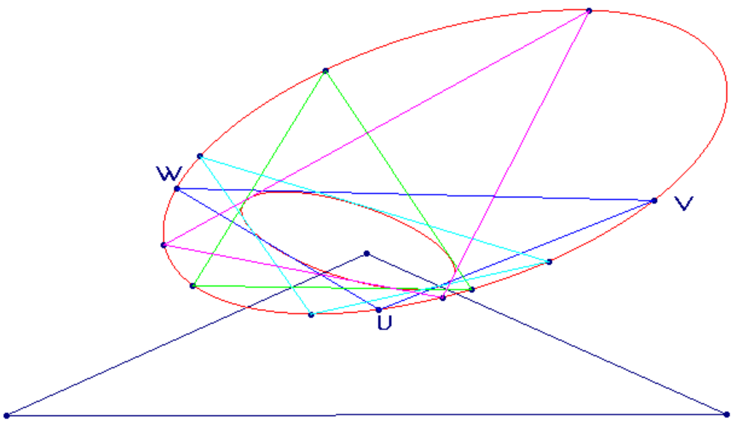
Perspektive Dreiecke
zwischen zwei Kegelschnitten

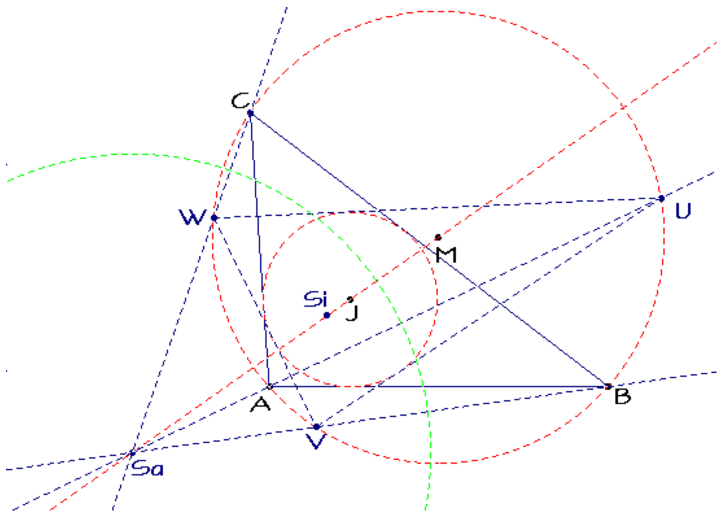
Eckart Schmidt

Einleitend werden perspektive Dreiecke mit gleichem In- und Umkreis angesprochen. Dabei erweisen sich die Grundpunkte des hyperbolischen Kreisbüschels zu In- und Umkreis als Perspektivzentren von Zwischendreiecken. Für perspektive Dreiecke mit gleichem Berühr- und Um-Kegelschnitt sind diese Zentren die Ecken eines gemeinsamen selbst-polaren Dreiecks. – Gearbeitet wird in baryzentrischen Koordinaten.



Zwischen In- und Umkreis

Für ein Bezugsdreieck *ABC* kann jeder Punkt *U* des Umkreises Ecke eines Zwischendreiecks *UVW* mit gleichem In- und Umkreis sein. Gesucht werden *ABC*-perspektive Zwischendreiecke und die zugehörigen Zentren.



Für eine analytische Behandlung mit baryzentrischen Koordinaten habe das Bezugsdreieck ABC die Seitenlängen a, b, c. Benutzt werden die Conway-Abkürzungen

$$2S_A = -a^2 + b^2 + c^2, \quad 2S_B = a^2 - b^2 + c^2, \quad 2S_C = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\text{sowie} \quad S = \sqrt{S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A} = 2\Delta .$$

Dann ergibt sich für den Inkreis:

$$\text{Inkreismitte} \quad J(a:b:c), \quad \text{Inkreisradius} \quad \rho = \frac{S}{a+b+c},$$

