

## Isoconjugation for Lines

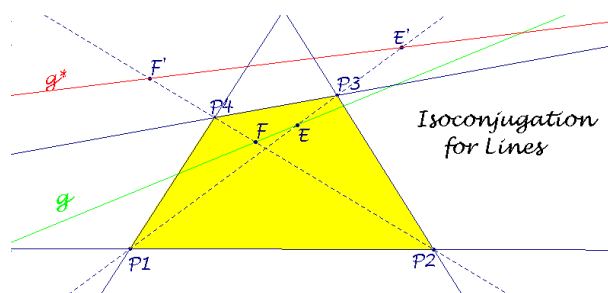
Eckart Schmidt

Zu einem Bezugsdreieck lässt sich nach Bernard Gibert [1] eine „isoconjugation“ als Punkt-abbildung erklären:

„Isoconjugation is a purely projective notion entirely defined with the knowledge of a pencil of conics such as triangle  $ABC$  is self-polar with respect to any conic of the pencil.

For any point  $M$  – distinct from  $A, B, C$  – the polar lines of  $M$  with respect to all the conics of the pencil are concurrent at  $M^*$  (which is the pole of  $M$  in the pencil of conics).

Diese Abbildung kann entsprechend für Geraden bzgl. eines Dreiecks übertragen werden. Kennzeichnet man jetzt das Büschel der Kegelschnitte durch ein Viereit, so ergeben sich neue Aspekte in der Geometrie eines Viereits. Betrachtet man z.B. zu einem Geradenbüschel die Schnitte von Gerade und Bildgerade, so erhält man eine Kurve dritter Ordnung, die die sechs Schnitte der Seitengeraden enthält. Exemplarisch werden einige Beispiele angesprochen. – Gearbeitet wird in baryzentrischen Koordinaten des Diagonalen-Dreiecks. Die Bezeichnungen von Punkten und Geraden beziehen sich oft auf die „Encyclopedia of Quadri-Figures“ (EQF) von Chris van Tienhoven [2].

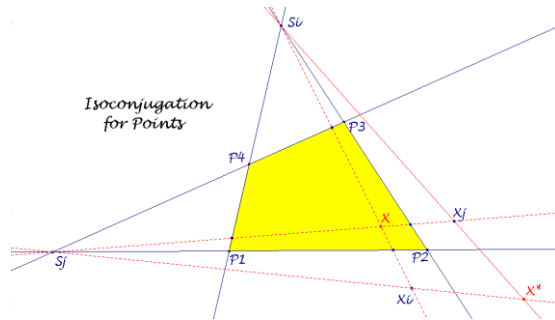


### Isoconjugation (for Points)

Betrachtet man zu einem Viereck mit den Ecken  $P_1, P_2, P_3, P_4$  das Diagonal-Dreieck  $S_1S_2S_3$ , so ist das Restdreieck einer Ecke des Vierecks das Anti-Ceva-Dreieck dieser Ecke. Wählt man das Diagonal-Dreieck als Bezugsdreieck  $ABC = S_1S_2S_3$  für baryzentrische Koordinaten, so lässt sich eine Isoconjugation [1] mit den Fixpunkten in den Ecken des Vierecks betrachten. Gibt man einer Ecke des Vierecks die baryzentrischen Koordinaten  $(p : q : r)$ , so erhält man die Zuordnung

$$X(x : y : z) \rightarrow X^*(p^2yz : q^2zx : r^2xy).$$

Der Bildpunkt lässt sich wie folgt konstruieren: Verbindet man den abzubildenden Punkt  $X$  mit zwei Gegenseitenschnitten  $S_i, S_j$  des Vierecks, und betrachtet zu  $X$  die vierten harmonischen Punkte  $X_{i,j}$  auf diesen Verbindungsgeraden bzgl. der weiteren Schnitte mit den Seiten des Vierecks, dann schneiden sich die Geraden  $S_iX_j$  und  $S_jX_i$  im Bildpunkt  $X^*$ .



