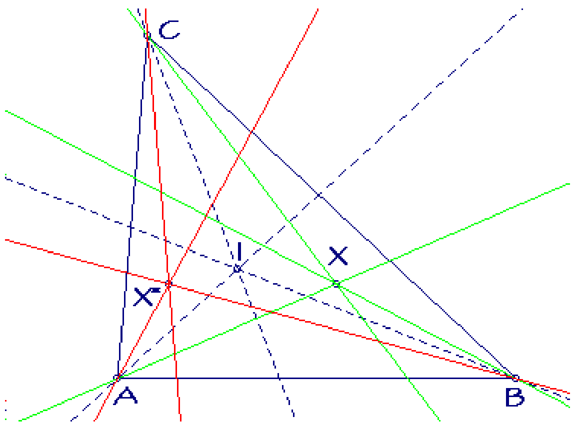
Konjugierte Punkte

Eckart Schmidt

Schon Ende des 19. Jahrhunderts waren Winkel- und Seiten-Gegenpunkte Bestandteil geometrischer Betrachtung [1]. Die zugehörige isogonale und isotome „Verwandtschaft“ sind heute zu den sogenannten „isoconjugations“ oder „reciprocal conjugations“ verallgemeinert und gewinnen in den letzten Jahren zunehmend an Bedeutung nicht nur für eine Behandlung von Kurven dritter Ordnung. – In dieser Ausarbeitung wird die Verallgemeinerung erläutert und Hilfen hinsichtlich Konstruierbarkeit und analytischer Behandlung in baryzentrischen Koordinaten aufgezeigt. Dabei werden keine neuen Ergebnisse erarbeitet; vielmehr sollen einige Aspekte aufgezeigt werden, die eine eigene Auseinandersetzung bereichern können.

1. Isogonale Verwandtschaft

Am bekanntesten ist wohl die isogonale Verwandtschaft der Winkelgegenpunkte. Hierzu sei ein Bezugsdreieck *ABC* vorausgesetzt. Zu einem Punkt *X* der Dreiecksebene erhält man den Winkelgegenpunkt *X**, indem man die Ecktransversalen von *X* an den entsprechenden Winkelhalbierenden spiegelt und den neuen gemeinsamen Schnitt *X** betrachtet.



Den Punkten einer Seitengeraden ist die Gegenecke, den Ecken kein Bildpunkt zuzuordnen. Fixpunkte sind offensichtlich die Inkreismitte und die Ankreismitten.
In baryzentrischen Koordinaten ergibt sich der Winkelgegenpunkt von $X(x:y:z)$ zu $X^*(a^2yz : b^2zx : c^2xy)$.

Dabei ist $L(a^2 : b^2 : c^2)$ der Lemoine-Punkt, als isogonal-konjugiertes Bild des Schwerpunktes $S(1:1:1)$ auch als Pol der Konjugation angesprochen [2] [3].
Bekannteste isogonal-konjugierte Partner sind der Höhenschnitt und die Umkreismitte

$$H(S_B S_C : S_C S_A : S_A S_B)\,, \quad M(a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C)\,.$$

Dabei sind

$S_A = (-a^2 + b^2 + c^2)/2,\ S_B = (a^2 - b^2 + c^2)/2,\ S_C = (a^2 + b^2 - c^2)/2$

die sogenannten Conway-Abkürzungen. Aber auch der Lemoine-Punkt als isogonal-konjugierter Partner des Schwerpunktes ist ein geometrisch höchst interessanter Punkt [4].
Punkte des Umkreises mit der Gleichung

$$a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy = 0$$

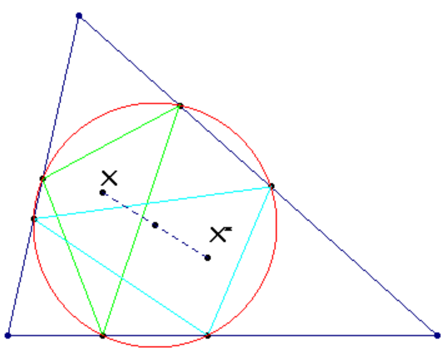
werden offensichtlich auf Fernpunkte abgebildet; damit ist das Bild der Ferngeraden der Umkreis des Bezugsdreiecks. Verallgemeinert ist das isogonal-konjugierte Bild einer Geraden mit der Gleichung $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ ein Umkegelschnitt mit der Gleichung

$$\alpha\, a^2 yz + \beta\, b^2 zx + \gamma\, c^2 xy = 0\,,$$

sofern die Gerade keine Ecke enthält. Eine Ecktransversale wird wieder zu einer Ecktransversalen durch die gleiche Ecke. Die isogonal-konjugierten Bilder von Umkreis-Tangenten sind umbeschriebene Parabeln und Geraden durch die Umkreismitte ergeben gleichseitige Um-Hyperbeln.

