

Lemniskaten und eine Strophoide des Dreiecks

Eckart Schmidt

Spiegelt man Umkegelschnitte eines Dreiecks am Umkreis, so erhält man im allgemeinen Kurven vierter Ordnung. Hier werden nur gleichseitige Umhyperbeln eines Dreiecks am Umkreis gespiegelt (Abb.1) und näher untersucht.

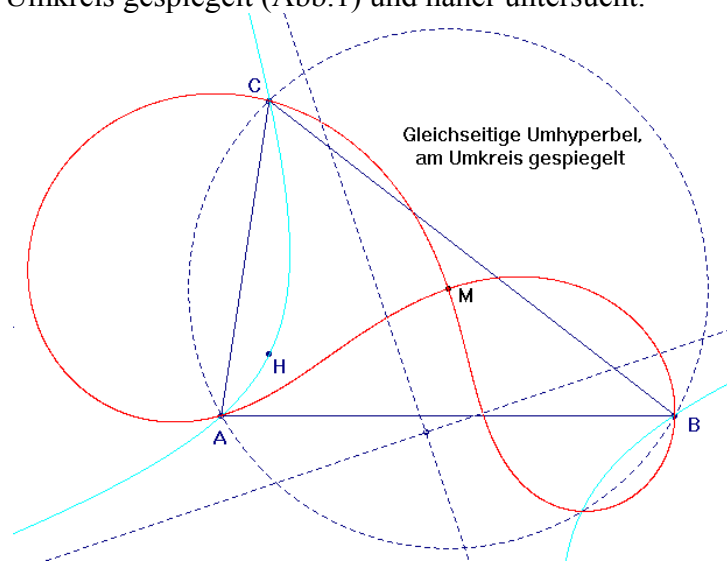


Abb.1

Gleichseitige Umhyperbeln eines Dreiecks sind die isogonal-konjugierten Bilder von Geraden durch den Umkreismittelpunkt M . Bildet man also eine Gerade durch M erst isogonal-konjugiert ab und spiegelt die Bildhyperbel dann am Umkreis, so erhält man die hier betrachteten Kurven. Das Hintereinanderausführen dieser beiden Abbildungen entspricht der Konstruktion des von R.Stärk in [1] behandelten Tangentialpunktes eines Vierecks. Damit sind die angesprochenen Kurven die Ortslinien der Tangentialpunkte von Vierecken $ABCP$, wobei P Punkt einer Geraden durch die Umkreismitte des Dreiecks ABC ist. Diese Kurven erweisen sich als Lemniskaten und im Sonderfall der Euler-Geraden als Strophoide.

1. Gleichseitige Umhyperbeln

Zu vier Punkten A, B, C, X existiert immer eine gleichseitige Hyperbel durch diese Punkte. Variiert man X und betrachtet A, B, C als Ecken eines Bezugsdreiecks, so gehen diese gleichseitigen Hyperbeln alle durch den Höhenschnitt H und ihre Zentren liegen auf dem Neun-Punkte-Kreis des Bezugsdreiecks. Die Asymptoten ergeben sich wie folgt: Die Gerade durch die Umkreismitte M und das isogonal-konjugierte Bild X^* des Punktes X schneidet den Umkreis in zwei Punkten, deren Simson-Geraden die Asymptoten sind. Der vierte

Schnittpunkt der Hyperbel mit dem Umkreis ist der Spiegelpunkt des Höhenschnitts H am Zentrum der Hyperbel. Gleichseitige Umhyperbeln eines Dreiecks sind die isogonal-konjugierten Bilder von Geraden durch die Umkreismitte M , dem isogonal-konjugierten Bild vom Höhenschnitt H . Die Euler-Gerade liefert die Jerabek-Hyperbel, die durch den Lemoine-Punkt L verläuft; die Brocard-Achse ML liefert die Kiepert-Hyperbel, die durch den Schwerpunkt S geht. Das isogonal-konjugierte Bild einer Ecktransversalen z.B. MA liefert dagegen nur die Höhe AH .

