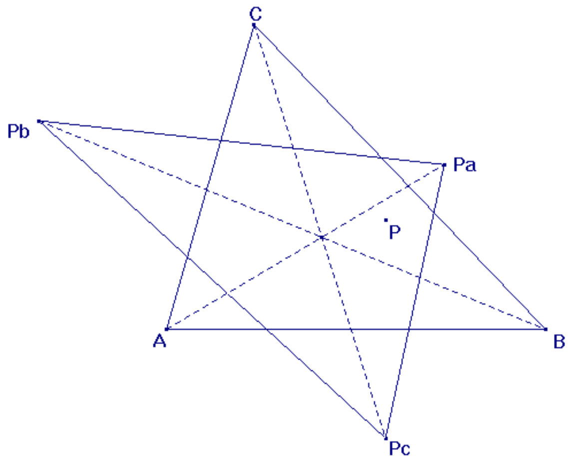
Eine Anmerkung zur Neuberg-Kurve

Eckart Schmidt

Die Ausarbeitung betrifft das PM-Problem P1059
(PM 5/45.Jg.2003, S.244)

Der Punkt P in der Ebene des Dreiecks ABC wird an dessen Seiten gespiegelt. Die Spiegelpunkte Pa, Pb, Pc bilden das „Spiegeldreieck von P an ABC". Es liegt im Allgemeinen nicht perspektiv zu ABC.
1) Welche besonderen Punkte des Dreiecks ABC haben ein zu ABC perspektives Spiegeldreieck?
2) Es ist zu zeigen: Das Spiegeldreieck von P an einem gleichseitigen Dreieck ist stets perspektiv zu diesem.

Heinrich Bubeck,
Linzgaustr. 35, 88212 Ravensburg



Der Hintergrund dieser Aufgabe ist der folgende Satz von Pinkernell [1]:

> **The Neuberg cubic is the locus of a point *P* in the triangle, for which the triangle formed by its reflections in the sides of ΔABC is in perspective with ΔABC.**

1. Die Neuberg-Kurve

Die Neuberg-Kurve ist eine Kurve dritter Ordnung, genauer eine Zirkularkurve, die bzgl. der isogonalen Konjugation invariant ist und den Fernpunkt der Euler-Geraden als Pivot-Punkt hat. Ihre Gleichung in baryzentrischen Koordinaten *P(x : y : z)* ergibt sich im Sinne der Aufgabe wie folgt:

$$A(1:0:0),\ B(0:1:0),\ C(0:0:1);$$

$$P_a(-a^2x : 2S_Cx + a^2y : 2S_Bx + a^2z),$$

$$P_b(2S_Cy + b^2x : -b^2y : 2S_Ay + b^2z),$$

$$P_c(2S_Bz + c^2x : 2S_Az + c^2y : -c^2z).$$

Hier werden neben den Seitenlängen a, b, c des Dreiecks die Bezeichnungen von Conway benutzt:

$$S_A = \frac{1}{2}(-a^2 + b^2 + c^2),\ S_B = \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + c^2),\ S_C = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$$

und die doppelte Dreiecksfläche S mit

$$S^2 = S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A .$$

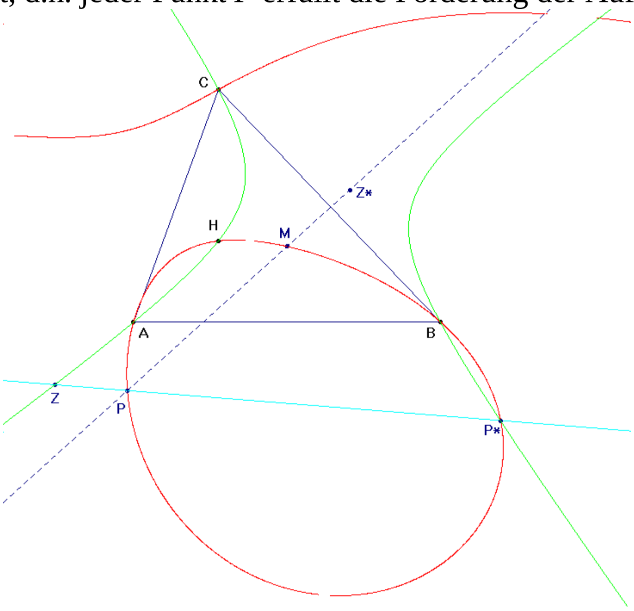
Die Ecktransversalen ergeben sich zu

$$AP_a(0 : -2S_B x - a^2 z : 2S_C x + a^2 y)$$
$$BP_b(2S_A y + b^2 z : 0 : -2S_C y - b^2 x)$$
$$CP_c(-2S_A z - c^2 y : 2S_B z + c^2 x : 0).$$