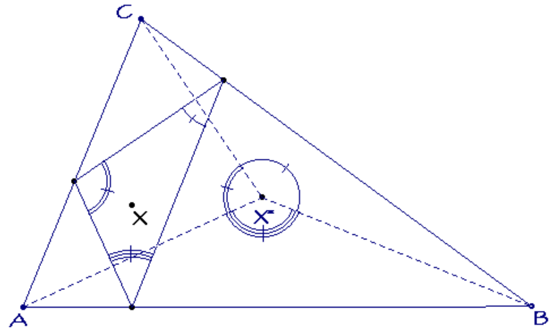
Einige geometrische Eigenschaften von isogonal-konjugierten Punkten seien hier aufgeführt:

(1) Die geometrisch aufschlussreichste Verwandtschaft isogonal-konjugierter Punkte dürfte sein, dass ihre Fußpunktdreiecke den gleichen Umkreis haben. Ein synthetischer Beweis findet sich z.B. bei Honsberger [4]. Bekanntestes Beispiel ist der Neun-Punkte-Kreis zu Höhenschnitt und Umkreismitte.

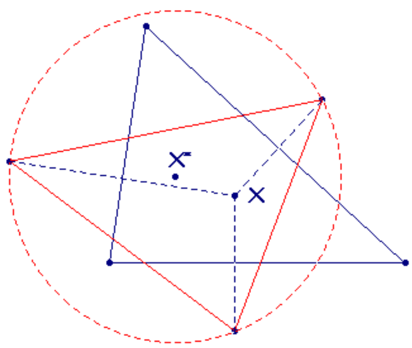


(2) Für isogonal-konjugierte Punkte ergänzen sich die Winkelkoordinaten des einen Punktes und die entsprechenden Innenwinkel des Fußpunkt-Dreiecks des anderen Punktes zu 180°. Hintergrund ist, dass die Ecktransversalen eines Punktes

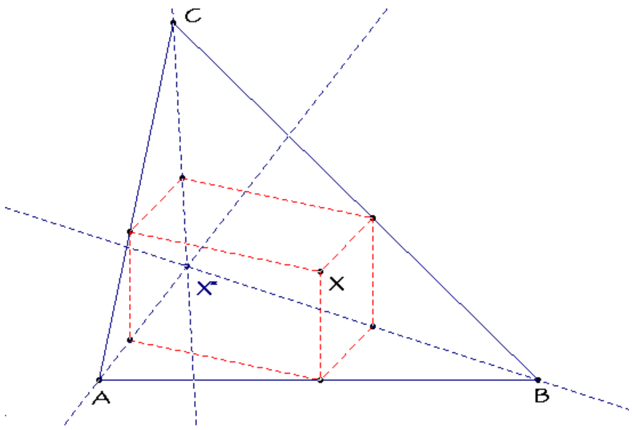
orthogonal zu den Seiten des Fußpunktdreiecks des anderen Punktes sind.



(3) Eine weitere, auch zur Konstruktion nützliche Eigenschaft des isogonal-konjugierten Partners X^* besteht darin, dass X^* die Umkreismitte des Spiegeldreiecks von X ist [5].



(4) Eine weitere verallgemeinerungsfähige Konstruktionsmöglichkeit ist die sogenannte Parallelogramm-Konstruktion. Seien X_a, X_b, X_c die Lotfußpunkte von X auf den Seiten, und Y_a, Y_b, Y_c die vierten Parallelogramm-Punkte von X bzgl. zweier Lotfußpunkte, so ist das Perspektivzentrum von $Y_aY_bY_c$ und ABC das isogonal-konjugierte Bild X^* [2].