2. Lemniskaten zu rechtwinkligen Dreiecken

Der Sonderfall eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit den Katheten a und b ($a > b$) und der Hypotenuse c ergibt einen einfachen Zugang, insbesondere wenn man als Gerade die Mittelsenkrechte der Hypotenuse betrachtet (Abb.2).

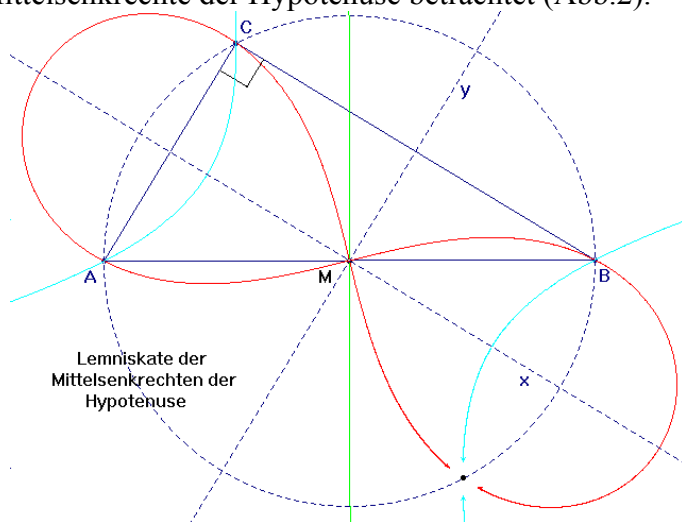


Abb.2

Legt man den Koordinatenursprung in die Hypotenusenmitte M und die x -Achse parallel zu a , die y -Achse parallel zu b , so haben die Ecken die Koordinatenpaare:

$$A\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right), B\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right), C\left(-\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right).$$

Für einen Punkt $P(u; v) = P\left(u; -\frac{a}{b}u\right)$ der Mittelsenkrechten der Hypotenuse ergibt sich das isogonal-konjugierte Bild

$$P^*(x; y) = P^*\left(\frac{4au^2 + 4b^2u + ab^2}{2(4u^2 - b^2)}; \frac{b(4u^2 + 4au + b^2)}{2(4u^2 - b^2)}\right),$$

woraus sich durch Elimination von u die Gleichung

$$\frac{4x^2}{a^2 - b^2} - \frac{4y^2}{a^2 - b^2} = 1$$

einer gleichseitigen Umhyperbel des Dreiecks ergibt.

Die Spiegelung am Umkreis

$$(u; v) \rightarrow \left(\frac{uc^2}{4(u^2 + v^2)}; \frac{vc^2}{4(u^2 + v^2)}\right)$$

liefert dann die Gleichung einer Lemniskaten [2]

$$\frac{c^4}{4(a^2 - b^2)}(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2 .$$

Der Knotenpunkt liegt in der Hypotenusenmitte, wo sich die Tangenten im rechten Winkel schneiden. Die Scheitel liegen bei

$$S_{1,2} \left(\pm \frac{c^2}{2\sqrt{a^2 - b^2}} ; 0 \right).$$

Betrachtet man statt der Mittelsenkrechten der Hypotenuse im gleichen Koordinatensystem eine Ursprungsgerade mit der Steigung m , so erhält man eine "schiefe" Lemniskate (Abb.3) mit der Gleichung

$$\begin{aligned} & 4(b + am)(x^2 + y^2)^2 \\ & + 4(a + bm)(bx - ay)(x^2 + y^2) \\ & + c^2(b - am)(x^2 - y^2) \\ & - 2c^2(a + bm)xy = 0. \end{aligned}$$

Der vierte Schnittpunkt D von Hyperbel bzw. Lemniskate mit dem Umkreis ist das isogonal-konjugierte Bild des Fernpunktes der abgebildeten Geraden:

$$\left(-\frac{a + 2bm - am^2}{2(1 + m^2)} ; \frac{-b + 2am + bm^2}{2(1 + m^2)} \right).$$