Auf Grund der geforderten Perspektivität müssen diese drei Geraden einen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Dies ist der Fall, wenn die Determinante der Geradenkoordinaten den Wert Null hat. Eine Auswertung dieser Determinante ergibt die Gleichung der Neuberg-Kurve:

$$x(c^2y^2 - b^2z^2)(S^2 - 3S_B S_C)$$
$$+ y(a^2z^2 - c^2x^2)(S^2 - 3S_A S_C)$$
$$+ z(b^2x^2 - a^2y^2)(S^2 - 3S_A S_B) = 0$$

Für ein gleichseitiges Dreieck entartet die Gleichung zur Identität, d.h. jeder Punkt P erfüllt die Forderung der Aufgabe.



Für die Perspektivzentren der Spiegeldreiecke erhält man dann

$$Z(a^2y^2 - b^2x^2)(a^2z^2 - c^2x^2)(b^2S_B z - c^2 S_C y) : \ldots \quad).$$

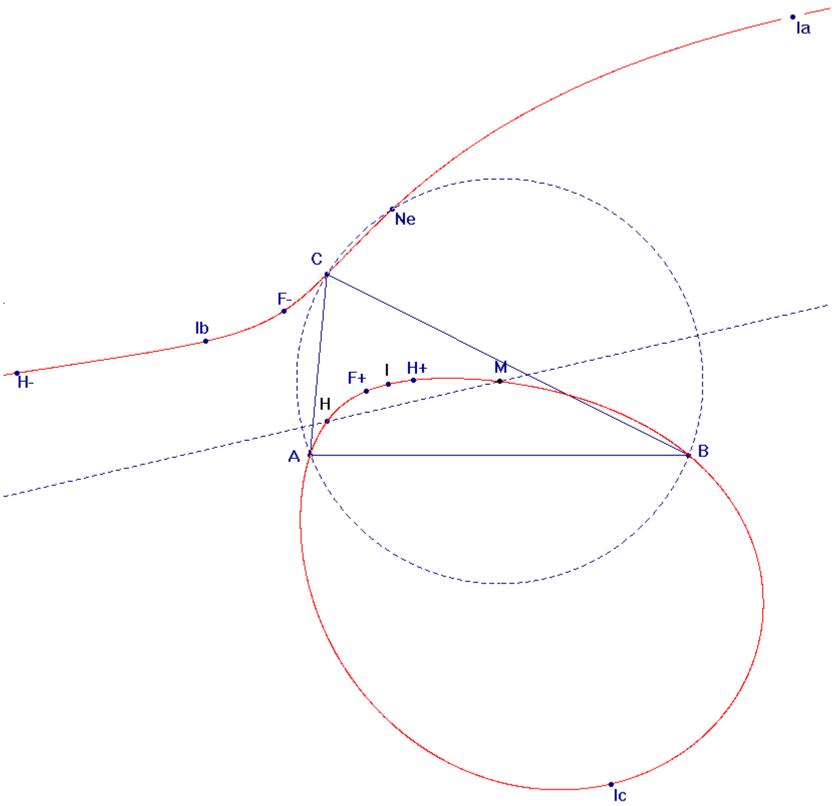
Zur geometrischen Lage der Perspektivzentren lässt sich anmerken: Z liegt auf der Verbindungsgeraden von P und seinem isogonal-konjugierten Bild P^*, weiterhin auf der gleichseitigen Umhyperbel des Dreiecks durch P^*, dem isogonal-konjugierten Bild der Verbindungsgeraden von P mit der Umkreismitte M.

2. Punkte der Neuberg-Kurve

Auf der Neuberg-Kurve liegen zahlreiche merkwürdige Punkte des Dreiecks [3]. In der folgenden Auflistung werden jeweils die baryzentrischen Koordinaten angegeben und der ETC-Index aus der „encyclopedia of triangle centers" [2] benannt.

