

ACHSENAFFINE BILDQUADRATE EINES PARALLELOGRAMMS

Parallelelogramme sind affine Bilder von Quadraten, umgekehrt lassen sich Parallelelogrammen affine Bildquadrate zuordnen. Beschränkt man sich zu vorgegebenem Parallelelogramm auf die schwerpunktserhaltenden Achsenaffinitäten, die das Parallelelogramm auf ein Quadrat abbilden, so ergibt sich für die Bildquadrate ein geometrisch reizvoller Zusammenhang zu den beiden Bachmann-Quadraten [1], aus denen sich ein Parallelelogramm additiv zusammensetzt.

1. Vorbemerkung

Normalerweise werden Achsenaffinitäten im Zusammenhang mit Ellipsen betrachtet, die als affine Bilder von Kreisen dargestellt werden können. Zu jeder Geraden durch das Symmetriezentrum einer Ellipse gibt es zwei Achsenaffinitäten, die die Ellipse auf einen Kreis abbilden. Die Radien dieser konzentrischen Kreise schwanken von der kleinen bis zur großen Halbachse der Ellipse (Abb.1).

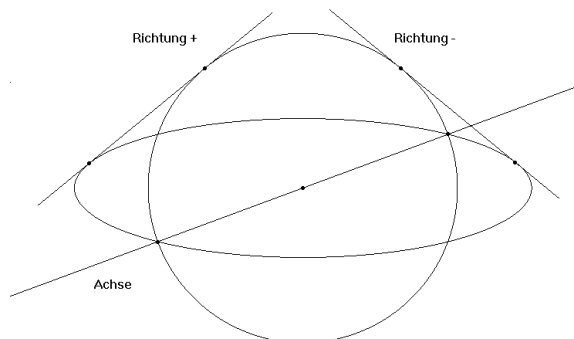


Abb.1 Achsenaffiner Bildkreis einer Ellipse

Interessanter wird die Fragestellung, wenn man ein Parallelelogramm vorgibt und nach achsenaffinen Bildquadraten fragt. Zu jeder Geraden durch den Schwerpunkt eines Parallelelogramms gibt es zwei Achsenaffinitäten, die das Parallelelogramm auf ein Quadrat abbilden (Abb.2).

Beide Fragestellungen stehen in engem Zusammenhang. Die Mittelparallelen eines Parallelelogramms legen als konjugierte Durchmesser eindeutig eine umbeschriebene Ellipse fest. Umgekehrt gehört zu jedem Paar konjugierter Durchmesser einer Ellipse das zugehörige Tangentenparallelogramm.

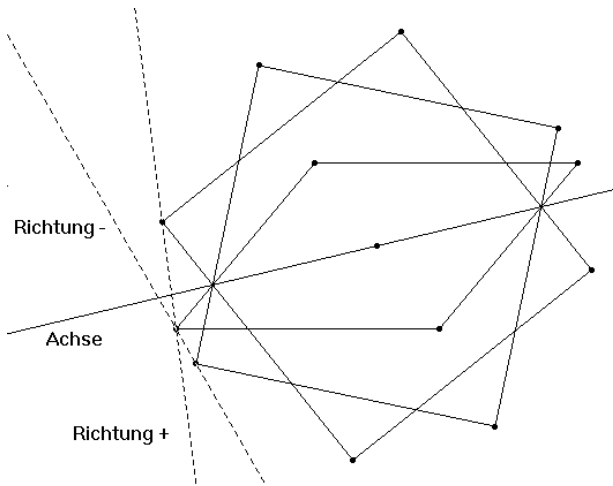


Abb.2 Achsenaffine Bildquadrate eines Parallelogramms

Zwei Beispiele für achsenaffine Bildquadrate eines Parallelogramms: Betrachtet man die Diagonalen des Parallelogramms als Affinitätsachsen, so erhält man Bildquadrate, die mit dem Parallelogramm in zwei Gegenecken übereinstimmen (Abb. 3). Legt man die Affinitätsrichtungen in die Seitengeraden, so erhält man Bildquadrate zwischen den parallelen Parallelogrammseiten (Abb.3); die Achsenrichtungen ergeben sich aus den Schnittpunkten der Quadrat- und Parallelogrammseiten bzw. deren Verlängerungen.

