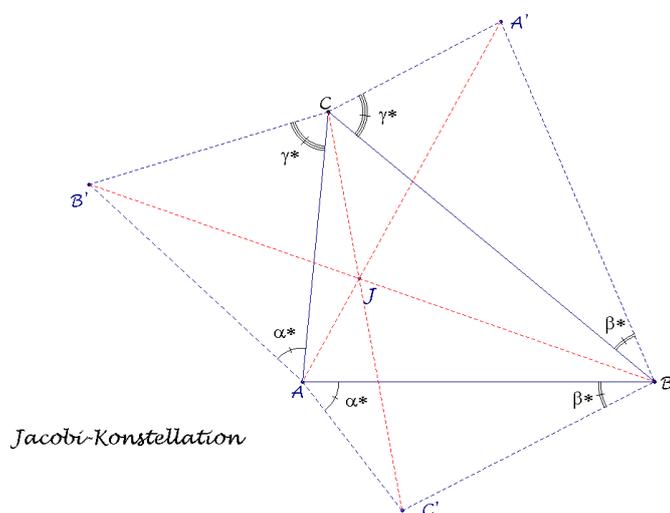


Jacobi-Konstellationen

Eckart Schmidt

Zeichnet man über den Seiten eines Bezugsdreiecks gleichseitige Dreiecke und verbindet die Spitzen der Aufsatzdreiecke mit den gegenüberliegenden Ecken des Bezugsdreiecks, so schneiden sich diese Verbindungsgeraden bekanntlich in einem Punkt, dem Fermat-Punkt des Dreiecks. Betrachtet man gleichschenklige Aufsatzdreiecke, so sind Spitzen- und Bezugsdreieck weiterhin perspektiv, und die Perspektivzentren liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel, der sogenannten Kiepert-Hyperbel. Nach einem Satz von Jacobi gilt eine weitere Verallgemeinerung: Wählt man die Aufsatzdreiecke derart, dass jeweils nur die Winkel an den Ecken des Bezugsdreiecks übereinstimmen, so sind die Ecktransversalen zu den Spitzen der Aufsatzdreiecke ebenfalls kopunktal. Diese Jacobi-Konstellationen sind Gegenstand der folgenden Ausarbeitung. – Gearbeitet wird in baryzentrischen Koordinaten des Bezugsdreiecks.



Perspektivzentrum J und Ceva-Punkt P

Über den Seiten eines Bezugsdreiecks ABC seien Aufsatzdreiecke ABC' , BCA' , CAB' gezeichnet mit den Basiswinkeln

$$\begin{aligned}\angle CAB' = \angle C'AB &= \alpha^*, & \angle ABC' = \angle A'BC &= \beta^*, \\ \angle BCA' = \angle B'CA &= \gamma^*,\end{aligned}$$

die also an den zugehörigen Ecken des Bezugsdreiecks ABC gleich groß sind. Dazu seien die paarweisen Summen der

Basiswinkel vorerst kleiner als 180° . Diese Figur sei als Jacobi-Konstellation angesprochen (Hinweise in [1] S. 55 und [2] S. 1218).

Hier sei eine analytische Behandlung in baryzentrischen Koordinaten vorbereitet. Die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes X erhält man bekanntlich aus den orientierten Flächeninhalten der Dreiecke BCX , CAX , ABX . Damit ergeben sich die Spitzen der Aufsatzdreiecke zu

$$A'(-a \sin \beta^* \sin \gamma^* : b \sin \beta^* \sin(\gamma + \gamma^*) : c \sin \gamma^* \sin(\beta + \beta^*)),$$

$$B'(a \sin \alpha^* \sin(\gamma + \gamma^*) : -b \sin \alpha^* \sin \gamma^* : c \sin \gamma^* \sin(\alpha + \alpha^*)),$$

$$C'(a \sin \alpha^* \sin(\beta + \beta^*) : b \sin \beta^* \sin(\alpha + \alpha^*) : -c \sin \alpha^* \sin \beta^*).$$

Bezugsdreieck ABC und Spitzendreieck $A'B'C'$ liegen dann perspektiv bzgl. des Punktes

$$J\left(\frac{1}{\cot \alpha + \cot \alpha^*} : \frac{1}{\cot \beta + \cot \beta^*} : \frac{1}{\cot \gamma + \cot \gamma^*}\right),$$

der hier als Perspektivzentrum der Jacobi-Konstellation bezeichnet sei.

Lotet man von den Spitzen auf die Seiten des Bezugsdreiecks, so erhält man die Ecken eines Ceva-Dreiecks zu dem Punkt

$$P(\tan \alpha^* : \tan \beta^* : \tan \gamma^*) = P(u : v : w).$$

Für alle Jacobi-Konstellationen eines Bezugsdreiecks nach obiger Konstruktion ergibt sich bei gleichen Tangens-Verhältnissen der Basiswinkel der gleiche Ceva-Punkt P . Die Spitzen der Aufsatzdreiecke liegen dann auf Senkrechten zu den Seiten in den Ecken des Ceva-Dreiecks von P . Gibt man diesem Ceva-Punkt P die baryzentrischen Koordinaten u, v, w , so ergeben sich für die möglichen Perspektivzentren J ($J \neq A, B, C, P$) Parameterdarstellungen in der Form

$$J\left(\frac{u}{uS_A + \mu S} : \frac{v}{vS_B + \mu S} : \frac{w}{wS_C + \mu S}\right).$$

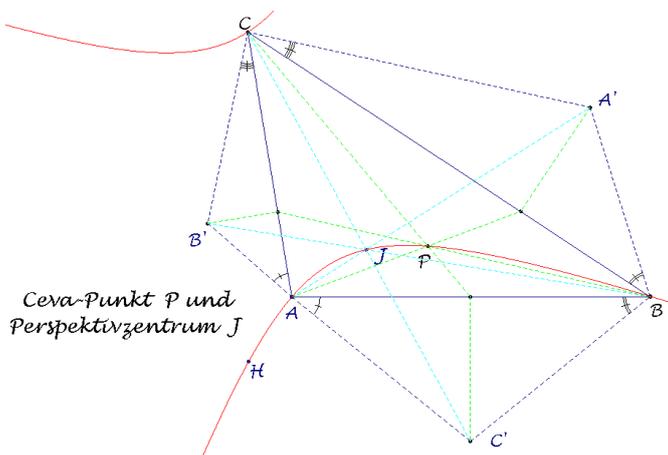
Dabei ist μ der Parameter mit

$$u = \mu \tan \alpha^*, \quad v = \mu \tan \beta^*, \quad w = \mu \tan \gamma^*.$$

S ist der doppelte Flächeninhalt des Bezugsdreiecks und

$$S_A = S \cot \alpha, \quad S_B = S \cot \beta, \quad S_C = S \cot \gamma$$

sind die häufig benutzten Conway-Abkürzungen [vgl. z.B. [3]].