(1) $I(a:b:c)$ = *X(1)*

Die Inkreismitte I ist Fixpunkt der isogonalen Konjugation. Mit jedem Punkt $P(x:y:z)$ liegt auch das isogonal-konjugierte Bild $P^*(a^2yz:b^2zx:c^2xy)$ auf der Neuberg-Kurve; die Verbindungsgerade verläuft immer parallel zur Euler-Geraden.



(2) $E_\infty(S^2-3S_BS_C : S^2-3S_AS_C : S^2-3S_AS_B)$ = X(30)

Der Pivot-Punkt der Zirkularkurve ist der Fernpunkt E_∞ der Euler-Geraden.

(3) $H(S_BS_C : S_CS_A : S_AS_B)$ = X(4) Höhenschnitt

(4) $M(a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C)$ = X(3) Umkreismitte

(5)
$$N_e(a^2(S^2-S_AS_B)(S^2-S_AS_C) \\ : b^2(S^2-S_AS_B)(S^2-S_BS_C) \\ : c^2(S^2-S_AS_C)(S^2-S_BS_C)) = X(74)$$

Der sogenannte Neuberg-Punkt N_e ist als isogonal-konjugiertes Bild des Fernpunktes E_∞ ein Punkt des Umkreises.
Für den Neuberg-Punkt N_e entartet das Spiegeldreieck zu drei kollinearen Punkten. Die Trägergerade verläuft durch den Höhenschnitt H parallel zur Simson-Geraden von N_e, d.h. senkrecht zur Euler-Geraden.

(6)
$$F_\pm((S \pm \sqrt{3}S_B)(S \pm \sqrt{3}S_C)c : (S \pm \sqrt{3}S_A)(S \pm \sqrt{3}S_C) \\ : (S \pm \sqrt{3}S_A)(S \pm \sqrt{3}S_B)) = X(13/14)$$

Auf der Neuberg-Kurve liegen die Fermat-Punkte $F_\pm$; sie spielen später noch eine besondere Rolle.

(7)
$$H_\pm(a^2(S \pm \sqrt{3}S_A) : b^2(S \pm \sqrt{3}S_B) \\ : c^2(S \pm \sqrt{3}S_C)) = X(15/16)$$

Die drei Apollonius-Kreise eines Dreiecks haben zwei Punkte gemeinsam, die sogenannten „hessian points“ $H_\pm$; sie sind die isogonal-konjugierten Bilder der Fermat-Punkte und mit der Umkreismitte M kollinear.

(8) Die Verbindungsgeraden der Ecken A, B, C mit der Inkreismitte I, d.h. die Winkelhalbierenden, schneiden die Neuberg-Kurve in den Ankreismitten I_a, I_b, I_c.

(9) Die Verbindungsgeraden der Ecken A, B, C mit dem Höhenschnitt H schneiden die Neuberg-Kurve in den Spiegelpunkten der Ecken A, B, C an den Gegenseiten.

(10) Die Verbindungsgeraden der Ecken A, B, C mit den Fermat-Punkten $F_\pm$ schneiden die Neuberg-Kurve in den Spitzen der gleichseitigen Dreiecke über/unter den Dreiecksseiten.

(11) Die Verbindungsgeraden der Ecken A, B, C mit dem Fernpunkt E_∞, d.h. die Parallelen zur Eulergeraden durch A, B, C schneiden die Neuberg-Kurve auf den entsprechenden Gegenseiten.