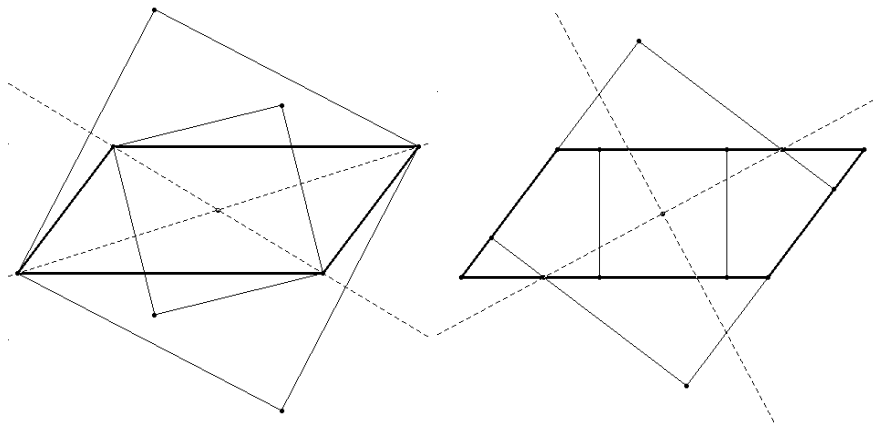


Abb.3 Diagonalenquadrate und Zwischenseitenquadrate

Die Gesamtheit der schwerpunkts gleichen achsenaffinen Bildquadrate eines vorgegebenen Parallelogramms lässt sich mit Hilfe der Bachmann-Quadrate überblicken wie abschließend gezeigt wird.

2. Achsenaffinitäten

Unter einer Achsenaffinität sei hier eine perspektive Affinität verstanden, die keine Scherung ist (vgl. z.B. [2], S.88). Eine Achsenaffinität ist daher festgelegt durch eine Affinitätsachse, eine Affinitätsrichtung, die nicht mit der Achsenrichtung übereinstimmt, und einen Affinitätsfaktor ungleich Null. Die

Affinitätsachse bleibt punktweise fest, Vektoren in Affinitätsrichtung werden um den Affinitätsfaktor gestreckt.

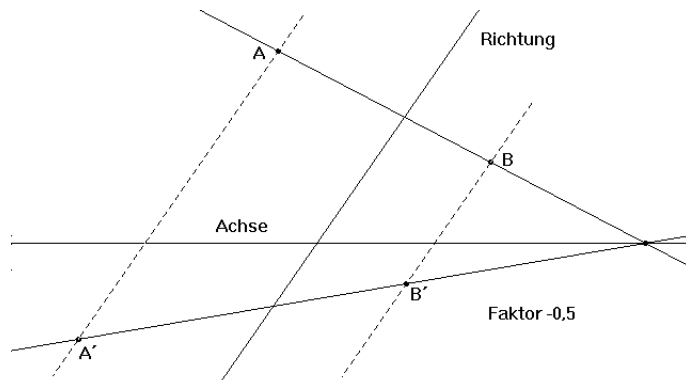


Abb.4 Achsenaffinität

Einem Parallelogramm können bei vorgegebener Achse zwei Quadrate durch Achsenaffinitäten zugeordnet werden, je nachdem der Affinitätsfaktor positiv oder negativ gewählt wird (vgl. [2], S.90). Die Bildquadrate unterscheiden sich dann durch eine Spiegelung an der Affinitätsachse und damit in ihrem Umlaufsinn (Abb.2).

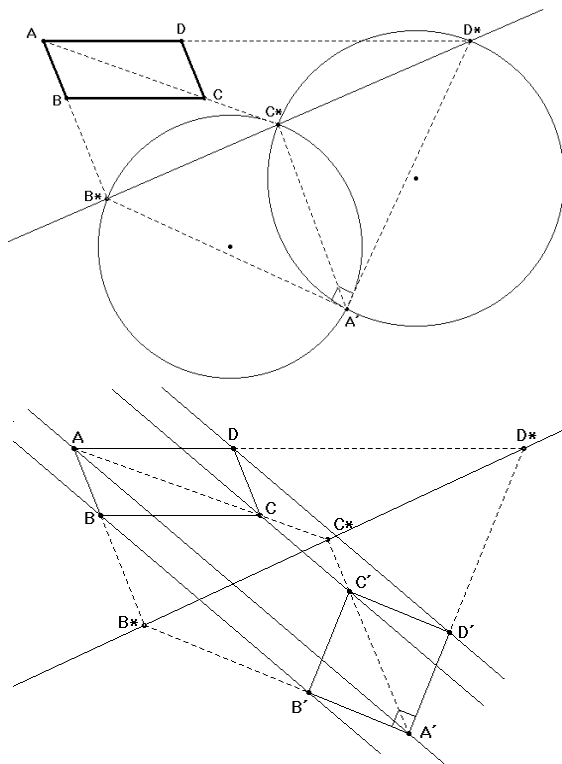


Abb.5 Konstruktion eines achsenaffinen Bildquadrats

Die Konstruktion achsenaffiner Bildquadrate eines Parallelogramms lässt sich für den Fall einer nicht seitenparallelen Achse folgendermaßen andeuten (Abb.5) : Die Seitengeraden AB und AD sowie die Diagonalengerade AC schneiden die Achse in B^* , D^* sowie C^* . Zeichnet man zu den Strecken B^*C^* und C^*D^* Kreise mit einem Umfangswinkel von 45° , so liefert der Schnittpunkt den Bildpunkt A' von A . Dieser