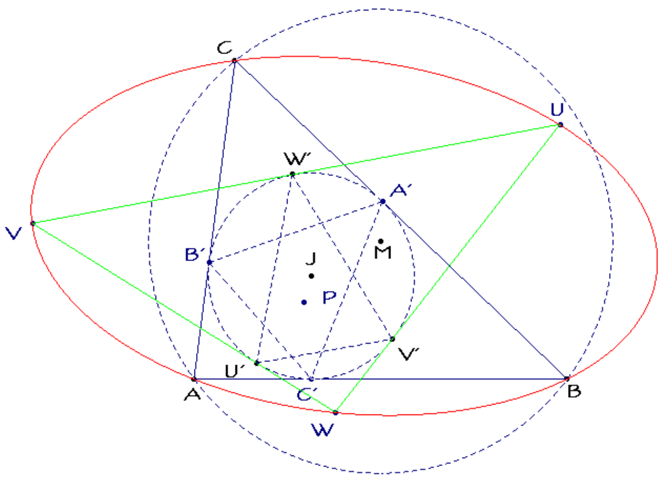
und für den Umkreis:

$$\text{Umkreismitte} \quad M(a^2 S_A : b^2 S_B : c^2 S_C), \quad \text{Umkreisradius} \quad r = \frac{abc}{2S}.$$

In- und Umkreis sind Kreise eines hyperbolischen Kreisbüschels mit den Grundpunkten

$$\begin{aligned} S_{i,a}(& a[(a+b-c)(a^2+c^2-ab-bc) \\ & \qquad \pm \frac{2(c-a)S}{-a+b+c}\sqrt{2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2}\;] \\ & : b[(a+b-c)(b^2+c^2-ca-ab) \\ & \qquad \pm \frac{2(c-b)S}{a-b+c}\sqrt{2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2}\;] \\ & : -2c^2(a^2+b^2-bc-ca)) \end{aligned}$$

auf der Verbindungsgeraden von In- und Umkreismitte. Jeder Kreis durch diese Grundpunkte schneidet In- und Umkreis senkrecht, so dass S_i und S_a durch Spiegelungen an In- und Umkreis aufeinander abgebildet werden. Jeder der Grundpunkte S_i und S_a hat bzgl. In- und Umkreis identische Polaren. Diese Grundpunkte erweisen sich nachfolgend als Zentren perspektiver Zwischendreiecke. Spiegelt man also das Bezugsdreieck an einem zum Umkreis senkrechten Kreis um den äußeren Grundpunkt S_a, so erhält man ein perspektives Zwischendreieck.



Genauer: Der Inkreis berührt die Seiten des Bezugsdreiecks in den Ecken des Ceva-Dreiecks $A´B´C´$ des Gergonne-Punktes G (s bezeichne den halben Umfang von ABC):

$$A´(0:(s-c)(s-a):(s-a)(s-b)),$$

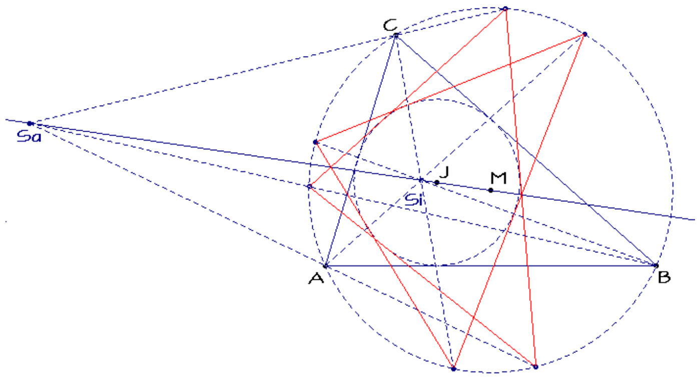
$$B'((s-b)(s-c):0:(s-a)(s-b)),$$
$$C'((s-b)(s-c):(s-c)(s-a):0).$$

Betrachtet man im Inkreis ein zu $A'B'C'$ perspektives Dreieck $U'V'W'$ mit dem Zentrum $P(p:q:r)$ und dazu das umbeschriebene Tangentendreieck *UVW*, so liegen die Ecken *U*, *V*, *W* auf einem Um-Kegelschnitt des Bezugsdreiecksdreiecks *ABC* mit der Gleichung

$$\frac{pyz}{-(s-a)p+(s-b)q+(s-c)r}+\frac{qzx}{(s-a)p-(s-b)q+(s-c)r}$$
$$+\frac{rxy}{(s-a)p+(s-b)q-(s-c)r}=0,$$

und die Dreiecke *ABC* und *UVW* sind wie ihre Berührdreiecke $A'B'C'$ und $U'V'W'$ *P*-perspektiv.