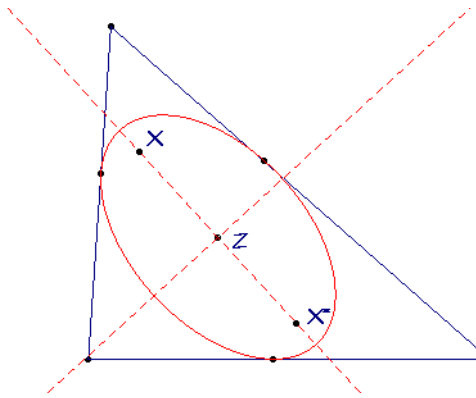


(5) Der gemeinsame Fußpunktkreis isogonal-konjugierter Punkte X und X^* ist der Hauptkreis eines Berührkegelschnitts mit diesen Brennpunkten [6]. Gibt man der Mitte von X und X^*, d.h. dem Zentrum des Berührkegelschnitts die Koordinaten

$$Z(\beta+\gamma:\gamma+\alpha:\alpha+\beta),$$

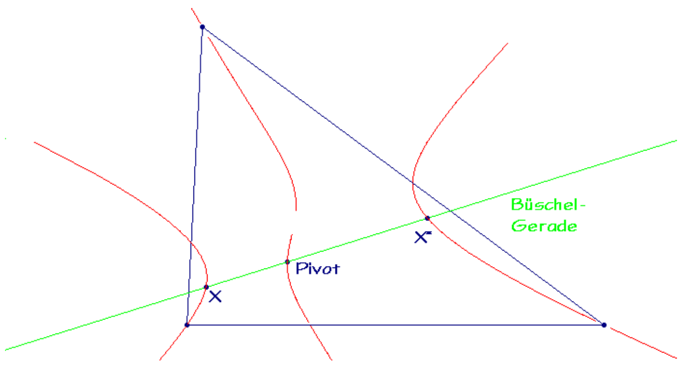
so ist der Brianchon-Punkt des Berührkegelschnitts $(\beta\gamma : \gamma\alpha : \alpha\beta)$ und seine Gleichung lautet

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 - 2\alpha\beta xy - 2\beta\gamma yz - 2\gamma\alpha zx = 0.$$



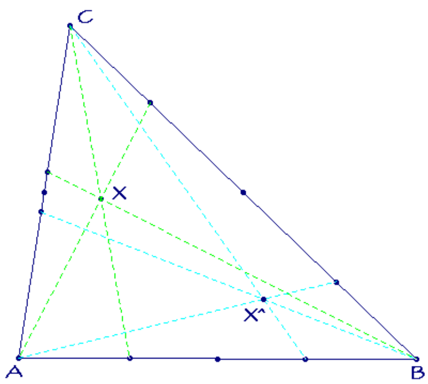
(6) Die isogonal-konjugierten Punkte-Paare auf den Geraden eines Büschels liefern ein Kurve dritter Ordnung, isogonal-invariant mit dem Pivot-Punkt im Büschelpunkt. Für einen Pivot-Punkt $P(u:v:w)$ ist die Gleichung dieser „pivotal isocubic" [2]

$$a^2(vz - wy) + b^2(wx - uz) + c^2(uy - vx) = 0\,.$$



2. Isotom-konjugierte Punkte

Den Seiten-Gegenpunkt eines Punktes findet man konstruktiv, indem man die Schnittpunkte der Ecktransversalen mit den Gegenseiten an den Seitenmitten spiegelt und den Schnittpunkt der neuen Ecktransversalen betrachtet.



Fixpunkte der isotom-konjugierten Abbildung sind offensichtlich der Schwerpunkt und die Ecken seines Anti-Ceva-Dreiecks. In baryzentrischen Koordinaten ergibt sich die Zuordnung zu

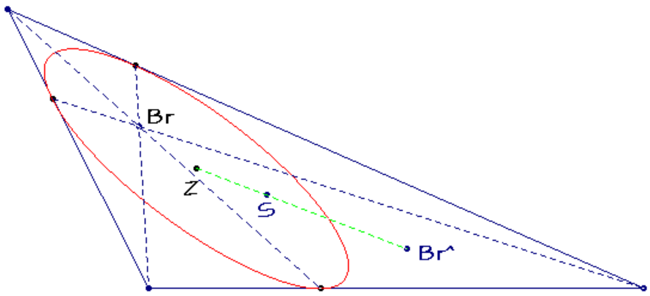
$$X(x:y:z) \underset{\wedge}{\longleftrightarrow} P\wedge(yz:zx:xy).$$

