vertauscht nicht nur die Punkte  $P$  und  $P_A$ , sondern auch die Punkte  $P_B$  und  $P_C$  – d.h. die Gegenecken – als auch  $D_B$  und  $D_C$ . Damit bildet die  $A$ -Inversion die Seitengeraden des Vierseits auf die Umkreise der Teildreiecke ab, z.B. die Gerade  $PP_B$  auf den Umkreis des Dreiecks  $P_AP_CD_C$ . Die Verbindungsgeraden  $PP_A$  und  $P_BP_C$  der Gegenecken werden zu Kreisen, die sich im Clifford-Punkt  $A$  schneiden, und einem weiteren Punkt  $D$ , der nach R.STÄRK [2] als Tangentialpunkt der vier Punkte  $P$ ,  $P_A$ ,  $P_B$ ,  $P_C$  bezeichnet wird (Abb.7). Man erhält diesen interessanten merkwürdigen Punkt eines Vierecks, indem man z.B. einen Viereckspunkt isogonal-konjugiert bzgl. des Restdreiecks abbildet und am Umkreis dieses Restdreiecks spiegelt. Damit ist das Bild des Punktes  $D_A$  bei der  $A$ -Inversion besagter Tangentialpunkt  $D$ . Auch die Punkte  $D_B$  und  $D_C$  erweisen sich

als Bilder des Tangentialpunktes  $D$  bei der  $B$ - bzw. der  $C$ -Inversion.

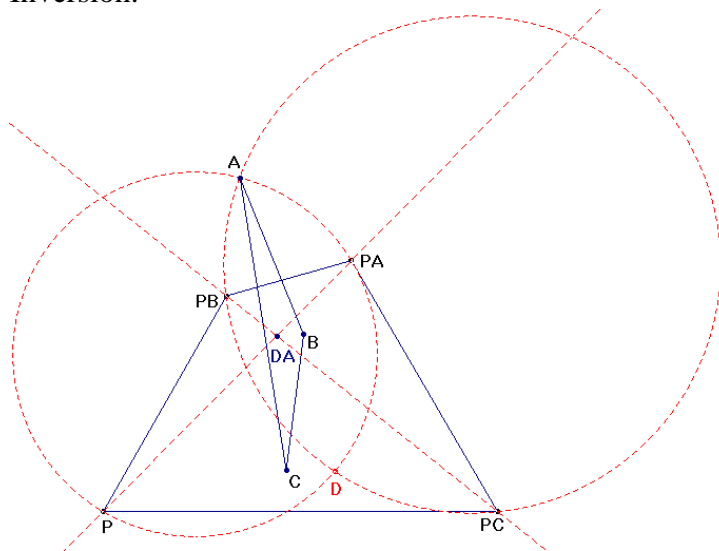


Abb.7

Der Tangentialpunkt  $D$  der vier Punkte  $P, P_A, P_B, P_C$  liefert mit seinen Bildern  $D_A, D_B, D_C$  bei den drei Inversionen das Diagonaldreieck der vier Punkte (Abb.8).

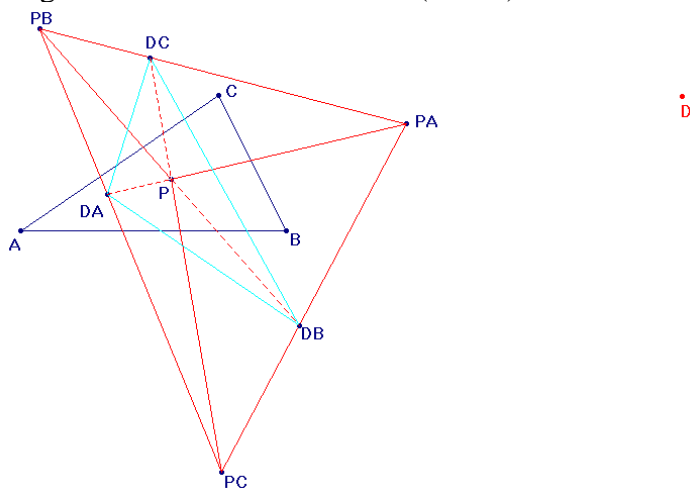


Abb.8

**8.** Zu einem Dreieck lassen sich Kurven dritter Ordnung betrachten, die durch eine dreiecksbezogene Konjugation und einen Pivot-Punkt festgelegt sind. Für die isogonale Konjugation und einen Fernpunkt als Pivot-Punkt erhält man eine Zirkularkurve, die isogonal-konjugiert invariant bleibt; Verbindungsgeraden isogonal-konjugierter Kurvenpunkte  $X$  und  $X^*$  verlaufen parallel zur Asymptote durch den Pivot-Punkt [3]. Wählt man für die hier betrachteten Zusammenhänge  $ABC$  als Bezugsdreieck mit der zugehörigen isogonalen Konjugation und den Fernpunkt