Ceva-Punkt P und Perspektivzentrum J legen einen Umkegelschnitt des Bezugsdreiecks fest mit der Gleichung

$$w(uS_A - vS_B)xy + u(vS_B - wS_C)yz + v(wS_C - uS_A)zx = 0,$$

die den Parameter nicht mehr enthält. Damit liegen zu festem Ceva-Punkt P die Perspektivzentren J möglicher Jacobi-Konstellationen auf diesem Umkegelschnitt, der auch den Höhenschnitt

$$H(S_B S_C : S_C S_A : S_A S_B)$$

enthält und somit eine gleichseitige Umhyperbel ist. Das Zentrum

$$\begin{aligned} Z(u(S_B v - S_C w)(S_A u(v - w) + S_B v(w + u) - S_C w(u + v)) \\ : v(S_C w - S_A u)(-S_A u(v + w) + S_B v(w - u) + S_C w(u + v)) \\ : w(S_A u - S_B v)(S_A u(v + w) - S_B v(w + u) + S_C w(u - v)) \end{aligned}$$

liegt somit auf dem Neun-Punkte-Kreis.

Ein Beispiel: Wählt man als Ceva-Punkt die Inkreismitte $I(a:b:c)$, so liegen die Spitzen der Aufsatzdreiecke auf Senkrechten zu den Seiten, die diese im Verhältnis der angrenzenden Seiten teilen. Die zugehörige HI -Hyperbel wird auch als Feuerbach-Hyperbel bezeichnet und hat die Gleichung

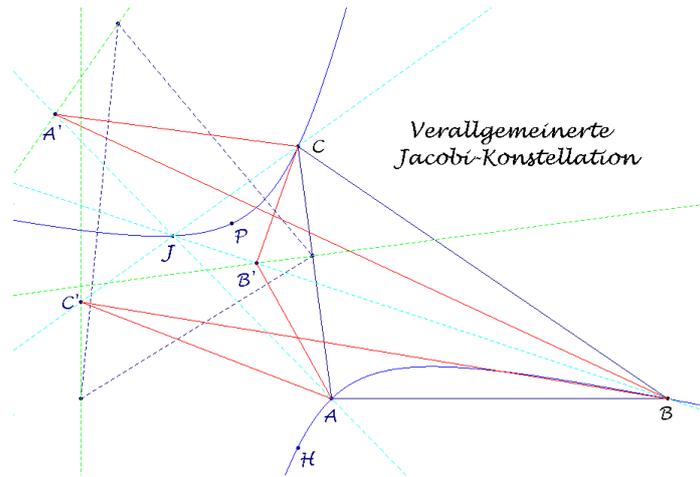
$$a(s-a)(b-c)yz + b(s-b)(c-a)zx + c(s-c)(a-b)xy = 0,$$

wobei s den halben Umfang des Bezugsdreiecks bezeichnet. Auf dieser Hyperbel liegen weiterhin der Nagel-Punkt $X(8)$, der Gergonne-Punkt $X(7)$ und der Mittenpunkt $X(9)$. Zu Namen und ETC-Index der Punkte sei auf die Internet-Seiten [4], [5] hingewiesen. Jeder dieser Punkte ist mit der Inkreismitte als Ceva-Punkt mögliches Perspektivzentrum einer Jacobi-Konstellation.

Jacobi-Konstellationen

Eine Jacobi-Konstellation sei jetzt festgelegt durch einen vom Höhenschnitt verschiedenen Ceva-Punkt P und ein Perspektivzentrum J auf der gleichseitigen HP -Umhyperbel, gekennzeichnet durch den Parameter μ . Für den Höhenschnitt H als Ceva-Punkt versagt diese Festlegung; in einem späteren Abschnitt wird darauf eingegangen.

Diese winkelunabhängige Festlegung einer Jacobi-Konstellation geht über die ursprüngliche Ansprache hinaus: Die Spitzen erhält man jetzt als Schnitte der Seiten-Senkrechten in den Ecken des Ceva-Dreiecks von P und den Ecktransversalen des Perspektivzentrums J . Damit müssen die Aufsatzdreiecke nicht mehr alle außen bzw. innen liegen. Auch die Gleichheit der Basiswinkel an den Ecken des Bezugsdreiecks muss nicht mehr erfüllt sein; ihre Schenkelgeraden liegen aber immer noch isogonal, d.h. symmetrisch bzgl. der zugehörigen Winkelhalbierenden des Bezugsdreiecks.



Die Spitzen der Aufsatzdreiecke erhalten jetzt folgende Koordinaten:

$$A'(-a^2vw : v(wS_C + \mu S) : w(vS_B + \mu S)),$$

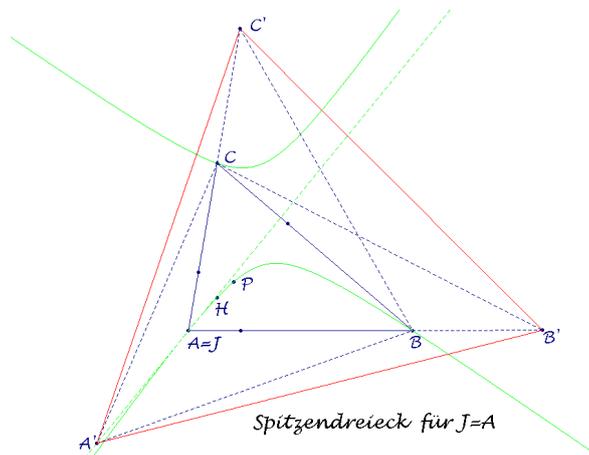
$$B'(u(wS_C + \mu S) : -b^2wu : w(uS_A + \mu S)),$$

$$C'(u(vS_B + \mu S) : v(uS_A + \mu S) : -c^2uv).$$

Spiegelt man die Aufsatzdreiecke an den Seiten, so wechselt der Parameter μ das Vorzeichen. Die Verbindungsgeraden der beiden zugehörigen Perspektivzentren haben einen gemeinsamen Punkt

$$Q(u(vS_B + wS_C) : v(wS_C + uS_A) : w(uS_A + vS_B)),$$

den Pol der Sekanten HP .



Es seien einige Entartungen der Spitzendreiecke angesprochen: Liegt das Perspektivzentrum J im Höhenschnitt H , so sind die Spitzen Fernpunkte; liegt J im Ceva-Punkt P , so ist das Spitzendreieck das Ceva-Dreieck von P . Fällt das Perspektivzentrum in eine Ecke des Bezugsdreiecks, z.B. $J=A$, so liegt die zugehörige Spitze auf der Tangente in diesem Punkt an die HP -Hyperbel:

$$A'(a^2vw : (S_A u - S_C w)v : (S_A u - S_B v)w),$$

$$B'(S_A u - S_C w : b^2w : 0), \quad C'(S_A u - S_B v : 0 : c^2v).$$

In zwei Fällen entartet das Spitzendreieck kollinear auf den Achsen eines Berührkegelschnitts mit dem Brianchon-Punkt P und dem Zentrum $(u(v+w) : v(w+u) : w(u+v))$.