Schnittpunkt kann je nach Konstruktion der Kreise auf der gleichen Achsenseite mit A (positiver Affinitätsfaktor) oder spiegelbildlich zur Achse auf der entgegengesetzten Seite liegen (negativer Affinitätsfaktor wie in der Abbildung). Die Affinitätsrichtung AA' legt dann unschwer das Bildquadrat fest (vgl. auch [5] Bd.4, S.102).

Legt man die Achse der Affinität durch das Symmetriezentrum des Parallelogramms, so haben Bildquadrat und Parallelogramm den gleichen Schwerpunkt.

DEF: Eine Achsenaffinität sei als Q-Affinität eines Parallelogramms bezeichnet, wenn die Achse durch den Schwerpunkt des Parallelogramms verläuft und das Parallelogramm auf ein Quadrat abgebildet wird.

Im Folgenden werden zu einem Parallelogramm nur noch Q-Affinitäten betrachtet. Sie zerfallen in Q^+ - und Q^- -Affinitäten, je nachdem der Affinitätsfaktor positiv oder negativ ist.

3. Die Bachmann-Quadrate eines Parallelogramms

Die geometrischen Zusammenhänge werden in einer euklidischen Ebene über dem Körper der reellen Zahlen behandelt. Vektoren und Matrizen werden, wenn nicht anders erwähnt, in einer positiv orientierten Orthonormalbasis dargestellt.

Der Schwerpunkt des Parallelogramms wird in den Ursprung gelegt. Dann hat das Quadrupel der Ortsvektoren der Parallelogrammecken eine Darstellung

$$(\vec{a}, \vec{b}, -\vec{a}, -\vec{b}) \quad (\vec{a}, \vec{b} \text{ linear unabhängig}).$$

Weiterhin sei für das Parallelogramm ein positiver Umlaufsinn angenommen.

Das Parallelogramm ist somit durch die ersten beiden Ecken festgelegt. Fasst man die zugehörigen Ortsvektoren als Spaltenvektoren einer regulären 2×2 -Matrix zusammen, so erhält man die

$$\text{Parallelogrammmatrix } P = (\vec{a}, \vec{b}) \text{ mit } \det(P) = p \neq 0.$$

Quadrate lassen sich in dieser Weise - je nach Umlaufsinn - darstellen in der Form

$$Q = (\vec{q}, \pm D\vec{q}) \quad \text{mit } \vec{q} \neq \vec{o}.$$

Hierbei bezeichnet D eine 90° -Drehung um den Ursprung mit den bekannten Eigenschaften

$$D^{-1} = D^T = -D \quad \text{und} \quad D^2 = -E.$$

Die kennzeichnende Gleichung für Quadratmatrizen ist

$$QQ^T = Q^TQ = \det(Q)E.$$

Die angesprochene eindeutige Bachmann-Zerlegung eines Parallelogramms P in die Summe zweier schwerpunktsgleicher

Quadrate C_1, C_2 entgegengesetzten Umlaufsinnns (vgl.[1], S.156) entnimmt man unmittelbar dem Ansatz

$$P = C_1 + C_2 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{c}_1, D\vec{c}_1) + (\vec{c}_2, -D\vec{c}_2)$$

$$\Leftrightarrow \vec{c}_1 = \frac{1}{2}(\vec{a} - D\vec{b}) \quad \text{und} \quad \vec{c}_2 = \frac{1}{2}(\vec{a} + D\vec{b}) .$$

Bezeichnet man mit I die Abbildung, die die Indizierung des Parallelogramms zyklisch verschiebt, so ergeben sich die beiden Bachmann-Quadrate zu

$$C_{1,2} = \frac{1}{2}(E \mp DI)P$$

Die Konstruktion der beiden Bachmann-Quadrate eines Parallelogramms ist aus Abbildung 6 ersichtlich (vgl.[1], S.155). Dreht man den Punkt B um den Schwerpunkt des Parallelogramms um $\pm 90^\circ$ und verbindet die beiden Bildpunkte mit dem Punkt A , so sind die Mittelpunkte dieser Verbindungsstrecken die Ecken A_2, A_1 der beiden Bachmann-Quadrate. Die vektorielle Addition der beiden Quadrate ergibt dann das Parallelogramm, d.h. die Parallelogrammecke A ist der vierte Parallelogrammpunkt von A_1, O, A_2 usw.