Bekanntestes Beispiel einer isotomen Verwandtschaft dürften der Nagel-Punkt $N(-a+b+c:a-b+c:a+b-c)$ und der Gergonne-Punkt G sein. Die Ferngerade wird abgebildet auf die umbeschriebene Steiner-Ellipse mit dem Zentrum im Schwerpunkt und der Gleichung

$$xy + yz + zx = 0.$$

Metrische Eigenschaften sind bei der isotomen Verwandtschaft weniger zahlreich; dennoch ein Beispiel:

(7) Für einen Berührkegelschnitt des Bezugsdreiecks schneiden sich die Ecktransversalen der Berührpunkte im sogenannten Brianchon-Punkt; dieser ist das isotom-konjugierte Bild des Antikomplements des Zentrums (s.o.).



3. K-konjugierte Punkte

Zu jedem Punkt $K(k:l:m)$ lässt sich verallgemeinernd eine Konjugation betrachten mit der Zuordnung

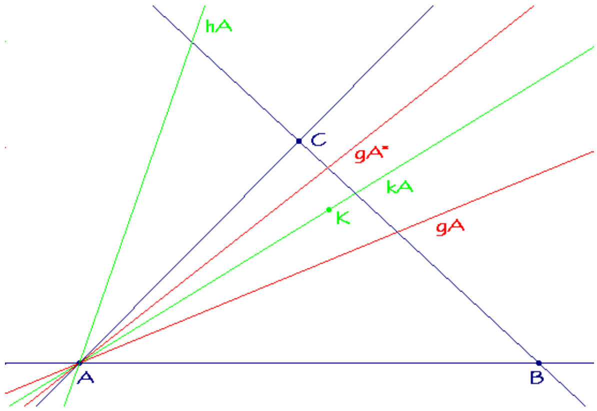
$$X(x:y:z) \underset{*}{\longrightarrow} X*(k^2yz:l^2zx:m^2xy).$$

Fixpunkte dieser K-Konjugation sind K und die Ecken des zugehörigen Anti-Ceva-Dreiecks

$$K^a(-k:l:m),\quad K^b(k:-l:m),\quad K^c(k:l:-m).$$

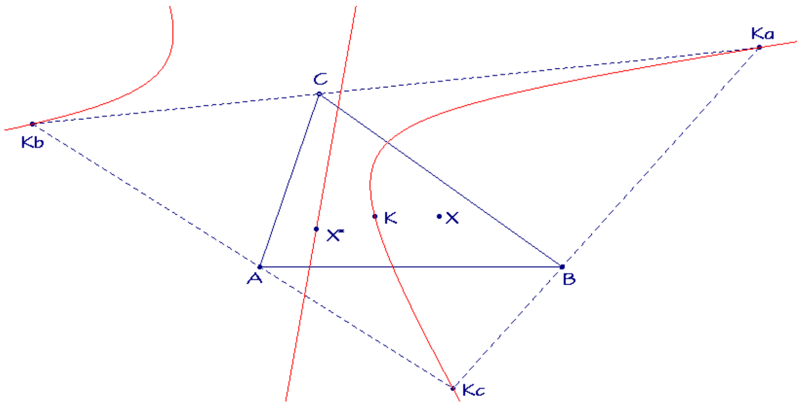
Vorerst werden die vier Fixpunkte K, K^a, K^b, K^c zur Kennzeichnung der K-Konjugation herangezogen, d.h. die K-Konjugation kann auch als K^a-, K^b-, K^c-Konjugation bezeichnet werden. Eine andere Möglichkeit ist die Benennung des Pols (k^2,l^2,m^2), dem K-konjugierten Bild des Schwerpunktes.

(8) Die Konstruktion des K-konjugierten Bildes sei hier für eine Ecktransversale g_A beschrieben:
Bezeichnet man die vierte harmonische Ecktransversale zu AB, AC, $AK=k_A$ mit h_A, dann ist die vierte harmonische Ecktransversale von k_A, h_A, g_A das K-konjugierte Bild g_A* [7].