Es ist rechnerisch sehr aufwändig, im allgemeinen Fall weitere geometrische Eigenschaften der Jacobi-Konstellationen aufzuzeigen und zu interpretieren wie z.B. die Kollinearität der Schwerpunkte der Spitzendreiecke. Zu den folgenden Spezialisierungen (vgl. auch [6], S. 222) seien ergänzend noch Berechnungsgrundlagen angegeben für die Umkreismitten der Aufsatzdreiecke

$$M_a(-a^2 : S_C + \frac{v+w}{vw-\mu^2} S\mu : S_B + \frac{v+w}{vw-\mu^2} S\mu),$$

$$M_b(S_C + \frac{w+u}{wu-\mu^2} S\mu : -b^2 : S_A + \frac{w+u}{wu-\mu^2} S\mu),$$

$$M_c(S_B + \frac{u+v}{uv-\mu^2} S\mu : S_A + \frac{u+v}{uv-\mu^2} S\mu : -c^2)$$

und das Radialzentrum der zugehörigen Umkreise

$$R\left(\frac{v+w}{Svw + S_A(v+w)\mu - S\mu^2} : \frac{w+u}{Swu + S_A(w+u)\mu - S\mu^2} : \frac{u+v}{Suv + S_A(u+v)\mu - S\mu^2}\right)$$

Gleichseitige Aufsatzdreiecke

In diesem Abschnitt seien bekannte Eigenschaften der Torricelli-Konstellation zusammengestellt (zu den einzelnen Stichworten siehe z.B. [5]): Für gleichseitige Aufsatzdreiecke über den Seiten ist der Ceva-Punkt der Schwerpunkt $G(1:1:1)$. Dann muss das Perspektivzentrum auf der HG -Umhyperbel, der sogenannten Kiepert-Hyperbel liegen mit der Gleichung

$$(S_A - S_B)xy + (S_B - S_C)yz + (S_C - S_A)zx = 0.$$

Mit dem Parameter $\mu = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ erhält man das

Perspektivzentrum im Fermat-Punkt

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{3}S_A + S} : \frac{1}{\sqrt{3}S_B + S} : \frac{1}{\sqrt{3}S_C + S}\right) = X(13)$$

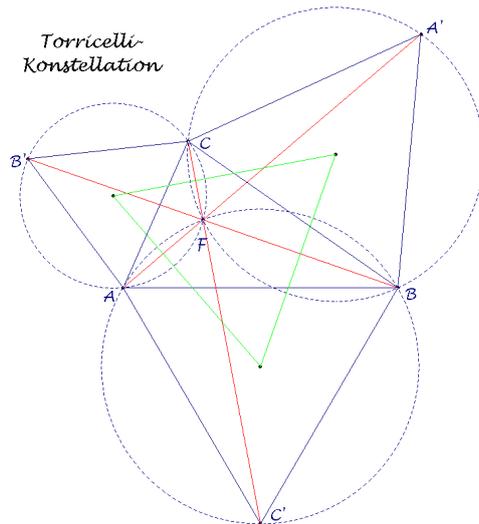
Die bekanntesten geometrischen Eigenschaften der Torricelli-Konstellation seien hier kurz zusammengestellt:

(1) Die Strecken AA' , BB' , CC' sind gleich lang:

$$AA' = BB' = CC' = \sqrt{S_A + S_B + S_C + \sqrt{3}S} = \sqrt{S(\cot \omega + \cot 60^\circ)}$$

(ω Brocard-Winkel).

(2) Die Geraden AA' , BB' , CC' schneiden sich unter Winkeln von 60° .



Zu ergänzen sind die Ergebnisse des Satzes von Napoleon:

(3) Die Umkreise der gleichseitigen Aufsatzdreiecke gehen durch den Fermat-Punkt.

(4) Die zugehörigen Umkreismitten

$$M_a(-a^2 : S_C + \sqrt{3}S : S_B + \sqrt{3}S), \quad M_b(S_C + \sqrt{3}S : -b^2 : S_A + \sqrt{3}S), \\ M_c(S_B + \sqrt{3}S : S_A + \sqrt{3}S : -c^2)$$

bilden ein gleichseitiges Dreieck (Napoleon-Dreieck).

(5) Das Napoleon-Dreieck liegt perspektiv zum Bezugsdreieck, Perspektivzentrum ist der Napoleon-Punkt

$$N\left(\frac{1}{S_A + \sqrt{3}S} : \frac{1}{S_B + \sqrt{3}S} : \frac{1}{S_C + \sqrt{3}S}\right) = X(17).$$

Der Fermat-Punkt – auch Torricelli-Punkt – wird als erster isogonischer Punkt bezeichnet. Den zweiten isogonischen Punkt $X(14)$ erhält man entsprechend, wenn man die gleichseitigen Dreiecke nach innen anträgt. Die beiden isogonischen Punkte, die hier auch als erster und zweiter Fermat-Punkt angesprochen seien, sind die isogonalen Bilder der isodynamischen Punkte $X(15)$ und $X(16)$, den gemeinsamen Punkten der Apollonius-Kreise.

Als weitere Zusammenhänge wären anzusprechen:

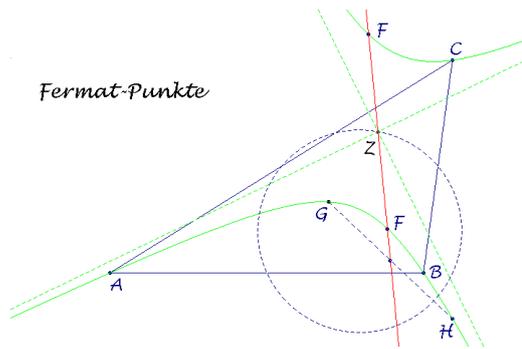
(6) Die beiden Fermat-Punkte sind kollinear mit dem Lemoine-Punkt $L(a^2 : b^2 : c^2) = X(6)$ und der Mitte von Höhenschnitt und Schwerpunkt

$$(S^2 + 3S_B S_C : S^2 + 3S_C S_A : S^2 + 3S_A S_B) = X(381).$$

(7) Die Mitte der Fermat-Punkte

$$((S_B - S_C)^2 : (S_C - S_A)^2 : (S_A - S_B)^2) = X(115)$$

liegt auf dem Neun-Punkte-Kreis und ist Zentrum der Kiepert-Hyperbel.