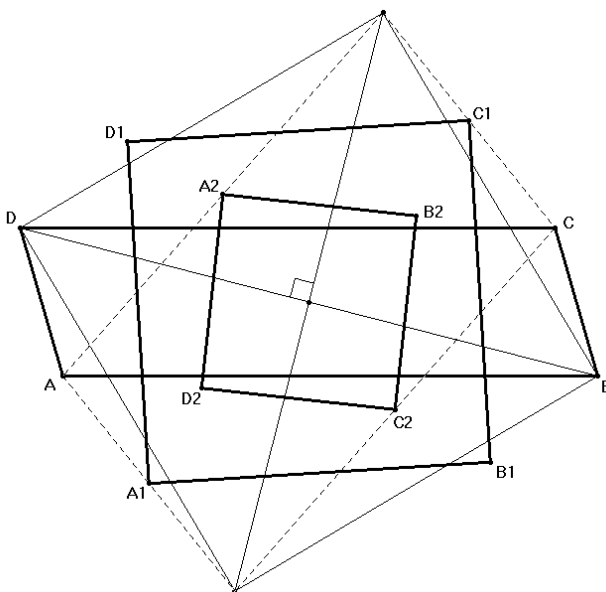


Abb.6 Die Bachmann-Quadrate eines Parallelogramms

4. Q-Affinitäten eines Parallelogramms

Die Q-Affinitäten eines Parallelogramms lassen sich als reguläre 2×2 -Abbildungsmatrizen A darstellen. Da Achsenaffinitäten Vektoren in Achsenrichtung fest lassen und Vektoren in Affinitätsrichtung mit dem Affinitätsfaktor a strecken, kann die Abbildungsmatrix A auf Diagonalgestalt $diag(1, a)$ transformiert werden, d.h. der Affinitätsfaktor ist die Determinante von A .

Da eine Q-Affinität das Parallelogramm auf ein Quadrat abbildet, gilt

$$AP = Q \quad \text{mit } \det(Q) = ap$$

$$\text{und } QQ^T = AP(AP)^T = APP^T A^T = apE.$$

In der Form

$$(4.1) \quad \frac{1}{a} A^T A = \left(\frac{1}{p} PP^T\right)^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{p} PP^T = \left(\frac{1}{a} A^T A\right)^{-1}$$

wird auf diesen Zusammenhang zurückgegriffen.

Von besonderem Interesse sind normale Q-Affinitäten N , bei denen die Affinitätsrichtung senkrecht zur Affinitätsachse verläuft. Für sie existiert eine positiv orientierte Orthonormalbasis \vec{e}_1, \vec{e}_2 , in der die Abbildungsmatrix N Diagonalgestalt hat:

$$N = \text{diag}(1, n) \quad (\text{normale Q-Affinität}).$$

Aus (4.1) entnimmt man

$$(4.2) \quad \frac{1}{p} PP^T = \left(\frac{1}{n} N^T N\right)^{-1} = \text{diag}\left(n, \frac{1}{n}\right)$$

$$\text{bzw.} \quad N^T N = \text{diag}(1, n^2) \quad \text{mit } n \text{ Eigenwert von } \frac{1}{p} PP^T.$$

Beschränkt man sich auf normale Q^+ -Affinitäten, so liefern die zueinander reziproken Eigenwerte der symmetrischen Matrix $\frac{1}{p} PP^T$ die Affinitätsfaktoren und zugehörige Eigenvektoren \vec{e}_1, \vec{e}_2 die Richtungen der Achsen von zwei normalen Q^+ -Affinitäten, die in dieser Basis Diagonalgestalt haben:

$$(4.3) \quad N_1^+ = \text{diag}(1, n) \quad \text{und} \quad N_2^+ = \text{diag}\left(\frac{1}{n}, 1\right) \quad \text{mit} \quad N_1^+ = nN_2^+.$$

Für die zugehörigen Quadrate gilt:

$$(4.4) \quad Q_1^+ = N_1^+ P \quad \text{und} \quad Q_2^+ = N_2^+ P \quad \text{mit} \quad Q_1^+ = nQ_2^+,$$

d.h. sie gehen durch zentrische Streckungen mit den Affinitätsfaktoren auseinander hervor. Diese beiden Quadrate haben einen überraschenden geometrischen Bezug zu den Bachmann-Komponenten eines Parallelogramms: Ihr arithmetisches Mittel ergibt das Bachmann-Quadrat mit positivem Umlaufsinn:

$$\frac{1}{2}(Q_1 + Q_2) = \frac{1}{2}(N_1^+ + N_2^+)P \quad (4.4)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\text{diag}(1, n) + \text{diag}\left(\frac{1}{n}, 1\right) \right] P = \frac{1}{2} \left[E + \text{diag}\left(\frac{1}{n}, n\right) \right] P \quad (4.3)$$

$$= \frac{1}{2} \left[E + \left(\frac{1}{p} PP^T\right)^{-1} \right] P = \frac{1}{2} \left[E + \frac{1}{a} A^T A \right] P \quad (4.2), (4.1)$$

$$= \frac{1}{2} [E - DA^{-1}DA]P = \frac{1}{2} [E - DI]P = C_1 \quad (4.5), (4.6)$$