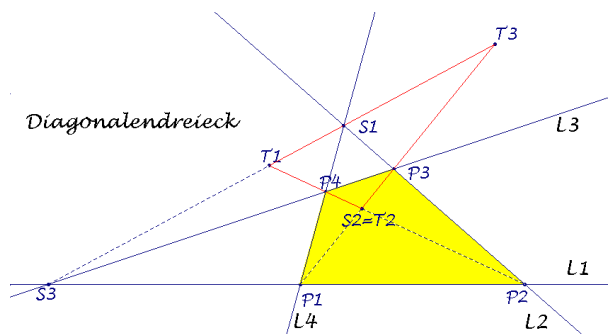
Vierecksbezogen wird diese Abbildung bei Chris van Tienhoven [2] als *QA-Involuntary Conjugate (QA-Tf2)* angesprochen.

Eine Isoconjugation in diesem Sinne bildet Geraden auf Umkegelschnitte des Diagonal-Dreiecks ab. Z.B. werden Geraden durch den *EQF*-Punkt *QA-P23* zu gleichseitigen Umhyperbeln des Diagonal-Dreiecks. In Verbindung mit einem Pivot-Punkt erhält man Isocubics durch alle sechs Schnitte der Seitengeraden des Vierecks [1].

Weitere Eigenschaften dieser Abbildung seien hier nicht angesprochen, da die entsprechende Abbildung für Geraden thematisiert werden soll.

### Isoconjugation for Lines

Ausgangspunkt ist jetzt ein Vierseit der Geraden  $L_1, L_2, L_3, L_4$  mit dem Diagonalen-Dreieck  $T_1T_2T_3$ . Das Diagonalen-Dreieck  $T_1T_2T_3=ABC$  sei jetzt Bezugsdreieck für baryzentrische Koordinaten und die Gerade  $L_4$  habe z.B. die Koeffizienten  $L_4(l : m : n)$ .



Dann gilt:

$$L_1(-l : m : n), \quad L_2(l : -m : n), \quad L_3(l : m : -n), \quad L_4(l : m : n),$$

$$P_1(0 : -n : m), \quad P_2(m : l : 0), \quad P_3(0 : v : m), \quad P_4(-m : l : 0),$$

$$S_1(-n:0:l), \quad S_2(0:1:0), \quad S_3(n:0:l),$$

$$T_1 = A(1:0:0), \quad T_2 = B(0:1:0), \quad T_3 = C(0:0:1).$$

Betrachtet man jetzt zu einer Geraden  $g$  die Pole bzgl. aller Berührkegelschnitte des Vierseits, dann erhält man als Ortslinie eine Gerade, die Bildgerade bei der Isoconjugation

$$g(e:f:g) \rightarrow g^*(l^2fg:m^2ge:n^2ef).$$

Diese Bildgerade lässt sich wie folgt konstruieren: Die abzubildende Gerade  $g$  schneide zwei Diagonalen, z.B.  $e = P_1P_3$  und  $f = P_2P_4$  in den Punkten  $E$  und  $F$  mit den vierten harmonischen Punkten  $E'$  und  $F'$  auf diesen Diagonalen. Die Verbindung  $E'F'$  ist dann die Bildgerade (siehe einleitende Abbildung).

Fixgeraden dieser „Isoconjugation for Lines“ sind die Geraden des Vierseits. Der Newton-Geraden ( $QL-L1$  in  $EQF$ ) wird die Ferngerade zugeordnet.