Dieser Kegelschnitt wird für die Grundpunkte S_i und S_a zum Umkreis. Damit liefern S_i und S_a als Perspektivzentren zu einem Zwischendreieck *ABC* zwei perspektive Zwischendreiecke, die symmetrisch zu *JM* liegen.



Zwischen Berühr- und Um-Kegelschnitt

Zu einem Bezugsdreieck *ABC* wird ein nicht entarteter Um-Kegelschnitt betrachtet. Tripolaren von Punkten des Um-Kegelschnitts haben bzgl. *ABC* einen gemeinsamen Punkt $K(k:l:m)$, der nicht auf einer der Seitengeraden liegt. Die Gleichung des Umkegelschnitts ist dann

$$kyz+lzx+mxy=0.$$

Für ein Perspektivzentrum $P(p:q:r)$ ergibt sich dann ein *ABC*-perspektives Dreieck *UVW* mit den Ecken

$$U(-kqr:q(mq+lr):r(mq+lr)),$$
$$V(p(mq+kr):-lpr:r(mp+kr)),$$
$$W(p(lp+kq):q(lp+kq):-mpq)$$

auf dem Um-Kegelschnitt.

Für Perspektivzentren, die nicht auf den Ecktangenten des Bezugsdreiecks liegen (Seiten des Anti-Ceva-Dreiecks des K-Punktes), legen die beiden perspektiven Dreiecke mit ihren Seitengeraden einen gemeinsamen Berühr-Kegelschnitt fest. Kennzeichnet man diesen Berühr-Kegelschnitt durch seinen

Brianchon-Punkt B_r, dessen Ceva-Dreieck das Berührdreieck ist, so ergibt sich

$$B_r(u:v:w) = B_r\left(\frac{lmp}{mq+lr} : \frac{kmq}{mp+kr} : \frac{klr}{lp+kq}\right),$$

und der Berühr-Kegelschnitt erhält die Gleichung

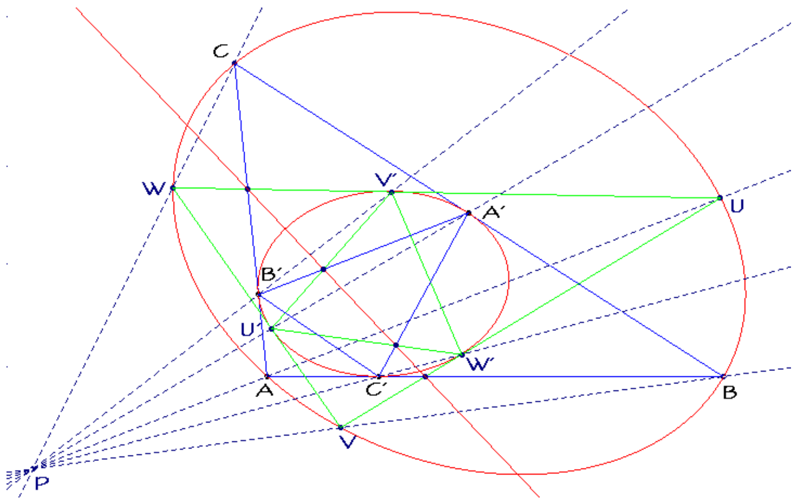
$$v^2w^2x^2 + u^2w^2y^2 + u^2v^2z^2 - 2uvw(uyz + vzx + wxy) = 0.$$

Dann hat das Berührdreieck $A'B'C'$ zu ABC die Ecken

$$A'(0 : mq(lp+kq) : lr(mp+kr)),$$
$$B'(mp(lp+kq) : 0 : kr(mq+lr))$$
$$C'(lp(mp+kr) : kq(mq+lr) : 0),$$

und für das Berührdreieck $U'V'W'$ *zu* UVW gilt

$$U'\left(p(mq+lr) : \frac{klqr^2}{mp+kr} : \frac{kmq^2r}{lp+kq}\right),$$
$$V'\left(\frac{klpr^2}{mq+lr} : q(mp+kr) : \frac{lmp^2r}{lp+kq}\right),$$
$$W'\left(\frac{kmpq^2}{mq+lr} : \frac{lmp^2q}{mp+kr} : r(lp+kq)\right).$$



Damit erhält man folgende Ergebnisse:

(1) Nicht nur die Zwischendreiecke ABC und UVW, sondern auch ihre Berührdreiecke $A'B'C'$ und $U'V'W'$ liegen perspektiv bzgl. P.