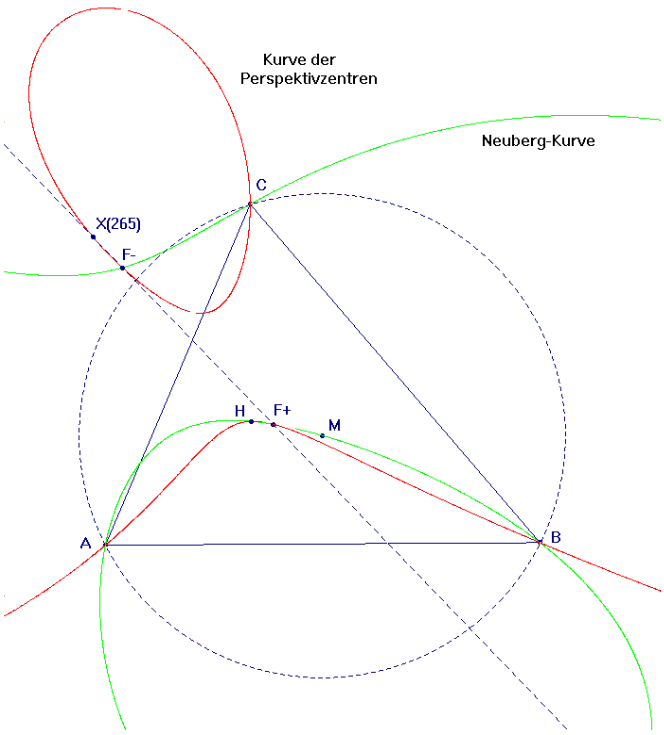
(12) Die Verbindungsgeraden der Ecken A, B, C mit der Umkreismitte M schneiden die Neuberg-Kurve in den Spiegelpunkten der Ecken A, B, C an den Geraden B_cC_b, A_cC_b, A_bB_a. Dabei ist A_b der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m_b mit der Seite a, B_a der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m_a mit der Seite b, usw.

Damit sind bis jetzt 27 leicht konstruierbare Punkte im Sinne der Aufgabenstellung angesprochen.

Verfolgt man den Gedanken weiter, den dritten Schnittpunkt der Verbindungsgeraden zweier bekannter Punkte mit der Neuberg-Kurve aufzusuchen, so erhält man z.B.
X(484) im Schnitt von *IM* und der Neuberg-Kurve (man spiegele die Inkreismitte I an ihrem Spiegelpunkt am Umkreis),
X(399) im Schnitt von F_+F_- und N_eM auf der Neuberg-Kurve (man spiegele die Umkreismitte am Brennpunkt der Kiepert-Parabel) und
die Schnittpunkte der Geraden $N_eH_\pm$ und $HF_\mp$ auf der Neuberg-Kurve, die nicht in der „encyclopedia of trangle centers“ vermerkt sind.
Eine Sonderstellung nimmt der Neuberg-Punkt N_e ein: Zeichnet man eine Gerade durch N_e, so liegen die Schnittpunkte mit der Neuberg-Kurve symmetrisch zum zweiten Schnittpunkt mit dem Umkreis.

3. Ortslinie der Perspektivzentren

Durchläuft ein Punkt *P* die Neuberg-Kurve, so stellt sich im Sinne der Aufgabe die Frage nach den Perspektivzentren $Z(u:v:w)$ der Dreiecke *ABC* und $P_aP_bP_c$. Pinkernell [1] erwähnt, dass die Perspektivzentren ebenfalls auf einer Kurve dritter Ordnung liegen. Hier wird diese Aussage präzisiert.



Die Fermat-Punkte $F_\pm$ erweisen sich als Perspektivzentren der Schnittpunkte $H_\pm$ der Apollonius-Kreise. Damit sind die Fermat-Punkte zwei Punkte der gesuchten Ortslinie, auf der natürlich auch der Höhenschnitt *H* liegt. Die Konjugation κ, die F_+ und F_- vertauscht

$$\kappa: \quad (x:y:z) \quad \rightarrow \quad ((S^2-3S_B{}^2)(S^2-3S_C{}^2)yz$$

$$: \quad (S^2 - 3S_C{}^2)(S^2 - 3S_A{}^2)zx \quad : \quad (S^2 - 3S_A{}^2)(S^2 - 3S_B{}^2)xy),$$

bildet den Höhenschnittpunkt H ab auf den Punkt

$$X(265) \quad = \quad (S_A(S^2 - 3S_B{}^2)(S^2 - 3S_C{}^2)$$
$$: \quad S_B(S^2 - 3S_C{}^2)(S^2 - 3S_A{}^2) \quad : \quad S_C(S^2 - 3S_A{}^2)(S^2 - 3S_B{}^2).$$