Die „Isoconjugation for Lines“ kann auf der Tripol-Ebene auch als Isoconjugation (for Points) beschrieben werden:

$$\text{Gerade } g(e:f:g) \rightarrow \text{Tripol } (fg:ge:ef)$$

$$\rightarrow \text{Isoconjugation mit Fixpunkten in Tripolen der Viereckseiten}$$

$$(m^2n^2e:n^2l^2f:l^2m^2g)$$

$$\rightarrow \text{Tripolare } (l^2fg:m^2ge:n^2ef).$$

### Berührkegelschnitte des Diagonalen-Dreiecks

Bildet man die Geraden eines Büschels mit der „Isoconjugation for Lines“ ab, so hüllen die Bildgeraden einen Berührkegelschnitt des Diagonalen-Dreiecks ein. Zum Büschelpunkt  $Q(u:v:w)$  erhält man dann einen Berührkegelschnitt mit der Gleichung

$$u^2l^4x^2 + v^2m^4y^2 + w^2n^4z^2 - 2(uvl^2m^2xy + vwm^2n^2yz + wun^2m^2zx) = 0$$

und dem Zentrum

$$(vm^2 + wn^2 : wn^2 + ul^2 : ul^2 + vm^2)$$

sowie dem Brianchon-Punkt

$$(vwm^2n^2 : wun^2l^2 : uvl^2m^2).$$

Beispiel 1: Wählt man den  $EQF$ -Punkt  $QL-P13$

$$Q(m^2n^2 : n^2l^2 : l^2m^2),$$

so fallen Zentrum und Brianchon-Punkt im Schwerpunkt des Diagonalen-Dreiecks zusammen und der Berührkegelschnitt ist die einbeschriebene Steiner-Ellipse.

Beispiel 2: Wählt man

$$Q(m^2n^2(-a+b+c) : n^2l^2(a-b+c) : l^2m^2(a+b-c)),$$

so erhält man den Inkreis des Diagonalen-Dreiecks.

Beispiel 3: Wählt man den  $EQF$ -Punkt  $QL-P22$

$$Q(m^2n^2(m^2-n^2) : n^2l^2(n^2-l^2) : l^2m^2(l^2-m^2)),$$

so ergibt sich eine Berührparabel mit der Gleichung

$$(m^2-n^2)^2x^2 + (n^2-l^2)^2y^2 + (l^2-m^2)^2z^2 - 2(m^2-n^2)(n^2-l^2)xy$$

$$-2(n^2 - l^2)(l^2 - m^2)yz - 2(l^2 - m^2)(m^2 - n^2)zx = 0,$$

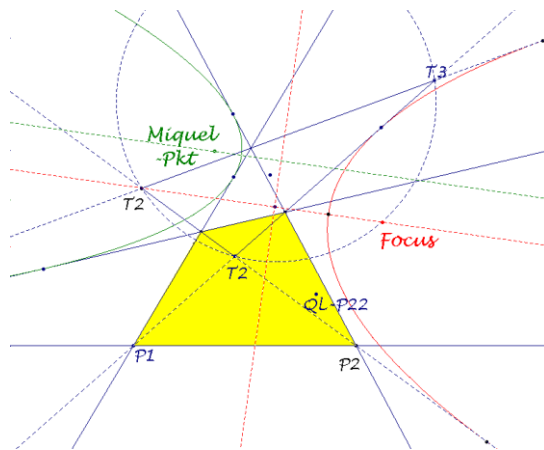
dem Zentrum

$$((m^2 - n^2) : (n^2 - l^2) : (l^2 - m^2))$$

und dem Brianchon-Punkt

$$((n^2 - l^2)(l^2 - m^2) : (l^2 - m^2)(m^2 - n^2) : (m^2 - n^2)(n^2 - l^2)).$$

Brennpunkt ist das Anti-Komplement des Miquel-Punktes (*EQF*-Punkt *QL-P1*), Scheiteltangente ist die Simson-Gerade des Brennpunktes und die Leitlinie enthält den Höhenschnitt. Damit ist diese Berührparabel des Diagonalen-Dreiecks das Anti-Komplement der einbeschriebenen Parabel des Vierseits (*QL-Col* in *EQF*).