Im vorletzten Schritt wird benutzt, dass alle kongruenten Matrizen $A^T D A$ einer 90° -Drehmatrix nur eine 90° -Drehstreckung um den Faktor $\det(A)$ liefern:

$$(4.5) \quad A^T D A = \det(A) D = a D \quad .$$

Im letzten Schritt wird berücksichtigt, dass eine Drehung um 90° für die Bildquadrate eine zyklische Verschiebung der Indizierung bedeutet:

$$(4.6) \quad D A P = I A P = A I P \quad .$$

Wählt man statt der normalen Q^+ -Affinitäten eines Parallelogramms die zugehörigen Q^- -Affinitäten, so erhält man analog das zweite Bachmann-Quadrat mit negativem Umlaufsinn. Zusammenfassend gilt der folgende Satz:

SATZ 1. Das arithmetische Mittel der Bildquadrate zu den normalen Q^+ - (bzw. Q^-) Affinitäten eines Parallelogramms liefert das Bachmann-Quadrat mit positivem (bzw. negativem) Umlaufsinn.

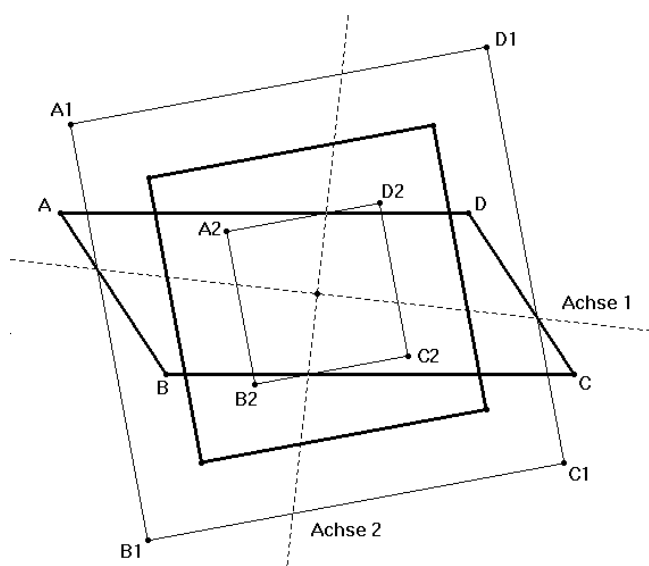


Abb.7 Bildquadrate eines Parallelogramms bei den beiden normalen Q^+ -Affinitäten sowie das zugehörige Bachmann-Quadrat

Da die Bildquadrate zu den normalen Q^+ - (bzw. Q^-) Affinitäten durch zentrische Streckungen auseinander hervorgehen, lassen sich auch die Bachmannschen Quadrate durch zentrische Streckungen aus ihnen gewinnen:

$$C_1 = \frac{1}{2} (N_1^+ + N_2^+) P = \frac{n+1}{2n} N_1^+ P = \frac{n+1}{2n} Q_1^+ \quad (\text{Satz 1}), (4.3)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} (N_1^- + N_2^-) P = \frac{n-1}{2n} N_1^- P = \frac{n-1}{2n} Q_1^- \quad (\text{Satz 1}), (4.3)$$

5. Die Achsen eines Parallelogramms

Bei einer Ellipse sind die Bezeichnungen Haupt- und Nebenachse gängige Begriffe. Sie sind nicht nur die Symmetrieachsen, sondern die Achsen der normalen Achsenaffinitäten, die die Ellipse in einen Kreis überführen. In dieser Interpretation lässt sich der Achsenbegriff auch auf Parallelogramme übertragen.

DEF: Unter den Achsen eines Parallelogramms seien die Achsen der normalen Q-Affinitäten eines Parallelogramms verstanden.

Für Rechteck und Rhombus fallen diese Parallelogrammachsen mit den Symmetrieachsen zusammen.

Wie oben ausgeführt, werden die normalen Q^+ -Affinitäten eines Parallelogramms durch die symmetrische Matrix $\frac{1}{p}PP^T$ bestimmt. Die zueinander reziproken Eigenwerte sind die Affinitätsfaktoren n und $\frac{1}{n}$; zugehörige Eigenvektoren \vec{e}_1 und \vec{e}_2 legen die Achsen der normalen Q^+ -Affinitäten und damit die Achsen des Parallelogramms fest.