(2) Die Polaren des Perspektivzentrums P bzgl. der beiden Kegelschnitte sind identisch. Die gemeinsame Polare verläuft durch die Schnittpunkte entsprechender Seiten von ABC und UVW bzw. $A'B'C'$ und $U'V'W'$. Umgekehrt erweist sich ein Punkt mit gleicher Polaren zu Um- und Berührkegelschnitt als Perspektivzentrum der Zwischendreiecke.

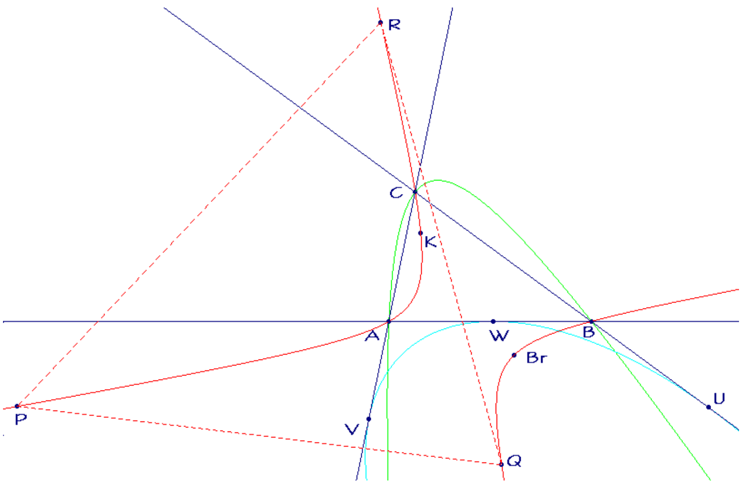
(3) Existiert zu den beiden Kegelschnitten ein weiteres Perspektivzentrum Q für die Zwischendreiecke, so muss auch Q bzgl. beider Kegelschnitte die gleiche Polare haben. Der Schnitt R der Polaren von P und Q hat dann in PQ ebenfalls eine gemeinsame Polare bzgl. beider Kegelschnitte. Damit sind die gesuchten Perspektivzentren die Ecken von selbst-polaren Dreiecken bzgl. beider Kegelschnitte und hängen somit nicht

von dem gewählten Zwischendreieck, sondern nur von den beiden Kegelschnitten ab.

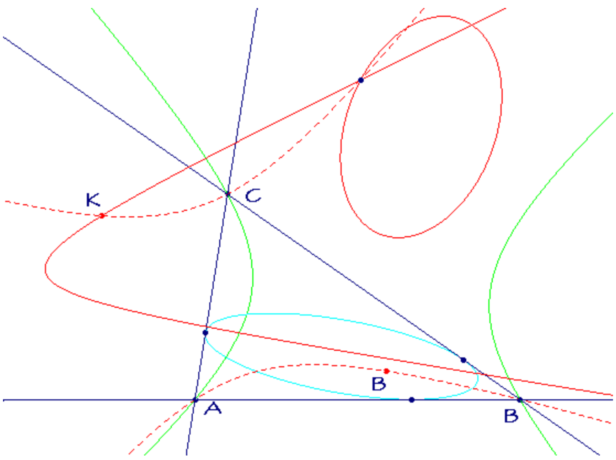
(4) Der Umkegelschnitt durch den K-Punkt und den Brianchon-Punkt ($B_r \neq K$) mit der Gleichung

$$mw(lu-kv)xy+ku(mv-lw)yz+lv(kw-mu)zx=0$$

enthält neben dem Perspektivzentrum P auch die Zentren Q, R.