Dieser Zusammenhang lässt sich verallgemeinern:

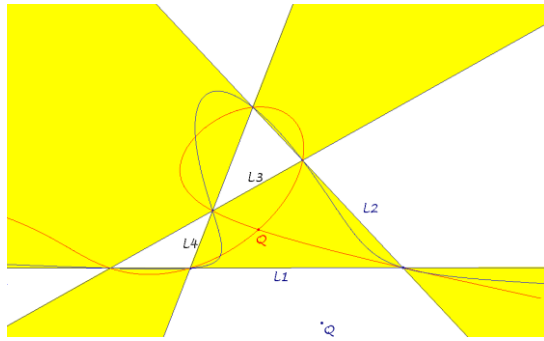
Wählt man *Q* auf der Newton-Geraden (*QL-L1* in *EQF*), dann ist der zugehörige Berührkegelschnitt des Diagonalen-Dreiecks eine Parabel.

### Spezielle kubische Kurven zu Vierseiten

Betrachtet wird das Geradenbüschel eines Punktes  $Q(u : v : w)$ . Zu jeder Geraden des Büschels wird der Schnitt mit seiner Bildgeraden bei obiger „Isoconjugation for Lines“ betrachtet. Die Ortslinie dieser Schnitte ist eine Kurve dritter Ordnung mit der einfachen Gleichung

$$\frac{l^2x}{wy - vz} + \frac{m^2y}{uz - wx} + \frac{n^2z}{vx - uy} = 0 .$$

Diese Kurve enthält den Punkt *Q* als Knoten, wenn *Q* ein Punkt der gelben Bereiche in der folgenden Abbildung ist. Weiterhin enthält die Kurve die sechs Schnitte der Geraden des Vierseits und die Ecken des Ceva-Dreiecks  $Q_aQ_bQ_c$  des Punktes *Q* bzgl. des Diagonalen-Dreiecks  $T_1T_2T_3 = ABC$ .



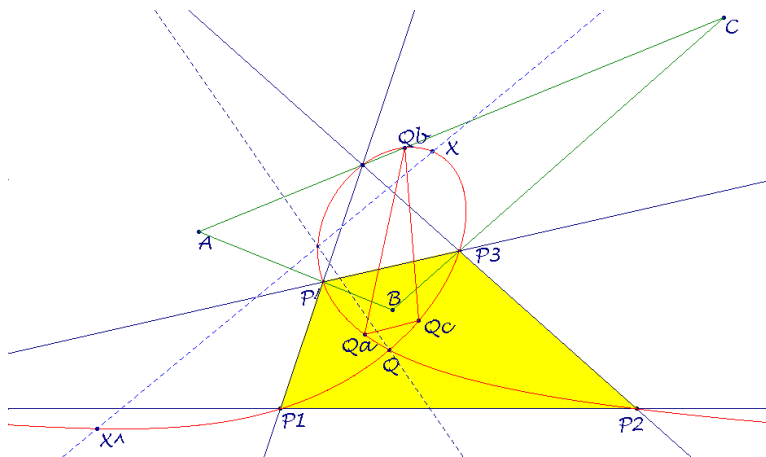
Dieses Ceva-Dreieck ist das Diagonal-Dreieck des Vierecks  $ABCQ$ . Betrachtet man jetzt zu diesem Ceva-Dreieck eine Isoconjugation  $\wedge$  mit den Fixpunkten  $A, B, C, Q$  in der Zuordnung

$$X(x : y : z) \rightarrow X^\wedge((-vwx + wuy + uvz)x : (vwx - wuy + uvz)y : (vwx + wuy - uvz)z),$$

dann erweist sich die Kurve invariant unter dieser Abbildung.

Die Kurve kann als „nonpivotal isocubic“ des Ceva-Dreiecks angesprochen werden; sie vertauscht die Gegenecken des Vierseits und bildet die Ferngerade auf den Mittenkegelschnitt von  $ABCQ$  ab.