Ähnliche Aufsatzdreiecke

Eine erste Verallgemeinerung der Torricelli-Konstellation könnte darin bestehen, ähnliche Aufsatzdreiecke ABC' , $AB'C$, $A'BC$ über den Seiten zu betrachten. Die Basiswinkel α^* , β^* , γ^* hätten dann die Summe 180° ; dies ist in den eingangs dargelegten Berechnungsgrundlagen zu berücksichtigen, z.B. in der Form

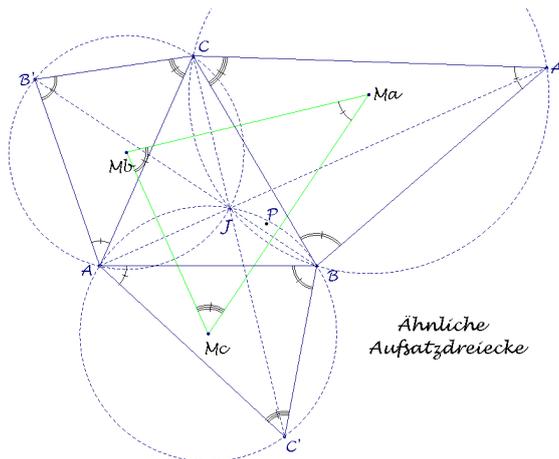
$$\tan \alpha^* + \tan \beta^* + \tan \gamma^* = \tan \alpha^* \tan \beta^* \tan \gamma^*.$$

Nicht zu jedem Ceva-Punkt $P(u:v:w)$ gibt es diese Konstellation mit ähnlichen Aufsatzdreiecken. Das zugehörige Perspektivzentrum erfordert einen Parameter μ mit

$$\mu^2 = \frac{uvw}{u+v+w}, \text{ d.h. } \frac{uvw}{u+v+w} > 0.$$

Dies ist nur im Innern des Bezugsdreiecks der Fall und in den Scheitelwinkel-Gebieten der Innenwinkel.

Die Eigenschaften der Torricelli-Konstellation gelten jetzt teilweise in modifizierter Form ([6], S. 222):



$$(1) \quad AA' : BB' : CC' = \frac{1}{\sin \alpha^*} : \frac{1}{\sin \beta^*} : \frac{1}{\sin \gamma^*}.$$

(2) Die Ecktransversalen des Perspektivzentrums schneiden sich unter den Winkeln

$$\angle C'JB = \alpha^*, \quad \angle A'JC = \beta^*, \quad \angle B'JA = \gamma^*.$$

(3) Die Umkreise der Aufsatzdreiecke gehen durch das Perspektivzentrum J .

(4) Das Dreieck $M_a M_b M_c$ der Umkreismitten

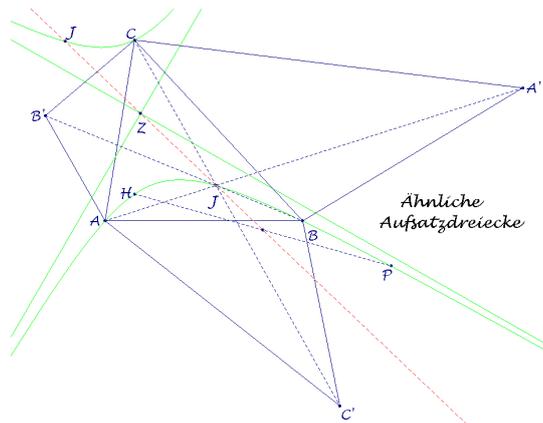
$$M_a(-\cot \beta - \cot \gamma : \tan \alpha^* + \cot \gamma : \tan \alpha^* + \cot \beta),$$

$$M_b(-\cot \gamma - \cot \alpha : \tan \beta^* + \cot \alpha : \tan \beta^* + \cot \gamma),$$

$$M_c(-\cot \alpha - \cot \beta : \tan \gamma^* + \cot \beta : \tan \gamma^* + \cot \alpha)$$

der Aufsatzdreiecke ist den Aufsatzdreiecken ABC' , $AB'C$, $A'BC$ ähnlich.

(5) Die Perspektivität des Dreiecks $M_aM_bM_c$ zum Bezugsdreieck kann nicht bestätigt werden!



Trägt man die ähnlichen Aufsatzdreiecke nach innen ab, so erhält man ein zweites Perspektivzentrum und entsprechende Ergebnisse.

(6) Die beiden Perspektivzentren liegen kollinear mit der Mitte von Höhenschnitt H und Ceva-Punkt P :

$$\left(\tan \alpha^* \left(1 + \frac{\tan \beta^* \tan \gamma^*}{\tan \beta \tan \gamma}\right) : \tan \beta^* \left(1 + \frac{\tan \gamma^* \tan \alpha^*}{\tan \gamma \tan \alpha}\right) : \tan \gamma^* \left(1 + \frac{\tan \alpha^* \tan \beta^*}{\tan \alpha \tan \beta}\right)\right).$$

(7) Die Mitte der beiden Perspektivzentren liegt auf dem Neun-Punkte-Kreis und ist das Zentrum der gleichseitigen HP -Umhyperbel.

Gleichschenklige Aufsatzdreiecke

Eine andere Verallgemeinerung der Torricelli-Konstellation besteht darin, gleichschenklige Aufsatzdreiecke mit gleichen Basiswinkeln über den Seiten zu zeichnen. Dazu muss der Ceva-Punkt P wieder im Schwerpunkt G und das Perspektivzentrum J auf der Kiepert-Hyperbel liegen. Ausführliche Behandlungen dieser Konstellation finden sich in [7] und weitergehend in [3].

Der kennzeichnende Parameter μ für das Perspektivzentrum ist der Kotangens der gemeinsamen Basiswinkel der Aufsatzdreiecke:

$$J\left(\frac{1}{S_A + S\mu}, \frac{1}{S_B + S\mu}, \frac{1}{S_C + S\mu}\right).$$