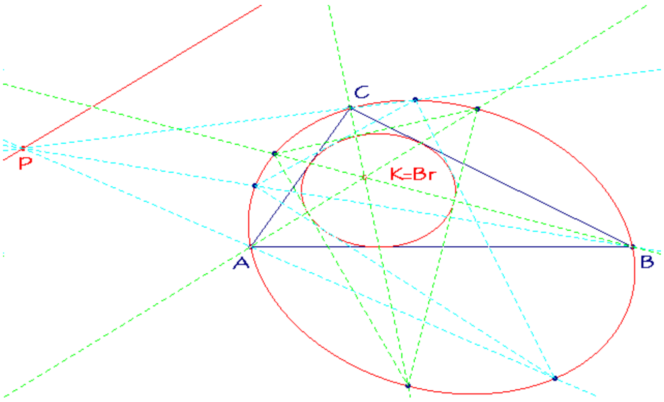


(5) Für eine Konstruktion des selbst-polaren Dreiecks zu Um- und Berührkegelschnitt seien weitere Ortslinien angegeben: Betrachtet werden die Dualitäten bzgl. beider Kegelschnitte, d. h. die Abbildungen, die Punkten die Polare und Geraden den Pol zuordnen. Das Hintereinanderausführen beider Dualitäten ergibt zwei Punkt-Zuordnungen, deren Fixpunkte offensichtlich die Ecken des selbst-polaren Dreiecks beider Kegelschnitte sind. Diese Abbildungen bilden den Umkegelschnitt durch K und B_r (s.o.) auf zwei weitere Kegelschnitte durch die Ecken des selbst-polaren Dreiecks ab. In den gemeinsamen Schnitten dieser drei Kegelschnitte liegen die Ecken des selbst-polaren Dreiecks, die aber nicht alle reell sein müssen. Die Abbildung zeigt ein Beispiel mit einem einzigen reellen Schnitt der drei Kegelschnitte.

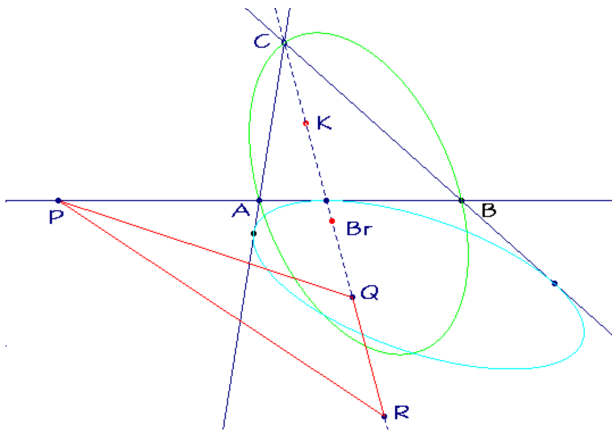


Spezialfälle

(1) Für den Fall, dass der K-Punkt des Umkegelschnitts und der Brianchon-Punkt des Berührkegelschnitts zusammenfallen lassen sich die Zentren für perspektive Zwischendreiecke noch leicht bestimmen:



Sie liegen im Punkt K und den Punkten seiner gemeinsamen Polaren bzgl. Um- und Berührkegelschnitt. Damit sind zwei beliebige Zwischendreiecke immer perspektiv bzgl. eines Polarenpunktes.



(2) Als weiterer Spezialfall sei ein Brianchon-Punkt $(B_r \neq K)$ betrachtet, der auf einer Ecktransversalen des K-Punktes liegt, z.B. auf *KC*, d.h.

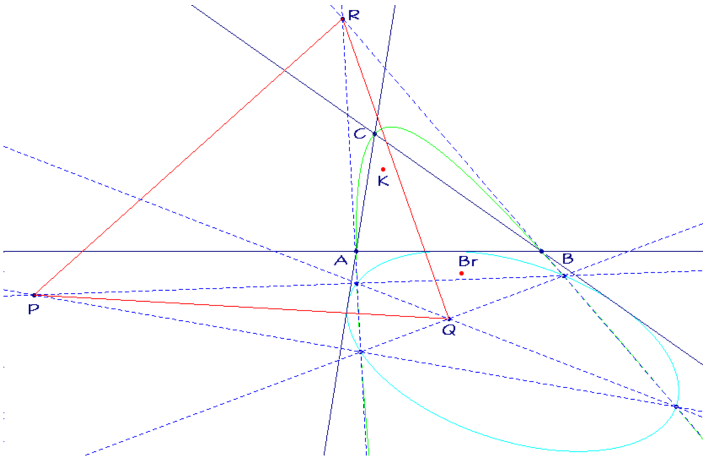
$$B_r(k:l:\beta) \quad \text{mit} \quad \beta \neq m\,.$$