Bildet man für Kurvenpunkte die Verbindungsgerade  $XX^\wedge$  mit der „Isoconjugation for Lines“ ab, so erhält man eine Gerade durch  $Q$ , die die Kurve im dritten Schnitt von  $XX^\wedge$  mit der Kurve schneidet. Oder: Verbindet man  $Q$  mit einem Kurvenpunkt  $K$ , dann schneidet die Bildgerade von  $QK$  bei der „Isoconjugation for Lines“ die Kurve in  $Q$ -konjugierten Punkten.

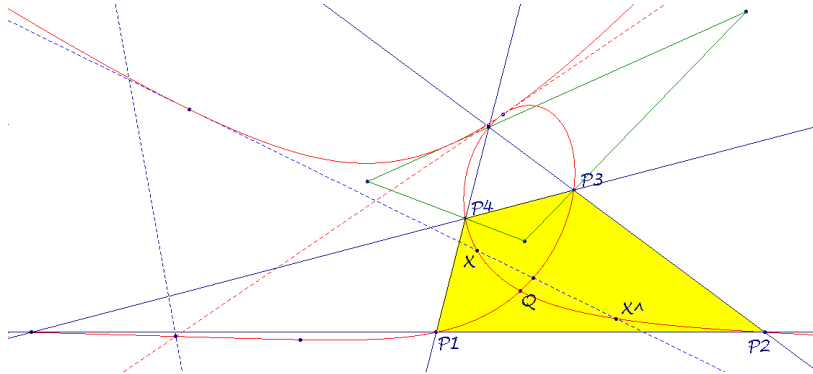


Betrachtet man die Einhüllende der Geraden  $XX^\wedge$  zu Kurvenpunkten  $X$ , so ergibt sich ein Berührkegelschnitt des Diagonalen-Dreiecks mit der Gleichung

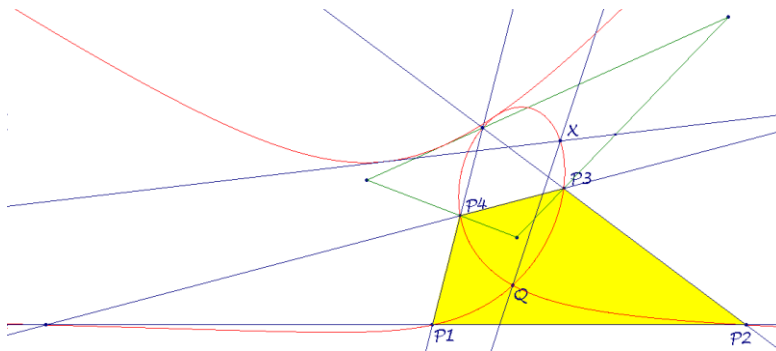
$$u^2l^4x^2 + v^2m^4y^2 + w^2n^4z^2 - 2(uvl^2m^2xy + vwm^2n^2yz + wun^2l^2zx) = 0.$$

Legt man bzgl. des Diagonalen-Dreiecks den Punkt  $Q$  in das Bild des Gergonne-Punktes bei einer Isoconjugation mit den Fixpunkten in den Tripolen der Vierecksseiten, so erhält man z.B. den Inkreis.

Diese Berührkegelschnitte erhält man auch als Ortslinie der vierten harmonischen Punkte zum dritten Schnitt von  $XX^\wedge$  mit der Kurve. Kurve und Kegelschnitt haben eine gemeinsame Tangente, die die Kurve im Schnitt mit der Polaren von  $Q$  schneidet.