Jede Achsenaffinität - Identität und Achsenspiegelung ausgenommen - besitzt bekanntlich ein eindeutig bestimmtes invariantes Rechtwinkelpaar, d.h. ein Paar zueinander senkrechter Richtungen, deren Bildrichtungen wieder senkrecht zueinander sind (vgl. [2] S.93; [4] S.374; [5] Bd.4, S.102).

SATZ 2. Alle Q-Affinitäten eines Parallelogramms haben das gleiche invariante Rechtwinkelpaar parallel zu den Achsen des Parallelogramms.

Zum Beweis: Die Achsen des Parallelogramms werden durch orthogonale Eigenvektoren \vec{e}_1, \vec{e}_2 der Matrix $\frac{1}{p}PP^T$ festgelegt,

für ihre Bilder gilt:

$$A\vec{e}_1 \cdot A\vec{e}_2 = A^T A \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \quad (5.1)$$

$$= a\left(\frac{1}{p}PP^T\right)^{-1} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = ae_1^{-1} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0. \quad (4.1)$$

Benutzt wird im ersten Schritt, dass die adjungierte Abbildung durch die transponierte Matrix beschrieben wird:

$$(5.1) \quad \vec{x} \cdot B\vec{y} = B^T \vec{x} \cdot \vec{y}.$$

Im vorletzten Schritt wird berücksichtigt, dass \vec{e}_1 auch Eigenvektor der Matrix $\left(\frac{1}{p}PP^T\right)^{-1}$ ist.

Abschließend sei eine geometrische Kennzeichnung der Parallelogrammachsen gegeben, die zwar eine Konstruktion nicht erleichtert.

SATZ3. Die Achsen eines Parallelogramms sind zwei orthogonale Geraden durch den Schwerpunkt, die benachbarte Seiten im gleichen Verhältnis teilen.

Beweis: Die Eigenwerte der Matrix $\frac{1}{p}PP^T$ errechnen sich zu

$$e_1 = \frac{|\vec{a} + \lambda\vec{b}|}{|\vec{b} - \lambda\vec{a}|} \quad \text{und} \quad e_2 = \frac{|\vec{b} - \lambda\vec{a}|}{|\vec{a} + \lambda\vec{b}|}$$

$$\text{mit } \lambda = c + \sqrt{1+c^2} \quad \text{und} \quad c = \frac{\vec{b}^2 - \vec{a}^2}{2\vec{a}\vec{b}}.$$

Dann sind die Vektoren

$$\frac{1}{1+\lambda}(\vec{a} + \lambda\vec{b}) = \vec{a} + \frac{\lambda}{1+\lambda}(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\text{und} \quad \frac{1}{1+\lambda}(\vec{b} - \lambda\vec{a}) = \vec{b} + \frac{\lambda}{1+\lambda}(-\vec{a} - \vec{b})$$

Eigenvektoren von $\frac{1}{p}PP^T$ und gleichzeitig Ortsvektoren von

Punkten, die die Seiten \overline{AB} und \overline{BC} im Verhältnis λ teilen.

6. Konstruktion der Parallelogrammachsen

Das gemeinsame invariante Rechtwinkelpaar aller Q-Affinitäten eines Parallelogramms liefert Konstruktionsmöglichkeiten für die Achsen eines Parallelogramms (vgl. Abb.8):

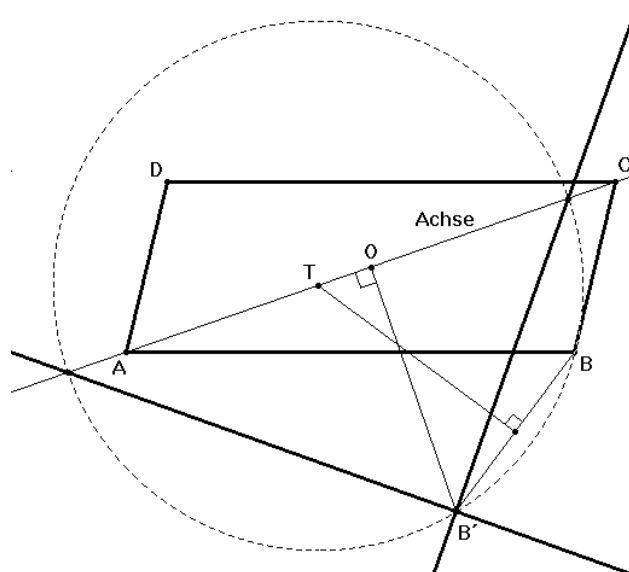


Abb.8 Konstruktion der Achsenrichtungen eines Parallelogramms

Betrachtet man die Q^+ -Affinität eines Parallelogramms mit der Diagonalengeraden AC als Achse, so erhält man den Bildpunkt B' von B durch eine Drehung von A um 90° (vgl. Abb. 3). Die Mittelsenkrechte von BB' schneidet die Achse im Punkt T , der als Mittelpunkt eines Thaleskreises durch die Punkte B und B' bzgl. der Achse das invariante Rechtwinkelpaar im Punkt B liefert. Damit liegen die Richtungen der Achsen fest. Hierbei wird auf gängige Konstruktionen des invarianten Rechtwinkelpaares zurückgegriffen ([2] S.93).