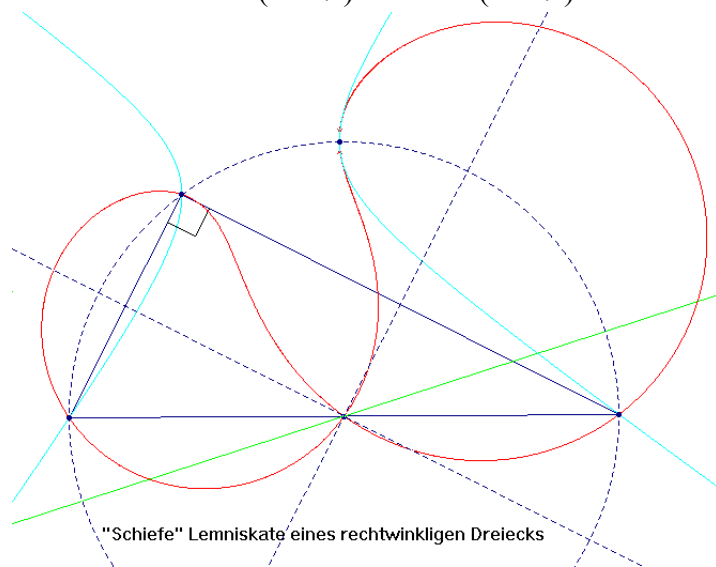


Abb.3

Ist die Gerade die Ecktransversale MC , so liefert das isogonal-konjugierte Bild die Hypotenusenhöhe, deren Spiegelung am Umkreis einen hypotenusensymmetrischen Kreis durch M und C ergibt.

3. Dreiecks-Lemniskaten

Betrachtet man in einem beliebigen Dreieck ABC eine Gerade m durch die Umkreismitte M , die nicht Ecktransversale ist, und versucht, die angesprochene Konstruktion analytisch zu verfolgen, so ist die Frage des Koordinatensystems von einiger Bedeutung. Hier wird ein Koordinatensystem benutzt, dessen Ursprung wieder im Umkreismittelpunkt M liegt und dessen x-Achse mit der Geraden m zusammenfällt. Dann lassen sich die

Eckpunkte des Dreiecks durch die Richtungswinkel α, β, γ beschreiben, wobei ein Radius des Umkreises von 1 angenommen sei:

$A(\cos \alpha; \sin \alpha)$, $B(\cos \beta; \sin \beta)$, $C(\cos \gamma; \sin \gamma)$.
Für das isogonal-konjugierte Bild eines Punktes $P(u; 0)$ der Geraden m , d.h. der x -Achse ergibt sich

$$P^* \left(\frac{1}{1-u^2} [\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + u^2 \cos(\alpha + \beta + \gamma) - u(1 + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\beta + \gamma) + \cos(\gamma + \alpha))] ; \right. \\ \left. \frac{1}{1-u^2} [\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma + u^2 \sin(\alpha + \beta + \gamma) - u(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha))] \right).$$

Eliminiert man u aus den Koordinaten, so erhält man die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel:

$$(x^2 - y^2) \sin(\alpha + \beta + \gamma) - 2xy \cos(\alpha + \beta + \gamma) - x(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha)) - y(1 - \cos(\alpha + \beta) - \cos(\beta + \gamma) - \cos(\gamma + \alpha)) + \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0.$$