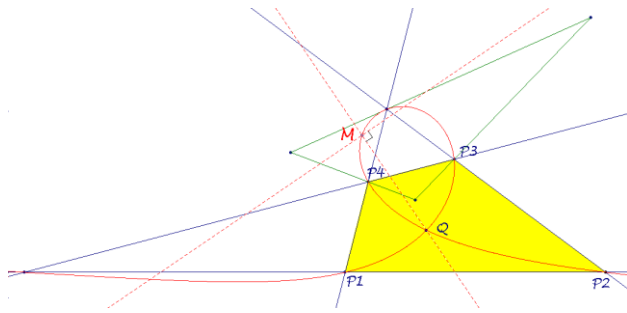
In dem Geradenbüschel eines Punktes kann man nach zwei Geraden fragen, die durch die „Isoconjugation for Lines“ aufeinander abgebildet werden. Diese Geradenpaare existieren nur für Punkte in den gelben Bereichen der obigen Abbildung. Ist dieser Punkt der Knoten der Kurve, sind diese Geraden die Tangenten. Für andere Punkte der Kurve geht eine dieser Geraden durch den Knoten  $Q$  und die andere ist Tangente an den obigen Kegelschnitt.



Weiterhin sei angemerkt: Die Tripole der Geraden des Vierseits bzgl. des Ceva-Dreiecks von  $Q$  liegen kollinear mit  $Q$ , damit ist eine Gerade des Büschels zu  $Q$  ausgezeichnet:

$$g_Q((v^2l^2 - w^2n^2)vw : (w^2n^2 - u^2l^2)wu : (u^2l^2 - v^2m^2)uv).$$

Ohne Berechnungen sei hier ein Beispiel angegeben: Zu dem Miquel-Punkt  $M$  eines Vierseits ( $EQF$ -Punkt  $QL-P1$ ) lässt sich eine Involution betrachten, bestehend aus einer Spiegelung an einer Geraden durch  $M$  und einer Spiegelung an einem Kreis um  $M$ , die Gegenecken des Vierseits vertauscht (bei Chris van Tienhoven als  $QL-Tf1$  angesprochen).



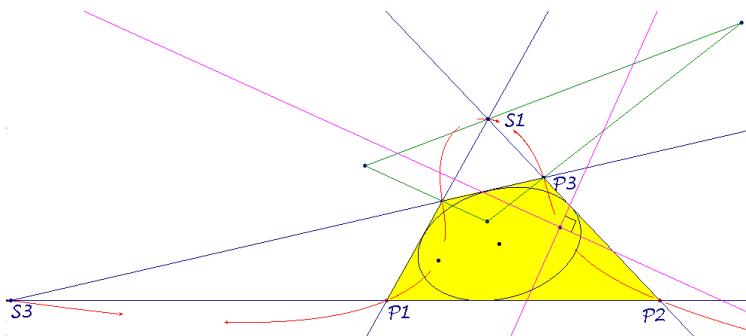
Legt man den Punkt  $Q$  in einen der beiden Fixpunkte dieser Involution, dann erhält man eine Kurve, die invariant unter dieser Involution ist, wobei für Kurvenpunkte die Involution mit der  $Q$ -Konjugation übereinstimmt. Der Miquel-Punkt  $M$  liegt auf der Kurve und die Verbindungsgerade  $MQ$  wird durch die „Isoconjugation for Lines“ auf eine Senkrechte zu  $MQ$  durch  $M$  abgebildet.

### Eine spezielle kubische Kurve

Es liegt nahe, nach Punkten zu suchen, die in ihrem Geradenbüschel ein orthogonales Paar von Gerade und Bildgerade bzgl. der „Isoconjugation for Lines“ enthalten. Die Ortslinie dieser Punkte hat die Gleichung

$$(-S_A x + S_B y + S_C z)l^2 x^2 + (S_A x - S_B y + S_C z)m^2 y^2 + (S_A x + S_B y - S_C z)n^2 z^2 + (a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2)xyz = 0.$$

Diese Kurve hat folgenden geometrischen Hintergrund: Sie ist die Ortslinie der Brennpunkte der Berührkegelschnitte des Vierseits ( $QL$ -Cul in  $EQF$ ). Sie enthält den Miquel-Punkt und ist invariant unter der im vorigen Abschnitt beschriebenen Involution, die die Brennpunkte vertauscht.