Die Konstruktion vereinfacht sich, wenn man - die Ergebnisse verallgemeinernd - eine Seite des Parallelogramms als Achse und das Quadrat über dieser Seite als Bildquadrat einer Affinität wählt und das Rechtwinkelpaar direkt für das Symmetriezentrum des Parallelogramms konstruiert (vgl. [5] Bd.4, S.104). Grundsätzlich lässt sich jede Achsenkonstruktion einer Ellipse zu einer Achsenkonstruktion eines Parallelogramms umwandeln, indem man die Mittelparallelen eines Parallelogramms als konjugierte Durchmesser einer umbeschriebenen Ellipse auffasst (vgl. z.B. [2], S.107; [4], S.376; [5] Bd.4, S.104).

Eine weitere Achsenkonstruktion ergibt sich aus der Lage der Bachmann-Quadrate zu den Achsen. Die Bachmann-Quadrate eines Parallelogramms liegen bis auf eine zentrische Streckung achsensymmetrisch zu den Parallelogramm-Achsen.

Zum Beweis: Die Bildquadrate von Q -Affinitäten eines Parallelogramms werden bei gleicher Achse, aber entgegengesetztem Affinitätsfaktor durch eine Spiegelung an dieser Achse aufeinander abgebildet. Daher gilt z.B.

$$N_1^- P = S_1 N_1^+ P,$$

wobei S_I eine Spiegelung an der ersten Achse bedeutet. Damit ergibt sich:

$$C_2 = \frac{n-1}{2n} N_1^- P = \frac{n-1}{2n} S N_1^+ P = \frac{n-1}{n+1} S_1 C_1 \quad (4.7)$$

und entsprechend $C_2 = -\frac{n-1}{n+1} S_2 C_1$.

Damit sind die Achsen eines Parallelogramms die Winkelhalbierenden der Ursprungsgeraden durch entsprechende Punkte der Bachmann-Quadrate. Hieraus gewinnt man folgende einfache Achsenkonstruktion für Parallelogramme (und damit auch für Ellipsen):

Dreht man den Parallelogramm-Punkt B um $\pm 90^\circ$ um den Schwerpunkt des Parallelogramms und verbindet die Bildpunkte B^+ und B^- mit A , so sind die Mittelpunkte dieser Verbindungsstrecken entsprechende Ecken A_2 und A_1 der Bachmann-Quadrate (vgl. Abb.6). Die Winkelhalbierende des

Winkels $\angle A_1OA_2$ ist dann eine Achse des Parallelogramms (Abb.9).

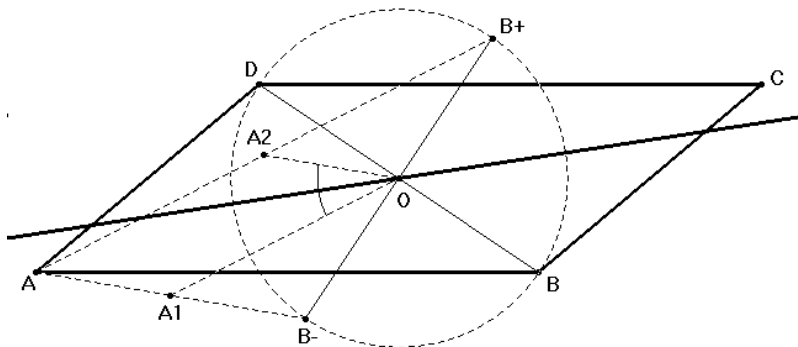


Abb.9 Konstruktion der Achsen eines Parallelogramms

7. Die Bildquadrate aller Q-Affinitäten

Die Zusammenhänge des obigen Satzes lassen sich verallgemeinern, wenn man die Gesamtheit der Bildquadrate eines Parallelogramms bei Q-Affinitäten betrachtet:

SATZ 4. Die Ecken der Bildquadrate von Q^+ - (bzw. Q^-) Affinitäten eines Parallelogramms liegen auf Kreisen gleichen Radius. Die Mittelpunkte dieser Kreise sind die Ecken der positiven (bzw. negativen) Bachmann-Quadratkomponente des Parallelogramms. Der Radius der Kreise ist der Umkreisradius des anderen Bachmann-Quadrats.