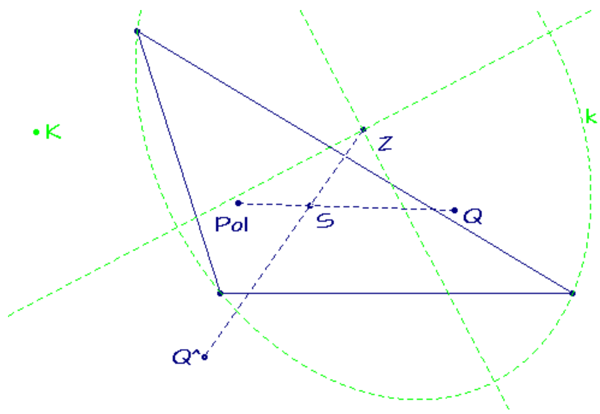
Dabei wird die Seitengerade BC von k_A im Punkt $(0:l:m)$ geschnitten, von h_A im Punkt $(0:m:-l)$, von g_A im Punkt $(0:v:w)$ und von g_A* im Punkt $(0:l^2w:m^2v)=(0:l^2wu:m^2uv)$.

(9) Weniger für eine Konstruktion, aber aufschlussreich für weitere Zusammenhänge ist die folgende geometrische Eigenschaft K-konjugierter Punkte X und X^*:
Betrachtet man das Kegelschnittsbüschel zu K und seinem Anti-Ceva-Dreieck $K^aK^bK^c$, so schneiden sich die Polaren von X im Punkt X^* [2].



(10) Das K-konjugierte Bild der Ferngeraden ist ein Umkegelschnitt k mit der Gleichung

$$k^2yz+l^2zx+m^2xy=0\,.$$

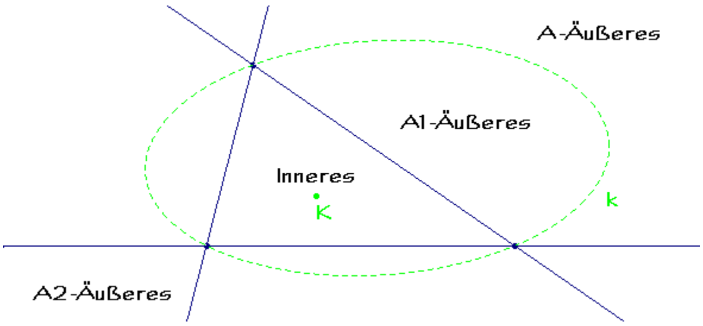


Betrachtet man das K-konjugierte Bild des Schwerpunktes, d.h. den Pol $P_0(k^2:l^2:m^2)$, bildet den antikomplementären Punkt Q

isotom-konjugiert auf ab, dann ist der komplementäre Punkt das Zentrum Z des Umkegelschnitts:

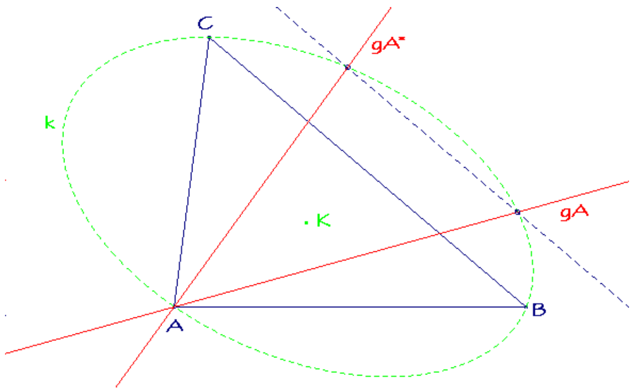
$$Z(k^2(-k^2+l^2+m^2):m^2(k^2-l^2+m^2):m^2(k^2+l^2-m^2)).$$

(11) Der Umkegelschnitt k einer Konjugation begrenzt in der Ebene des Bezugsdreiecks verschiedene Gebiete (siehe Abb.). Liegt X im Inneren des Bezugsdreiecks so auch sein K-konjugiertes Bild X^*. Liegt X im A1-Äußeren, dann X^* im A2-Äußeren und umgekehrt, liegt X im A-Äußeren, so auch X^* [8].