Dann errechnen sich zwei Perspektivzentren auf dieser Ecktransversalen:

$$Q(2k:2l:-m+\sqrt{m(m+8\beta)}\,, \quad R(2k:2l:-m-\sqrt{m(m+8\beta)}\,,$$

die – falls reell – die Sehnen von *KC* bzgl. der beiden Kegelschnitte harmonisch teilen. – Für $\beta = -\dfrac{m}{8}$ berühren sich die beiden Kegelschnitte und die beiden Zentren *Q* und *R* fallen zusammen. Drittes Perspektivzentrum ist der gemeinsame Pol $P(k:-l:0)$ der Verbindungsgeraden *QR*, d.h. der Schnitt der Tangente in *C* an den Umkreis mit der Gegenseite *AB*.

(3) Weitreichender ist der Spezialfall, dass Um- und Berühr-Kegelschnitt vier reelle Schnittpunkte besitzen.



Das Diagonaldreieck *PQR* des Schnittpunkt-Vierecks ist dann selbst-polar bzgl. aller Kegelschnitte des Büschels dieser vier Punkte [1] und die Perspektivzentren für Zwischendreiecke liegen in den Ecken dieses Diagonaldreiecks.
Im Allgemeinen besitzen aber Um- und Berühr-Kegelschnitt nicht vier reelle Schnitte. Auch bei keinem reellen Schnitt kann es durchaus ein reelles selbstpolares Dreieck bzgl. beider Kegelschnitte geben (siehe einleitende Abbildung). Eine genauere Untersuchung des Schnittverhaltens der beiden Kegelschnitte zeigt, dass mit einem nicht reellen Schnittpunkt auch der Punkt mit konjugiert-komplexen Koordinaten ein Schnittpunkt ist. Die Verbindungsgerade dieser beiden Punkte hat dann aber reelle Koeffizienten, so dass es mindestens einen reellen Punkt gibt, der bzgl. beider Kegelschnitte die gleiche Polare besitzt und Perspektivzentrum der Zwischendreiecke ist.
Für die Existenz weiterer Perspektivzentren kann die Bedingung

$$\frac{(kvw + lwu + muv)^3}{klm} > 27u^2v^2w^2$$

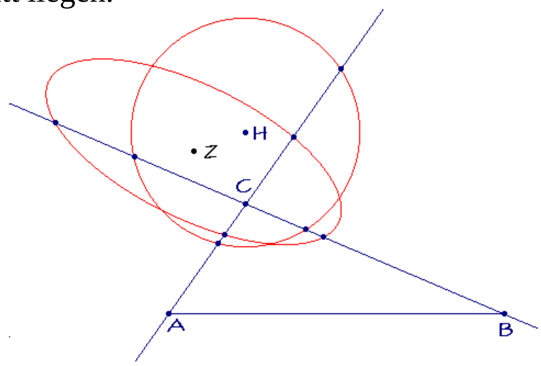
angegeben werden.

Das gemeinsame selbst-polare Dreieck als Bezugsdreieck

Hier soll der Fall betrachtet werden, dass zwei Kegelschnitte k und k' ein gemeinsames nicht entartetes reelles selbst-polares Dreieck *ABC* haben, das im Folgenden als Bezugsdreieck benutzt wird. Dabei sei C der Punkt, dessen Polare die beiden Kegelschnitte nicht schneidet. Dann teilen die Kegelschnitte die Seiten *AC* und *BC* harmonisch und ihre Gleichungen haben die einfache Form

$$\beta^2x^2 + \alpha^2y^2 - z^2 = 0\,, \qquad \beta'^2x^2 + \alpha'^2y^2 - z^2 = 0\,,$$

wobei $\pm\alpha$ und $\pm\alpha'$ die Teilverhältnisse für die Seite *AC* und $\pm\beta$ und $\pm\beta'$ die Teilverhältnisse für die Seite *BC* sind ($\alpha, \alpha', \beta, \beta' > 0$). Die Gleichungen zeigen, dass mit jedem Punkt auch die Ecken des zugehörigen Anti-Ceva-Dreiecks auf dem Kegelschnitt liegen.