$$\begin{aligned}
 &P_{\infty}(a^2vw(v+w) - u^2(b^2w + c^2v)) \\
 &\quad : b^2uw(u+w) - v^2(a^2w + c^2u) \\
 &\quad \quad : c^2uv(u+v) - w^2(a^2v + b^2u)
 \end{aligned}$$

als Pivot-Punkt, so erhält man eine Zirkularkurve auf der die Ecken  $A, B, C$  des Bezugsdreiecks mit Inkreismitte  $I$  und

Ankreismitten  $I_A, I_B, I_C$  als auch der Punkt  $P$  mit seinen Bildern  $P_A, P_B, P_C$  sowie der zugehörige Tangentialpunkt  $D$  mit seinen Bildern  $D_A, D_B, D_C$  liegen (Abb.9).

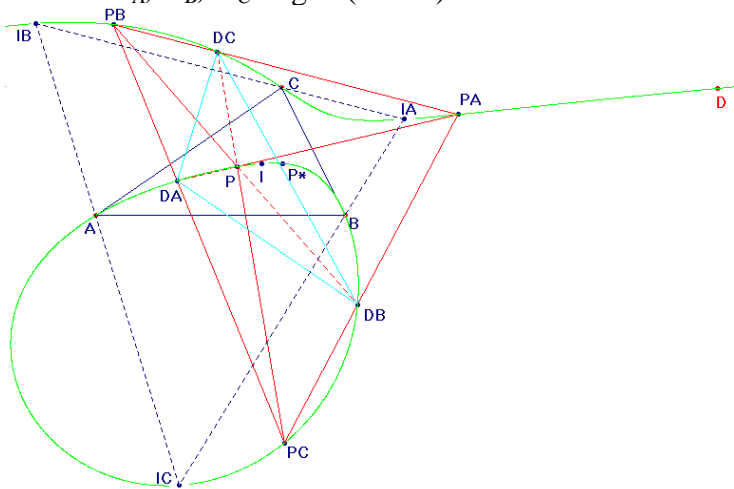


Abb.9

Diese Zirkularkurve hat die Gleichung

$$xyc^2(\alpha y - \beta x) + yza^2(\beta z - \gamma y) + zxb^2(\gamma x - \alpha z) = 0,$$

wobei  $\alpha, \beta, \gamma$  die baryzentrischen Koordinaten des Fernpunktes  $P_\infty$  der Geraden  $PP^*$  sind. Man erhält diese Gleichung, wenn man für einen Kurvenpunkt  $X(x : y : z)$  die Parallelität von  $XX^*$  zu  $PP^*$  auswertet.

Die Zirkularkurve bleibt nicht nur invariant gegenüber der isogonalen Konjugiertheit, sondern auch gegenüber der  $A$ -,  $B$ - und  $C$ -Inversion. Genauer: Zu einem Kurvenpunkt  $Q$  liegen die Bildpunkte  $Q_A, Q_B, Q_C$  nicht nur wieder auf der Kurve, sondern die Tangenten in diesen vier Punkten schneiden sich in einem weiteren Kurvenpunkt, dem Tangentialpunkt dieser vier Punkte. Damit erhält man die sogenannten korrespondierenden Punkte eines Kurvenpunktes durch die drei Inversionen. Wählt man den Fernpunkt  $P_\infty$  der Zirkularkurve, so ist die zugehörige Tangente die Asymptote der Zirkularkurve. Die korrespondierenden Punkte von  $P_\infty$  sind  $A, B, C$ ; die Tangenten in diesen vier Punkten schneiden sich im Hauptpunkt der Zirkularkurve, der nicht nur auf der Asymptote, sondern auch auf dem Umkreis des Dreiecks  $ABC$  liegt.

### Literatur:

- [1] E.M.Schröder: Geometrie euklidischer Ebenen. – Ferdinand Schöningh, Paderborn (1985), S.80.
- [2] R.Stärk und D.Baumgartner: Ein merkwürdiger Punkt des Vierecks. – PM 1/44. Jg. 2002.
- [3] H.M.Cundy: Curves and conjugacy or a tour of some interesting geometry. – Math. Gaz. 80 (96), S.207-218.