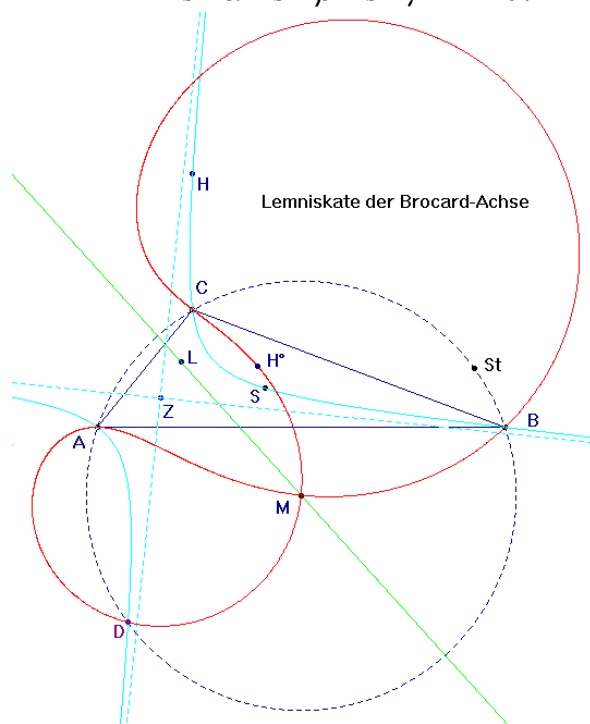


Abb.4

Die Spiegelung am Umkreis

$$(u; v) \rightarrow \left(\frac{u}{u^2 + v^2}; \frac{v}{u^2 + v^2} \right)$$

ergibt dann die Gleichung der Lemniskaten zu

$$(x^2 + y^2)^2 (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) - x(x^2 + y^2) (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha)) - y(x^2 + y^2) (1 - \cos(\alpha + \beta) - \cos(\beta + \gamma) - \cos(\gamma + \alpha)) + (x^2 - y^2) \sin(\alpha + \beta + \gamma) - 2xy \cos(\alpha + \beta + \gamma) = 0,$$

vorausgesetzt $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \neq 0$ (vgl. 5).

Die Ausgangsgerade geht vorgegeben durch die Umkreismitte $M(0;0)$; die gleichseitige Hyperbel enthält als isogonal-konjugiertes Bild den Höhenschnittpunkt

$$H(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma ; \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)$$

und die Lemniskate als Spiegelung der Hyperbel am Umkreis verläuft immer durch den Spiegelpunkt des Höhenschnittpunkts

$$H^{\circ} \left(\frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{3 + 2(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\beta - \gamma) + \cos(\gamma - \alpha))} ; \frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{3 + 2(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\beta - \gamma) + \cos(\gamma - \alpha))} \right).$$

Der vierte Schnittpunkt D des Umkreises mit der Hyperbel bzw. Lemniskaten ergibt sich zu

$$D(-\cos(\alpha + \beta + \gamma) ; \sin(\alpha + \beta + \gamma));$$

dieser Punkt D ist die Spiegelung des Höhenschnitts H am Zentrum Z der Hyperbel.

Ein Beispiel (Abb.4): Wählt man als Ausgangsgerade die Brocard-Achse durch den Lemoine-Punkt L , so ist das isogonal-konjugierte Bild die Kiepert-Hyperbel durch den Schwerpunkt S und die Spiegelung am Umkreis liefert eine Lemniskate, deren vierter Schnittpunkt D mit dem Umkreis diametral zum Steiner-Punkt St des Dreiecks liegt.

4. Inversionskreise der Lemniskaten

Lemniskaten sind anallagmatische Kurven, d.h. sie werden durch geeignete Inversionen auf sich abgebildet [2]. Die beiden Inversionskreise müssen durch den Knotenpunkt, d.h. durch die Umkreismitte M gehen. Die Mittelpunkte der Inversionskreise findet man wie folgt (Abb.5):