(12) Das K-konjugierte Bild einer Ecktransversalen ist wieder eine Ecktransversale der gleichen Ecke. Geraden, die den Umkegelschnitt k passieren ergeben Ellipsen; Geraden, die k in zwei Punkten schneiden, ergeben Hyperbeln; Tangenten an k liefern Um-Parabeln.

(13) Für eine weitergehende computergestützte „Konstruktion" kann auch der Umkegelschnitt k herangezogen werden [9]. Eine Ecktransversale g_A und ihr K-konjugiertes Bild g_A* schneiden den Umkegelschnitt k auf einer Parallelen zu BC.

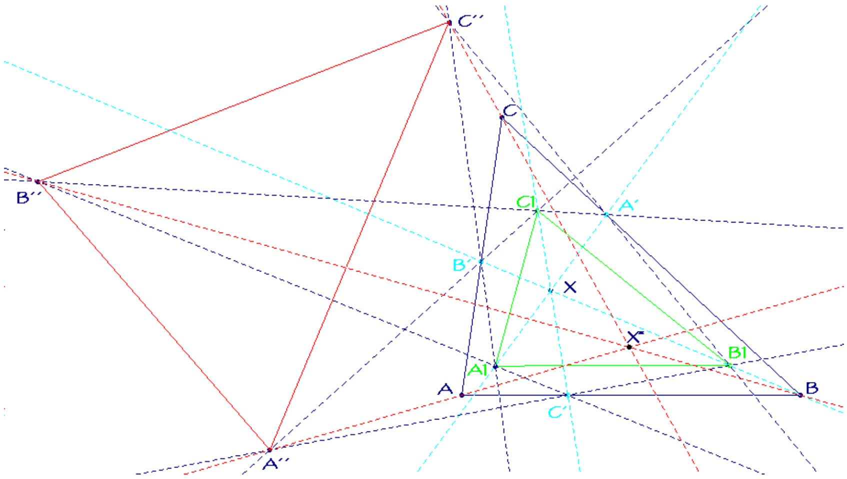


(14) Eine Konjugation lässt sich durch einen Fixpunkt K oder durch einen Umkegelschnitt vorgeben und konstruktiv wie analytisch auswerten. Aber auch ein zum Bezugsdreieck perspektives Dreieck $A_1B_1C_1$ kann eine Konjugation festlegen:

$$A' = A_1X \cap BC, \quad B' = B_1X \cap CA, \quad C' = C_1X \cap AB;$$

$$A'' = B_1C' \cap B'C_1, \quad B'' = C_1A' \cap C'A_1, \quad C'' = A_1B' \cap A'B_1.$$

Das Dreieck A´´B´´C´´ ist perspektiv zum Bezugsdreieck ABC. Die Zuordnung dieses Perspektivitätszentrums ist eine konjugierte Zuordnung [2].



(15) Eine Konjugation, die zwei vorgegebene Punkte $U(u_1 : u_2 : u_3)$ und $V(v_1 : v_2 : v_3)$ aufeinander abbildet, hat offensichtlich die Zuordnung:

$$X(x : y : z) \quad \to \quad X^*(u_1v_1yz : u_2v_2zx : u_3v_3xy).$$

Der Kegelschnitt *k*, auf den die Ferngerade abgebildet wird, hat die Gleichung

$$u_1v_1yz + u_2v_2zx + u_3v_3xy = 0.$$

Aber reelle Fixpunkte

z.B. $K(\sqrt{u_1v_1} : \sqrt{u_2v_2} : \sqrt{u_3v_3})$

zur Kennzeichnung einer K-Konjugation lassen sich nur angeben, wenn *U* und *V* im gleichen Vorzeichen-Bereich liegen, z.B. beide im Inneren, beide im A-Äußeren, bzw. einer im A1-Äußeren und der andere im A2-Äußeren (oder umgekehrt).
In diesem Fall lässt sich ein Fixpunkt *K* konstruieren als derjenige Punkt, dessen orientierte Abstände von den Seiten sich verhalten wie die geometrischen Mittel der Seiten-Abstände von *U* und *V*.