$X(265)$ ist das isogonal-konjugierte Bild der Spiegelung von H am Umkreis und liegt auf der Verbindungsgeraden von F_1F_2. Außerdem ist $X(265)$ das Perspektivzentrum für den Bezugspunkt E_∞ im Fernpunkt der Eulergeraden. Die Verbindungsgeraden κ-konjugierter Perspektivzentren schneiden sich somit im Punkt *X(265)*, der damit Pivot-Punkt einer Kurve dritter Ordnung ist, die bezüglich der Konjugation κ invariant ist. Die Kurve der Perspektivzentren hat dann die Gleichung

$$x^2(S_B y - S_C z)(S^2 - 3S_A{}^2) + y^2(S_C z - S_A x)(S^2 - 3S_B{}^2)$$
$$+ z^2(S_A x - S_B y)(S^2 - 3S_C{}^2) = 0.$$

Auf dieser Kurve liegt z.B. auch das Zentrum des Neun-Punkte-Kreises $X(5)$ als Perspektivzentrum bzgl. der Umkreismitte M. Asymptote ist wieder die Euler-Gerade.

Diese Kurve der Perspektivzentren wird in [3] als Beispiel einer „pivotal non-isogonal circular cubic K_n“ näher beschrieben.

Man erhält sie aus der Neuberg-Kurve, indem man diese erst am Umkreis spiegelt (σ) und dann isogonal-konjugiert (*) abbildet. Bezeichnet man für Punkte P der Neuberg-Kurve die Zuordnung des Perspektivzentrums mit π, so gilt für die genannten Abbildungen $P^{\pi\kappa} = P^{\sigma *}$. Eine abschließende Übersicht zeigt die ansprechbaren Ergebnisse.

Punkt der Neuberg-K.	Perspektiv-zentrum	Isog.-konj. Bild der Spieg. am Umkreis
I	X(79)	X(80)
E_∞	X(265)	H
H	H	X(265)
$F_\pm$	?	?
$H_\pm$	$F_\pm$	$F_\mp$
N_e	?	E_∞
M	X(5)	---

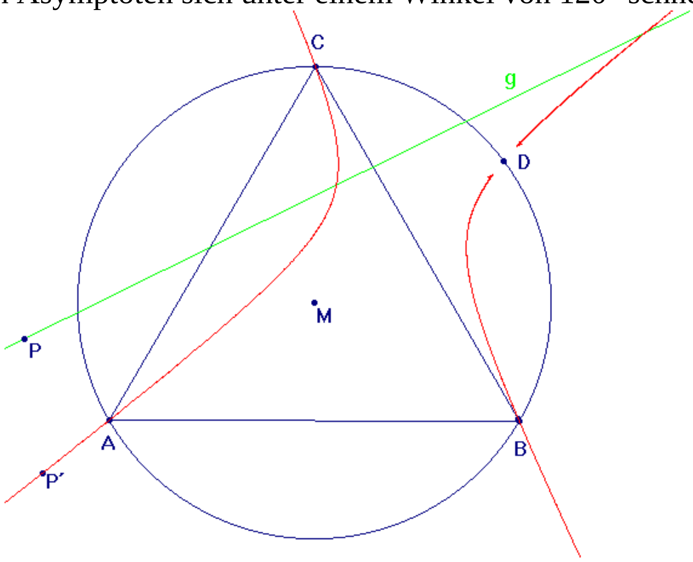
Betrachtet man zu den Spiegeldreiecken von Punkten der Neuberg-Kurve nicht die Perspektivzentren, sondern die Perspektivachsen, so verlaufen diese immer senkrecht zur Euler-Geraden.

4. Spezialfall eines gleichseitigen Bezugsdreiecks

Ist das Bezugsdreieck *ABC* gleichseitig, so ist das Spiegeldreieck jedes Punktes P perspektiv zu *ABC*. Für Punkte *Q* des Umkreises entartet das Spiegeldreieck zu drei kollinearen Punkten, deren Trägergerade parallel zur Simson-Geraden des Umkreispunktes *Q* ist.
Ordnet man jedem Punkt *P* das Perspektivzentrum Z=*P´* seines Spiegeldreiecks zu, so erhält man eine Punktabbildung der Ebene:

$$P(\,x : y : z\,)$$
$$\rightarrow P'(\,(x+y)(x+z):(y+x)(y+z):(z+x)(z+y)\,)\,.$$

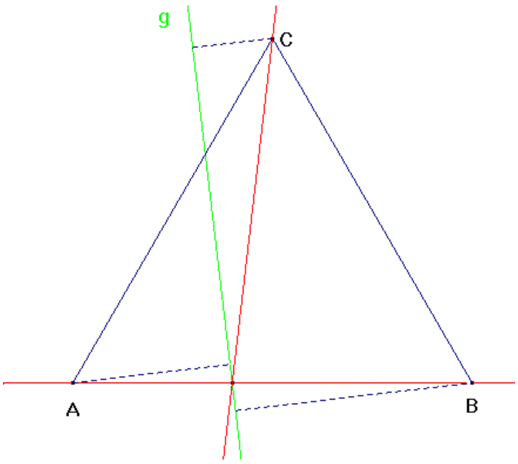
Das Perspektivzentrum P´ ist das isogonal-konjugierte Bild des Komplements von P, wobei man das Komplement durch Streckung vom Schwerpunkt S mit dem Faktor –1/2 erhält [vgl. Lösungsvorschlag Bubeck].
Fixpunkte sind neben den Ecken *A, B, C* auch der Mittelpunkt M des gleichseitigen Dreiecks; die Symmetrieachsen werden auf sich abgebildet. Die Seitengeraden werden zu Umhyperbeln, deren Asymptoten sich unter einem Winkel von 120° schneiden.



Betrachtet man das Bild einer Geraden $g\,(\,\alpha : \beta : \gamma\,)$ allgemein, so erhält man einen Umkegelschnitt mit der Gleichung

$$xy(\alpha+\beta-\gamma)+yz(-\alpha+\beta+\gamma)+zx(\alpha-\beta+\gamma) \quad = \quad 0.$$

Der vierte Umkreispunkt *D* des Umkegelschnitts ist das isogonal-bzw. isotom-konjugierte Bild des Fernpunktes von *g*; die Simson-Gerade von *D* ist senkrecht zu *g*. Der Pol der Geraden *g* bzgl. ihres Bildkegelschnitts ist der Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks.
Die Umkegelschnitte eines Geradenbüschels entarten in drei Fällen zu sich schneidenden Geraden, wenn die Summe der gerichteten Abstände zu zwei Ecken den gerichteten Abstand zu der dritten Ecke ergibt: Z.B. $\alpha+\beta=\gamma$; dann ist ein Hyperbelast die Seitengerade *AB* und der andere Ast die Verbindungsgerade von *C* und dem Schnittpunkt von *g* mit *AB*.



5. Fußpunktdreiecke

Betrachtet man zu einem Punkt *P* nicht das Spiegeldreieck, sondern das zugehörige streckungs-ähnliche Fußpunktdreieck $F_aF_bF_c$, so lassen sich entsprechende Aussagen machen.
Punkte, deren Fußpunktdreieck auch Ceva-Dreieck ist, liegen auf der Darboux-Kurve. Dies ist eine weitere Kurve dritter Ordnung, die bzgl. der isogonalen Konjugation invariant ist und als Pivot-Punkt den DeLongchamps-Punkt *L* = *X(20)* hat, den Spiegelpunkt des Höhenschnitts *H* an der Umkreismitte *M* [3]. Weitere Punkte der Darboux-Kurve sind z.B. die Inkreismitte *I* und die Ankreismitten, die Umkreismitte *M* und der Höhenschnitt *H*. Darüber hinaus ist die Darboux-Kurve symmetrisch zur Umkreismitte *M*.
Die Perspektivzentren liegen dann auf der Lucas-Kurve, ebenfalls eine Kurve dritter Ordnung, die auch isogonal-konjugiert invariant bleibt und als Pivot-Punkt das isotom-konjugierte Bild *H^* = *X(69)* des Höhenschnitts hat [3].

Literatur:

[1] G.M.Pinkernell: Cubic curves in the triangle plane. – Journal of Geometry, Vol. 55 (1996), S.141-161.

[2] C.Kimberling: Encyclopedia of triangle centers.- http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia.

[3] http://perso.wanadoo.fr/bernard.gibert

Eckart Schmidt - Hasenberg 27 - D 24223 Raisdorf
http://eckart_schmidt.bei.t-online.de
eckart_schmidt@t-online.de