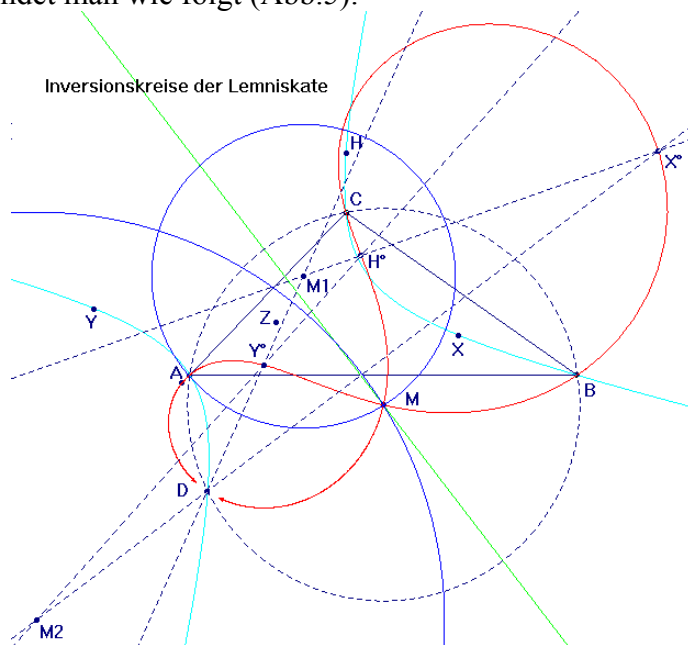


Abb.5

Spiegelt man den Höhenschnitt H am Zentrum Z der Hyperbel, so erhält man den vierten Schnittpunkt D der Hyperbel mit dem Umkreis. Spiegelt man H und D an den Achsen der Hyperbel, so

erhält man zwei Hyperbelpunkte X und Y , deren Spiegelungen am Umkreis zwei spezielle Lemniskatenpunkte X° und Y° ergeben. Die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden $X^\circ H^\circ$ und $Y^\circ D$ bzw. $X^\circ D$ und $Y^\circ H^\circ$ ergeben die Mittelpunkte M_1 und M_2 der Inversionskreise. – Für ein rechtwinkliges Dreieck gilt $H = H^\circ = C$.

5. Strophoide der Euler-Geraden

Wählt man als Ausgangsgerade die Euler-Gerade MH , so erhält man als isogonal-konjugiertes Bild die Jerabek-Hyperbel durch H und M . Die Spiegelung am Umkreis des Dreiecks ergibt aber keine Lemniskate. Da der Höhenschnitt H jetzt auf der x -Achse des benutzten Koordinatensystems liegt, ist

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0$$

und damit entfällt in der Kurvengleichung der Term in $(x^2 + y^2)^2$. Die verbleibende Gleichung dritten Grades beschreibt eine schiefe Strophoide (Abb.6) mit der Asymptoten

$$\begin{aligned} &(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha))x \\ &+ (1 - \cos(\alpha + \beta) - \cos(\beta + \gamma) - \cos(\gamma + \alpha))y \\ &+ \sin(\alpha + \beta + \gamma) = 0. \end{aligned}$$