### Eine Punkt-Geraden-Abbildung

Betrachtet man zu orthogonalen Geradenpaaren im Büschel eines Punktes  $Q$  den Schnitt der Bildgeraden bei der „Isoconjugation for Lines“, so erhält man als Ortslinie eine Gerade:

$$Q(u:v:w) \rightarrow g_Q(l^2(-u^2 S_A + v(w+u)S_B + w(u+v)S_C))$$

$$: m^2(u(v+w)S_A - v^2S_B + w(u+v)S_C) : n^2(u(v+w)S_A + v(w+u)S_B - w^2S_C)$$

Vor dem Hintergrund der „Encyclopedia of Quadri-Figures“ von Chris van Tienhoven [2] seien einige Beispiele aufgezeigt:

- *QL-P1* (Miquel-Punkt): Die Bildgerade enthält den Miquel-Punkt und ist parallel zu den Geraden *QL-P3*, *QL-P4*, *QL-P5*, *QL-P6* und *QL-P2*, *QL-P20*.
- *QL-P2* (Morley-Punkt): Die Bildgerade ist parallel zu *QL-L1* (Newton-Gerade) und *QL-L4*.
- *QL-P7* (Newton-Steiner-Punkt): Die Bildgerade ist parallel zu den Geraden (s.o.) *QL-P3*, *QL-P4*, *QL-P5*, *QL-P6* und *QL-P2*, *QL-P20*.
- *QL-P10* (Höhenschnitt des Diagonalen-Dreiecks): Die Bildgerade ist die Newton-Gerade *QL-L1*.
- *QL-P17* (*QL*-Adjunct Quasi Circumcenter): Die Bildgerade geht durch den Miquel-Punkt *QL-P1* und ist senkrecht zu *QL-P1*, *QL-P9*.
- Die Bildgeraden von Punkten der Euler-Geraden des Diagonalen-Dreiecks *QL-L7* gehen alle durch einen festen Punkt der Newton-Geraden:

$$\left( \frac{S_B - S_C}{l^2} ; \frac{S_C - S_A}{m^2} ; \frac{S_A - S_B}{n^2} \right).$$

Bzgl. des Diagonalen-Dreiecks ist dieser Punkt das Bild des Steiner-Punktes (*X99*) bzgl. einer Isoconjugation mit den Fixpunkten in den Tripolen der Seiten des Vierecks.

- Die Bildgeraden von Punkten der Verbindungsgeraden *QL-P2*, *QL-P10* sind parallel zur Newton-Geraden.
- Die Bildgeraden von Punkten der Verbindungsgeraden des Miquel-Punkts *QL-P1* und des Höhenschnitts *QL-P10* des Diagonalen-Dreiecks gehen alle durch einen festen Punkt der Newton-Geraden:

$$\begin{aligned} & (m^2n^2(b^2(l^2 - m^2) + c^2(n^2 - l^2))(-a^2l^2 + S_Cm^2 + S_Bn^2) \\ & : n^2l^2(a^2(l^2 - m^2) + c^2(m^2 - n^2))(S_Cl^2 - b^2m^2 + S_An^2) \\ & : l^2m^2(a^2(n^2 - l^2) + b^2(m^2 - n^2))(S_Bl^2 + S_Am^2 - c^2n^2) \end{aligned}$$

Angemerkt sei: Spiegelt man einen Punkt am „polar circle“ des Diagonalen-Dreiecks (Ecke und Gegenseite sind Pol und Polare), dann erhält man zu dem Spiegelpunkt die gleiche Gerade.

## Literatur:

- [1] Bernard Gibert: Cubics in the Triangle Plane. – <http://perso.orange.fr/bernard.gibert/>.
- [2] Chris van Tienhoven: Encyclopedia of Quadri-Figures. – <http://www.chrisvantienhoven.nl/mathematics/encyclopedia.html>.