Die Spitzendreiecke werden auch als Kiepert-Dreiecke angesprochen; ihre Ecken sind

$$A'(-a^2 : S_C + S\mu : S_B + S\mu)$$

$$B'(S_C + S\mu : -b^2 : S_A + S\mu)$$

$$C'(S_B + S\mu : S_A + S\mu : -c^2).$$

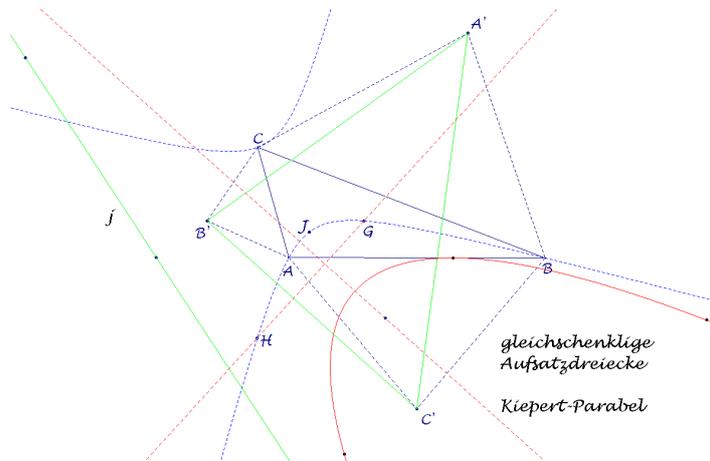
Bekannt ist der folgende Zusammenhang: Betrachtet man zu den Kiepert-Dreiecken nicht die Perspektivzentren J , sondern die Perspektivachsen

$$j: \frac{x}{S + 2a^2\mu + S\mu^2} + \frac{y}{S + 2b^2\mu + S\mu^2} + \frac{z}{S + 2c^2\mu + S\mu^2} = 0,$$

so hüllen diese die Kiepert-Parabel ein zu der Gleichung:

$$\lambda^2 x^2 + \mu^2 y^2 + \nu^2 z^2 - 2\lambda\mu xy - 2\mu\nu yz - 2\nu\lambda zx = 0$$

$$\text{mit } \lambda = S_B - S_C, \quad \mu = S_C - S_A, \quad \nu = S_A - S_B.$$



Die Kiepert-Parabel ist ein Berührkegelschnitt mit dem Steiner-Punkt $X(99)$ als Brianchon-Punkt und dem Brennpunkt $X(110)$, Leitlinie ist die Euler-Gerade.

Die Torricelli-Konstellation erhält man für $\mu = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Hier seien weitere Spezialfälle der Kiepert-Dreiecke angesprochen:

(i) Für $\mu = \pm \cot 30^\circ = \pm\sqrt{3}$ sind die Spitzendreiecke (und die Mittendreiecke $M_a M_b M_c$) gleichseitig; die Perspektivzentren liegen in den Napoleon-Punkten

$$X(17,18) = \left(\frac{1}{S_A \pm \sqrt{3}S} : \frac{1}{S_B \pm \sqrt{3}S} : \frac{1}{S_C \pm \sqrt{3}S} \right).$$

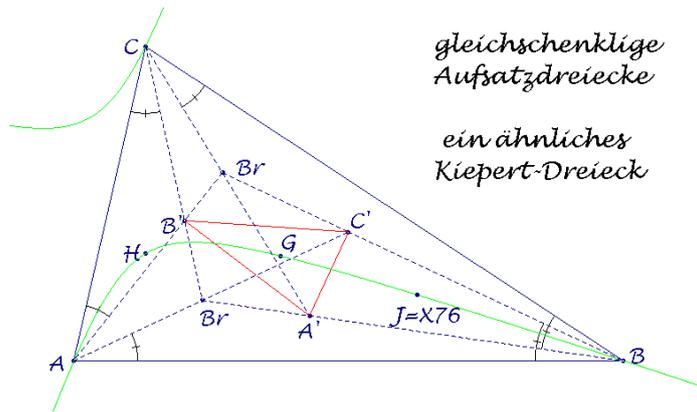
(ii) Liegt das Perspektivzentrum im Schwerpunkt, so erhält man das Seitenmittendreieck als zum Bezugsdreieck ähnliches Spitzendreieck. Aber auch für

$$\mu = -\frac{S_A + S_B + S_C}{S} = -\cot \omega \quad (\omega \text{ Brocard-Winkel})$$

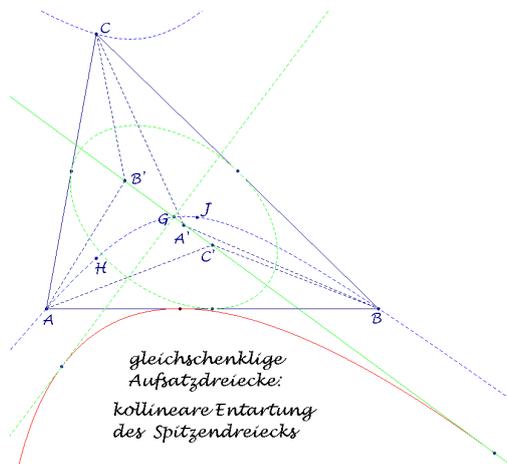
ist das Spitzendreieck dem Bezugsdreieck ähnlich. Das Perspektivzentrum ist der dritte Brocard-Punkt

$$X(76) = (b^2 c^2 : c^2 a^2 : a^2 b^2),$$

das isotome Bild des Lemoine-Punktes.



(iii) Für $\mu = -\cot \omega \pm \sqrt{\cot^2 \omega - 3}$ (ω Brocard-Winkel) entartet das Spitzendreieck kollinear auf den Achsen der einbeschriebenen Steiner-Ellipse, die gleichzeitig die Tangenten vom Schwerpunkt G an die Kiepert-Parabel sind.

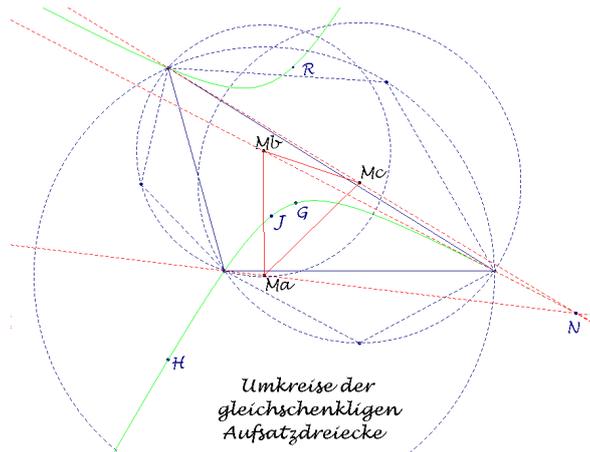


Von den Eigenschaften der Torricelli-Konstellation bleibt in Jacobi-Konstellationen mit gleichschenkligen Aufsatzdreiecken nicht mehr viel übrig. Hier zwei Anmerkungen:

Zu (3): Die Umkreise der gleichschenkligen Aufsatzdreiecke müssen sich nicht mehr in einem Punkt schneiden, aber das Radialzentrum

$$R\left(\frac{1}{S + 2S_A\mu - S\mu^2}, \frac{1}{S + 2S_B\mu - S\mu^2}, \frac{1}{S + 2S_C\mu - S\mu^2}\right)$$

dieser drei Kreise ist ein Punkt der Kiepert-Hyperbel im zweiten Schnitt mit der Euler-Geraden des zugehörigen Mitten-Dreiecks $M_aM_bM_c$.