4. Der Pol einer Konjugation

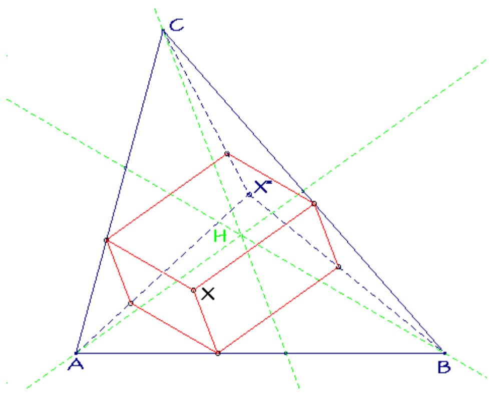
Unter dem Pol $P_0(p : q : r)$ einer Konjugation sei das Bild des Schwerpunktes verstanden, wie schon mehrmals benutzt. Für eine K-Konjugation müssen *p*, *q*, *r* das gleiche Vorzeichen haben, d.h. der Pol im Inneren des Bezugsdreiecks liegen. Dann lassen sich die Fixpunkte *K* der Konjugation nach () bestimmen.
Nimmt man einen Pol außerhalb des Bezugsdreiecks, so gibt es keine reellen Fixpunkte. Analytisch lässt sich aber eine Konjugation mit der Zuordnung

$$X(x : y : z) \quad \to \quad X^*(pyz : qzx : rxy)$$

und einem Umkegelschnitt *k* mit der Gleichung

$$pyz + qzx + rxy = 0$$

weiter untersuchen.
Wie lässt sich aber bei vorgegebenem Pol *P* der Bildpunkt *X** bzw. der zugehörige Umkegelschnitt *k* konstruieren?



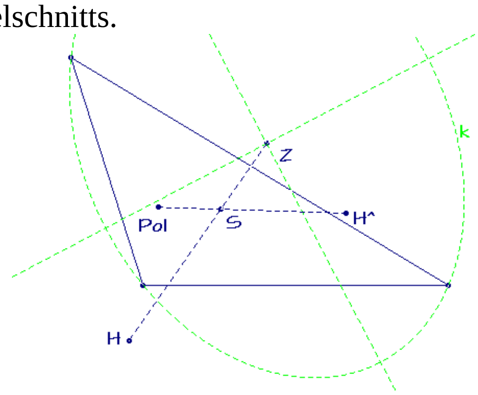
Die Parallelogramm-Konstruktion (4) lässt sich verallgemeinern, indem man vom Punkt X parallel zu den Ecktransversalen eines Punktes $H(u:v:w)$ auf die Seiten „lotet“ und dann die Parallelogramme zum Punkt X^* konstruiert. Für die isogonale Konjugation ist H der Höhenschnitt, für die isotome Konjugation der Schwerpunkt. Dabei ergibt sich die Zuordnung

$$X(x:y:z) \quad \to \quad X^*(u(v+w)yz : v(w+u)zx : w(u+v)xy)$$

mit dem Pol

$$P_0(u(v+w) : v(w+u) : w(u+v)) .$$

Geht man umgekehrt vom Pol P_0 aus, so erhält man den Punkt H als isotom-konjugiertes Bild des Antikomplements des Pols. Nach (10) ist dann das Komplement des H-Punktes das Zentrum des Umkegelschnitts.



Literatur

[1] G. Berkhan und W. Fr. Meyer: Neuere Dreiecksgeometrie. – Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften III AB 10, S.1207, S.1211; B. G. Teubner, Leipzig 1898 –1904.

[2] K. Dean and F. v. Lamoen: Geometric Construction of Reciprocal Conjugations. – Forum Geometricorum, Volume 1 (2001) 115-120.

[3] J. P. Ehrmann and B. Gibert: Special Isocubics in the Triangle Plane. –

http://perso.wanadoo.fr/bernard.gibert/index.html.

[4] R. Honsberger: Episodes in Nineteenth and twentieth century Euclidean Geometry. – The Mathematical Association of America 1995, 53.

[5] Briefwechsel mit H. Bubeck (Ravensburg) 2004.

[6] P. Yiu: A Tour of Triangle Geometry. – 26

[7] Briefwechsel mit G. Pickert (Giessen) 2003.

[8] S. Sigur: Where are the Conjugates? – Forum Geometricorum, Volume 5 (2005) 1-15.

[9] Briefwechsel mit R. Stärk (Stetten) 2002.

Eckart Schmidt - Hasenberg 27 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de