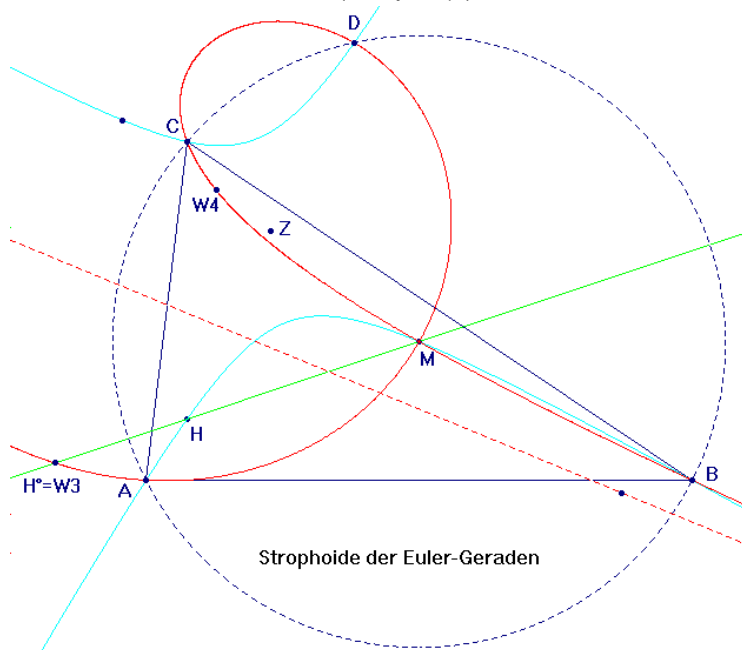


Abb.6

Anmerkung: Die Euler-Gerade schneidet die Strophoide in den Punkten M und H° . Der Punkt H° kann auch als Dreifach-Winkel-Punkt W_3 angesprochen werden [3], d.h. als der Punkt, von dem man alle Seiten des Dreiecks unter dem Dreifachen des zugehörigen Innenwinkels sieht (Winkel orientiert und modulo 180°). Bildet man W_3 isogonal-konjugiert ab, so erhält man den am Zentrum Z der Jerabek-Hyperbel gespiegelten Umkreismittelpunkt. Spiegelt man diesen Hyperbelpunkt am Umkreis, so erhält man als Tangentialpunkt von A, B, C, W_3 den Vierfach-Winkel-Punkt W_4 auf der Strophoide. Spiegelt man W_4 am Umkreismittelpunkt, so liegt dieser Punkt auf der

Asymptoten. Die Asymptote verläuft parallel zur Tangente im Umkreismittelpunkt an die Jerabek-Hyperbel.

Eine symmetrische Strophoide erhält man, wenn das Lot von einer Ecke – z.B. C – auf die Euler-Gerade in die Umkreismitte M fällt (Abb.7). Dreht man das Koordinatensystem um den Winkel $\varphi = \frac{\alpha + \beta}{2} + 90^\circ$, so ergibt sich die Gleichung der Strophoiden [2] zu

$$x^2 - y^2 = 2y(x^2 + y^2)\left(\cos\frac{\alpha - \beta}{2} + \sin\frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

Die Euler-Gerade führt auf diese symmetrische Strophoide mit der „Basis“ AB , wenn für die Innenwinkel des Dreiecks gilt $\cot A + \cot B - \cot C - 3 \cot A \cot B \cot C = 0$.

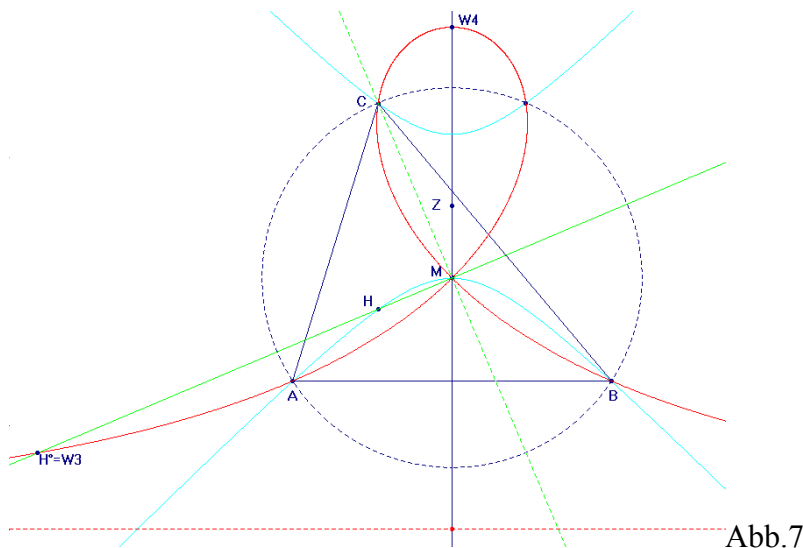


Abb.7

Literatur:

- [1] R.StÄRK / D.BAUMGARTNER: Ein merkwürdiger Punkt des Vierecks. – PM 44 (2002), S.19.
- [2] H.SCHMIDT: Ausgewählte höhere Kurven. – Kesselringsche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1949.
- [3] K.MÜTZ: Die Triplex-Punkte und der Dreifachwinkel-Punkt eines Dreiecks. – MNU 45/4 (1992), S.220.

Eckart Schmidt - Hasenberg 27 - 24223 Raisdorf
Tel.: 04307/5954 - eckart_schmidt@t-online.de