Zu (5): Das Dreieck der Umkreismitten

$$M_a(-a^2(\mu^2 - 1) : S_C(\mu^2 - 1) - 2S\mu : S_B(\mu^2 - 1) - 2S\mu),$$

$$M_b(S_B(\mu^2 - 1) - 2S\mu : -b^2(\mu^2 - 1) : S_A(\mu^2 - 1) - 2S\mu),$$

$$M_c(S_C(\mu^2 - 1) - 2S\mu : S_A(\mu^2 - 1) - 2S\mu : -c^2(\mu^2 - 1))$$

der Aufsatzdreiecke liegt perspektiv zum Bezugsdreieck;
 Perspektivzentrum ist

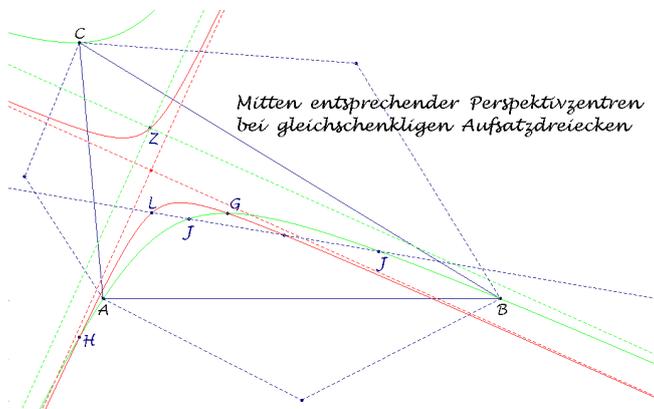
$$N\left(\frac{1}{S_A(\mu^2 - 1) - 2S\mu} : \frac{1}{S_B(\mu^2 - 1) - 2S\mu} : \frac{1}{S_C(\mu^2 - 1) - 2S\mu}\right).$$

Zu (6): Die Perspektivzentren zu $\pm\mu$ sind kollinear mit dem Lemoine-Punkt $L=Q$.

Zu (7): Die Mitten der Perspektivzentren zu $\pm\mu$ liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel durch den Höhenschnitt H , den Schwerpunkt $G=P$, den Lemoine-Punkt $L=Q$ und das Zentrum Z der Kiepert-Hyperbel. Die Asymptoten sind parallel zu denen der Kiepert-Hyperbel. Die Gleichung dieser Hyperbel ergibt sich zu

$$(S_B - S_C)(S_A x^2 + (S_\omega + a^2)yz) + (S_C - S_A)(S_B y^2 + (S_\omega + b^2)zx) + (S_A - S_B)(S_C z^2 + (S_\omega + c^2)xy) = 0$$

$$\text{mit } S_\omega = S_A + S_B + S_C = S \cot \omega \quad (\omega \text{ Brocard-Winkel}).$$

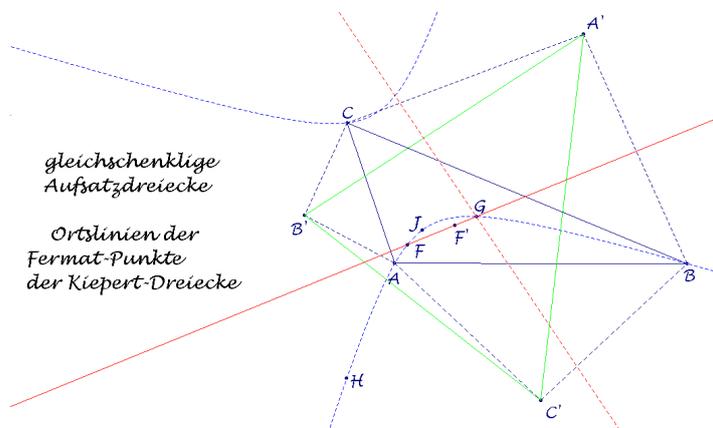


Betrachtet man die Gesamtheit der Kiepert-Dreiecke, so haben sie den gleichen Schwerpunkt G wie das Bezugsdreieck. Die Seitenmitten bewegen sich auf kopunktalen Geraden durch die

Mitte des Neun-Punkte-Kreises. Die Fermat-Punkte F' der Kiepert-Dreiecke liegen auf einer Geraden durch den Schwerpunkt G und den Fermat-Punkt F des Bezugsdreiecks; diese Gerade hat die Gleichung

$$(S_B - S_C)(S + \sqrt{3}S_A)x + (S_C - S_A)(S + \sqrt{3}S_B)y + (S_A - S_B)(S + \sqrt{3}S_C)z = 0$$

Auf dieser Geraden liegen auch die zweiten isodynamischen Punkte der Kiepert-Dreiecke, da der erste Fermat-Punkt und der zweite isodynamische Punkt immer mit dem Schwerpunkt kollinear sind. Entsprechendes gilt für den zweiten Fermat-Punkt und den ersten isodynamischen Punkt der Kiepert-Dreiecke.



Betrachtet man ergänzend die Fermat-Punkte der gleichschenkligen Aufsatzdreiecke, so bilden sie ein gleichseitiges Dreieck, das Napoleon-Dreieck, denn alle gleichschenkligen Dreiecke über einer festen Basis haben den gleichen Fermat-Punkt in der Umkreismitte des gleichseitigen Spezialfalls.

Abschließend sei erwähnt, dass der Umkegelschnitt der Ceva-Dreiecke von $P=G$ und J auch Mittenkegelschnitt der Punkte A, B, C, J bzw. A, B, C, G ist und damit das Zentrum der Kiepert-Hyperbel enthält.

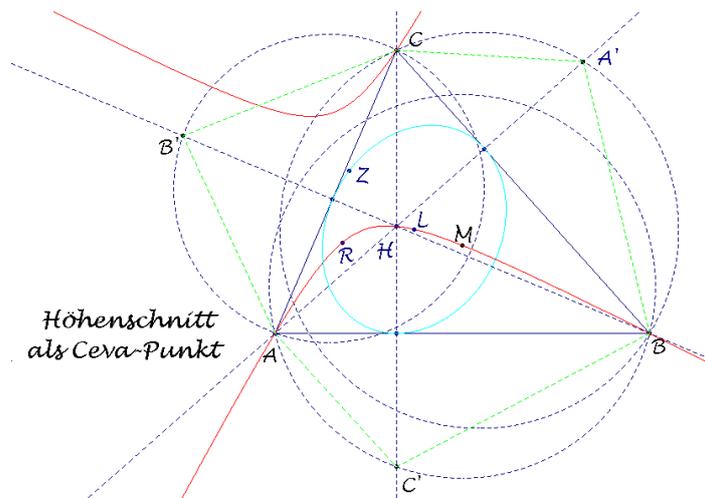
Höhenschnitt als Ceva-Punkt

Die Festlegung einer Jacobi-Konstellation durch Ceva-Punkt und Perspektivzentrum versagt, wenn der Höhenschnitt als Ceva-Punkt gewählt wird. Dennoch lassen sich Jacobi-Konstellationen nach der ursprünglichen winkelbezogenen Festlegung betrachten. Die Spitzen A', B', C' teilen die Höhen AH_a, BH_b, CH_c dann im gleichen Verhältnis. Wählt man dieses Teilverhältnis als Parameter τ , so ergeben sich die Spitzen zu:

$$A'(a^2 : S_C\tau : S_B\tau), \quad B'(S_C\tau : b^2 : S_A\tau), \quad C'(S_B\tau : S_A\tau : c^2).$$