Zum Beweis kann man sich auf die Bilder der ersten Parallelogrammecke bei Q^+ -Affinitäten des Parallelogramms beschränken. Zur Herleitung einer Kreisgleichung für

$$\vec{x} = A\vec{a} \quad (A \text{ } Q^+\text{-Affinität})$$

wird von dem charakteristischen Polynom von A ausgegangen. Aufgrund der Eigenwerte 1 und a (Affinitätsfaktor) ergibt sich

$$(A - E)(A - aE) = O.$$

Multipliziert man von rechts mit A^{-1} und von links mit D (90° -Drehmatrix), so ergibt sich

$$DA - D - aD + aDA^{-1} = O.$$

Mit (4.5) gelingt eine Elimination von a :

$$DA - D - A^T DA + A^T D = O.$$

Angewandt auf \vec{a} und skalar mit \vec{b} multipliziert, erhält man:

$$DA \vec{a} \cdot \vec{b} - D \vec{a} \cdot \vec{b} - A^T DA \vec{a} \cdot \vec{b} + A^T D \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Unter Berücksichtigung von (5.1) und $D^T = -D$ ist folgende Umschreibung möglich:

$$-A\vec{a} \cdot D\vec{b} + \vec{a} \cdot D\vec{b} + A\vec{a} \cdot DA\vec{b} - \vec{a} \cdot DA\vec{b} = 0.$$

Mit $D\vec{a} = -A\vec{a} = -\vec{x}$ gelingt eine die Abbildungsmatrix A nicht mehr explizit enthaltende Gleichung in \vec{x} :

$$-\vec{x} \cdot D\vec{b} + \vec{a} \cdot D\vec{b} - \vec{x}^2 + \vec{a} \cdot \vec{x} = 0.$$

Dies ist in der Form

$$\left[\vec{x} - \frac{1}{2}(\vec{a} - D\vec{b})\right]^2 = \frac{1}{4}(\vec{a} + D\vec{b})^2$$

die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt

$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} - D\vec{b})$$

und dem Radius $r = \left| \frac{1}{2}(\vec{a} + D\vec{b}) \right|$

Der Mittelpunkt ist die erste Ecke der positiven Bachmannschen Komponente. Der Radius ist der Betrag der Ortsvektoren der negativen Bachmannschen Komponente. q.e.d.

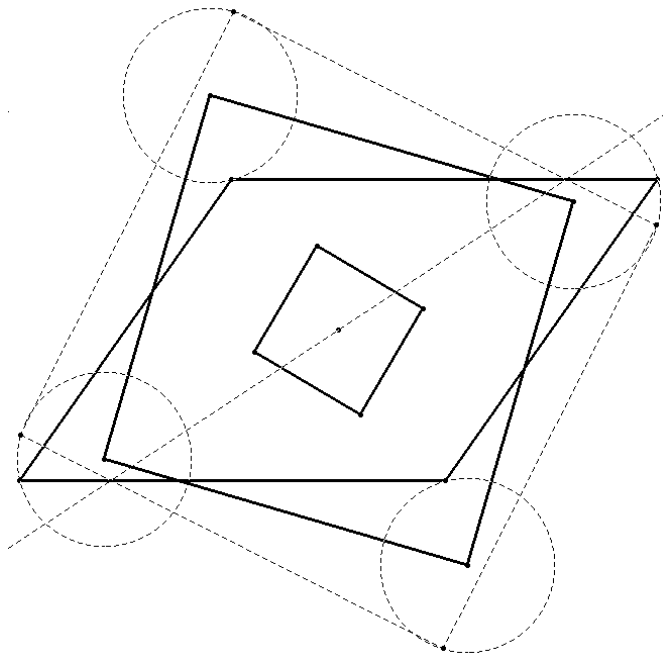


Abb.10 Die Bildquadrate bei Q^+ -Affinitäten

Literatur

- [1] F. Bachmann – E. Schmidt: n-Ecke. – BI-Hochschultaschenbuch 471/471a*, Mannheim 1970.
- [2] M. Jeger: Konstruktive Abbildungsgeometrie. – Luzern und Stuttgart: Rieber Verlag 1973.
- [3] H.-J. Kowalsky: Lineare Algebra. – Berlin, New York: de Gruyter 1979.

- [4] H. Krämer – R. Höwelmann – I. Klemisch: Analytische Geometrie und Lineare Algebra. – Frankfurt am Main: Diesterweg 1989.
- [5] G. Wolff: Handbuch der Schulmathematik Bd4. – Hannover: Schroedel Verlag.

Eckart Schmidt - Hasenberg 27 - D 24223 Ralsdorf
http://eckart_schmidt.bei.t-online.de
eckart_schmidt@t-online.de