Einige Eigenschaften der Torricelli-Konstellation können hier wieder aufgegriffen werden:

Zu (1):
$$AA' : BB' : CC' = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$



Zu (3) Das Radialzentrum der drei Umkreise der Aufsatzdreiecke

$$R\left(\frac{a^2}{S^2 + S_B S_C (1 + \tau)} : \frac{b^2}{S^2 + S_C S_A (1 + \tau)} : \frac{c^2}{S^2 + S_A S_B (1 + \tau)}\right)$$

liegt auf der gleichseitigen Umhyperbel durch die Umkreismitte, der sogenannten Jerabek-Hyperbel, sie ist das isogonale Bild der Euler-Geraden und hat die Gleichung

$$c^2 S_C (S_A - S_B) xy + b^2 S_B (S_C - S_A) zx + a^2 S_A (S_B - S_C) yz = 0.$$

Das Zentrum der Jerabek-Hyperbel $X(125)$ liegt auf dem Berührkegelschnitt mit dem Höhenschnitt als Brianchon-Punkt. Auf den Achsen dieses Berührkegelschnitts entarten die Spitzendreiecke kollinear.

Der Höhenschnitt als Ceva-Punkt ist gleichzeitig Perspektivzentrum aller zugehörigen Jacobi-Konstellationen. Die Perspektivachsen zu Spitzendreieck und Bezugsdreieck hüllen eine Berührparabel ein, ein Analogon zur Kiepert-Hyperbel. Aus den Gleichungen der Perspektivachsen

$$\begin{aligned} & S_A (S_B - S_C) (S^2 - S_B S_C (1 + \tau))^2 x \\ & + S_B (S_C - S_A) (S^2 - S_C S_A (1 + \tau))^2 y \\ & + S_C (S_A - S_B) (S^2 - S_A S_B (1 + \tau))^2 z = 0 \end{aligned}$$

ergibt sich als Einhüllende eine Berührparabel zu der Gleichung

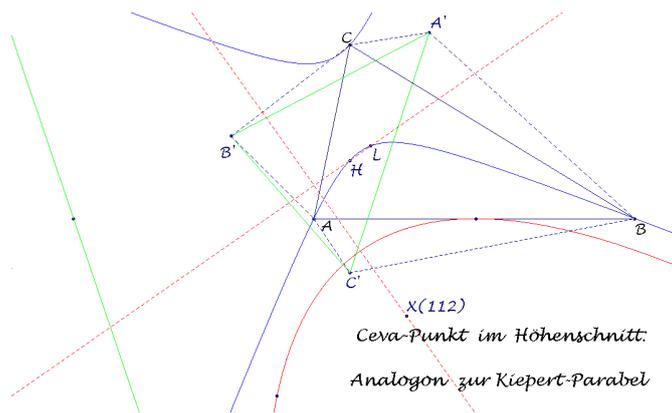
$$\lambda^2 x^2 + \mu^2 y^2 + \nu^2 z^2 - 2\lambda\mu xy - 2\mu\nu yz - 2\nu\lambda zx = 0$$

$$\text{mit } \lambda = S_A (S_B - S_C), \quad \mu = S_B (S_C - S_A), \quad \nu = S_C (S_A - S_B).$$

Die Perspektivachsen sind gleichzeitig Tripolaren zu Punkten der Euler-Geraden und der Brianchon-Punkt der Berührparabel ist der Tripol der Euler-Geraden $X(648)$. Damit ergibt sich der Brennpunkt zu

$$\left(\frac{a^2}{S_A (S_B - S_C)} : \frac{b^2}{S_B (S_C - S_A)} : \frac{c^2}{S_C (S_A - S_B)}\right) = X(112).$$

Die Leitlinie ist die Verbindungsgerade von Höhenschnitt und Lemoine-Punkt.

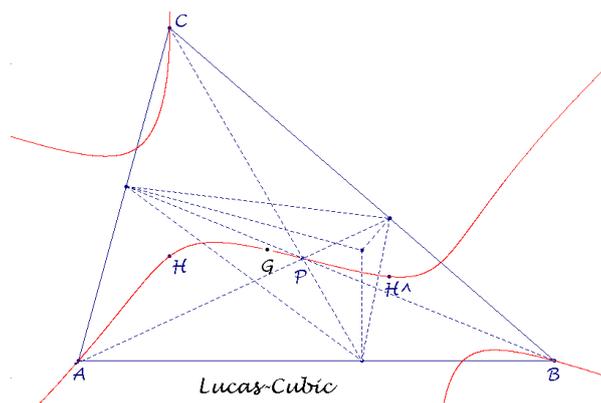


Die Seitenmitten der Spitzendreiecke liegen wieder auf kopunktalen Geraden durch die Mitte des Neun-Punkte-Kreises. Darüber hinaus ergeben die Schwerpunkte der Spitzendreiecke eine Gerade durch die Schwerpunkte $G=X(2)$ und $X(51)$ des Bezugsdreiecks und seines Höhenfußpunkt-dreiecks. Diese Gerade hat die Gleichung

$$(S_B - S_C)(S_A S_\omega + S^2)x + (S_C - S_A)(S_B S_\omega + S^2)y + (S_A - S_B)(S_C S_\omega + S^2)z = 0.$$

Ceva-Punkte auf der Lucas-Cubic

Der Schwerpunkt und der Höhenschnitt als Ceva-Punkt sind dadurch ausgezeichnet, dass ihr Ceva-Dreieck gleichzeitig Fußpunkt-Dreieck ist. Punkte mit dieser Eigenschaft liegen bekanntlich auf der Lucas-Cubic [5], einer Kurve dritter Ordnung („isocubic“), isotom (\wedge) invariant mit dem Pivot-Punkt im isotomen Bild des Höhenschnitts $H^\wedge=X(69)$.



Die Lucas-Cubic hat die Gleichung

$$S_A x(y^2 - z^2) + S_B y(z^2 - x^2) + S_C z(x^2 - y^2) = 0.$$

Auf ihr liegen z.B. der Schwerpunkt $G=X(2)$, der Höhenschnitt $H=X(4)$, der Gergonne-Punkt $X(7)$, der Nagel-Punkt $X(8)$ und der DeLongchamps-Punkt $X(20)$. Die Ceva-Dreiecke dieser Punkte sind Fußpunkt-Dreiecke von Punkten der Darboux-Cubic [5].

Für Jacobi-Konstellationen, deren Ceva-Punkt P auf der Lucas-Cubic liegt, lässt sich nachweisen, dass das Radialzentrum R der

Umkreise der Aufsatzdreiecke auf der gleichseitigen *HP*-Umhyperbel liegt.

Weiterhin lässt sich zu Ceva-Punkten $P \neq G$ auf der Lucas-Cubic ein Analogon zur Kiepert-Parabel aufzeigen, denn die Perspektivachsen der Spitzendreiecke bzgl. des Bezugsdreiecks hüllen eine Berührparabel ein zu der Gleichung

$$\lambda^2 x^2 + \mu^2 y^2 + \nu^2 z^2 - 2\lambda\mu xy - 2\mu\nu yz - 2\nu\lambda zx = 0$$

$$\text{mit } \lambda = v - w, \quad \mu = w - u, \quad \nu = u - v.$$

Diese Parabel sei nach dem Ceva-Punkt der zugehörigen Jacobi-Konstellation als *P*-Parabel bezeichnet; die *G*-Parabel ist dann die Kiepert-Parabel, die *H*-Parabel wurde im vorigen Abschnitt aufgezeigt.

Bildet man den Fernpunkt $(v-w : w-u : u-v)$ der Tripolaren von P^\wedge isotom ab, erhält man

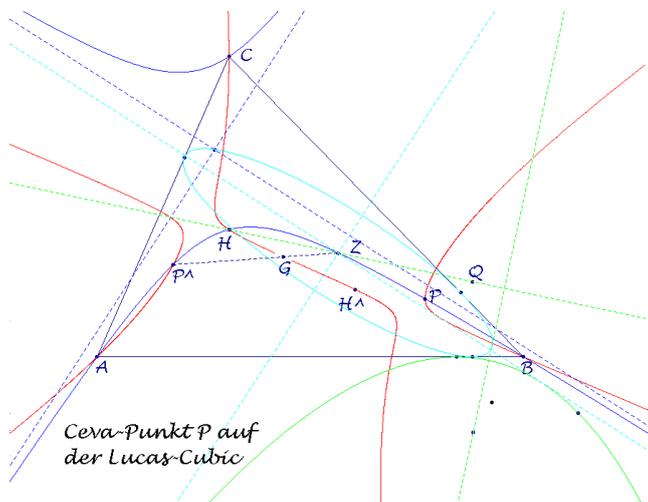
$$\text{den Brianchon-Punkt } \left(\frac{1}{v-w} : \frac{1}{w-u} : \frac{1}{u-v} \right),$$

bildet man diesen Fernpunkt isogonal ab, erhält man

$$\text{den Brennpunkt } \left(\frac{a^2}{v-w} : \frac{b^2}{w-u} : \frac{c^2}{u-v} \right).$$

Die Wallace/Simson-Gerade des Brennpunktes liefert die Scheiteltangente, eine Parallele durch den Höhenschnitt ergibt die Leitlinie mit der Gleichung

$$S_A(v-w)x + S_B(w-u)y + S_C(u-v)z = 0.$$



Damit ergibt sich eine geometrisch sehr beziehungsreiche Konstellation: Die Leitlinie der *P*-Parabel muss durch den Höhenschnitt *H* gehen, enthält aber auch den Punkt *Q*, dessen Fußpunktendreieck das Ceva-Dreieck von *P* ist. Weiterhin liegt auf der Leitlinie das Zentrum des Berührkegelschnitts mit dem Brianchon-Punkt *P*, auf dessen Achsen die Spitzendreiecke kollinear entarten. Diese Achsen sind somit Tangenten an die Berührparabel und verlaufen parallel zu den Achsen der gleichseitigen *HP*-Umhyperbel, deren Zentrum auf dem Berührkegelschnitt liegt. Weiterhin ist das Zentrum des Berührkegelschnitts ein Punkt der *HP*-Umhyperbel und bildet mit P^\wedge ein Nagelsches Punktepaar.

Die Tripolaren von Punkten einer Geraden durch den Schwerpunkt G hüllen allgemein eine Berührparabel ein, deren Brianchon-Punkt der Tripol der Geraden ist. Für die P -Parabel ($P \neq G$) einer Jacobi-Konstellation ist dies die Gerade PG mit der Gleichung

$$(v-w)x + (w-u)y + (u-v)z = 0.$$

Die Gerade PG schneidet die Lucas-Cubic in einem weiteren Punkt

$$\begin{aligned} P' &(-a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 + 2S_A(uv + vw + wu)) \\ &: a^2u^2 - b^2v^2 + c^2w^2 + 2S_B(uv + vw + wu) \\ &: a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 + 2S_C(uv + vw + wu). \end{aligned}$$

Für diesen Ceva-Punkt P' ergibt sich somit die gleiche P -Parabel. So stimmen z.B. die P -Parabeln des Höhenschnitts $H=X(4)$ und des DeLongchamps-Punktes $X(20)$ überein. Weiterhin liefert nicht nur der Schwerpunkt als Ceva-Punkt die Kiepert-Parabel, sondern auch das isotome Bild des Höhenschnitts $H^{\wedge}=X(69)$. Für den Nagel-Punkt $X(8)$ gibt es keinen Partner mit gleicher P -Parabel, da die Tangente an die Lucas-Kurve durch den Schwerpunkt geht. Ein weiteres Punktepaar mit gleicher P -Parabel wäre der Gergonne-Punkt $X(7)$ und der Punkt $X(329)$.

Literatur

- [1] Peter Baptist: Die Entwicklung der neueren Dreiecksgeometrie. – Bibliographisches Institut, Mannheim 1992.
- [2] G. Berkhan und W. Fr. Meyer: Neuere Dreiecksgeometrie. – Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften Bd. III AB 10, S. 1173 – 1276.
- [3] Floor van Lamoen and Paul Yiu: The Kiepert Pencil of Kiepert Hyperbolas. – Forum Geometricorum, Volume 1 (2001) 125-132.
- [4] C.Kimberling: Encyclopedia of Triangle Centers, available at <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>.
- [5] <http://mathworld.wolfram.com/>.
- [6] Roger A. Johnson: Advanced Euclidean Geometry. – Dover Publications, Inc. Mineola, New York 2007.
- [7] R. H. Eddy and R. Fritsch: The Conics of Ludwig Kiepert: A Comprehensive Lesson in the Geometry of the Triangle. – Mathematics Magazine, 67 (1994) 188-205.