Das Zentrum des Kegelschnitts k ist $Z(\alpha^2 : \beta^2 : -\alpha^2\beta^2)$. Für $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}<1$ (=1, >1) ist dieser Kegelschnitt eine Ellipse (Parabel, Hyperbel). Zu einem bei C stumpfwinkligen Dreieck ergibt sich für

$$\alpha=\sqrt{-\frac{S_B}{S_C}} \text{ und } \beta=\sqrt{-\frac{S_A}{S_C}}$$

ein Kreis, der sogenannte „polar circle“ [2] mit der Gleichung

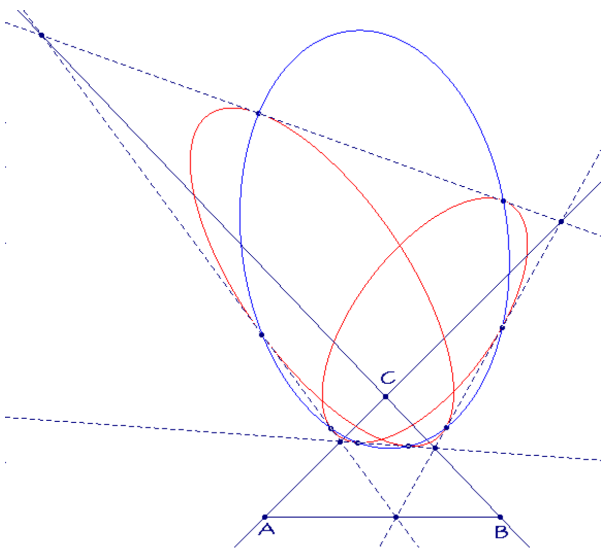
$$S_A x^2 + S_B y^2 + S_C z^2 = 0 .$$

Sein Mittelpunkt liegt im Höhenschnitt $H(S_B S_C : S_C S_A : S_A S_B)$ und sein Radius beträgt $\frac{\sqrt{-S_A S_B S_C}}{S}$.

Die Schnitte der beiden Kegelschnitte k und $k´$ errechnen sich zu

$$(\pm\sqrt{-\alpha^2+\alpha´^2}\beta\beta´ : \pm\sqrt{\beta^2-\beta´^2}\alpha\alpha´ : \sqrt{-\alpha^2\beta´^2+\alpha´^2\beta^2}) .$$

Vier reelle Schnittpunkte gibt es für $\alpha<\alpha´$ und $\beta>\beta´$ bzw. $\alpha>\alpha´$ und $\beta<\beta´$. Das Diagonaldreieck dieser vier Punkte ist das Bezugsdreieck.



Die gemeinsamen Tangenten der beiden Kegelschnitte mit den Gleichungen

$$\pm\sqrt{-\alpha^2+\alpha'^2}\beta\beta' x \pm \sqrt{\beta^2-\beta'^2}\alpha\alpha' y + \sqrt{-\alpha^2\beta'^2+\alpha'^2\beta^2})z = 0$$

schneiden sich auf den Seiten des Bezugsdreiecks und teilen diese harmonisch. Das Bezugsdreieck ist das Diagonalendreieck des zugehörigen vollständigen Vierseits.
Die Berührpunkte der gemeinsamen Tangenten

$$(\pm\sqrt{-\alpha^2+\alpha'^2}\alpha\beta' : \pm\sqrt{\beta^2-\beta'^2}\alpha'\beta : \sqrt{-\alpha^2\beta'^2+\alpha'^2\beta^2})\alpha\beta),$$

$$(\pm\sqrt{-\alpha^2+\alpha'^2}\alpha'\beta : \pm\sqrt{\beta^2-\beta'^2}\alpha\beta' : \sqrt{-\alpha^2\beta'^2+\alpha'^2\beta^2})\alpha'\beta')$$

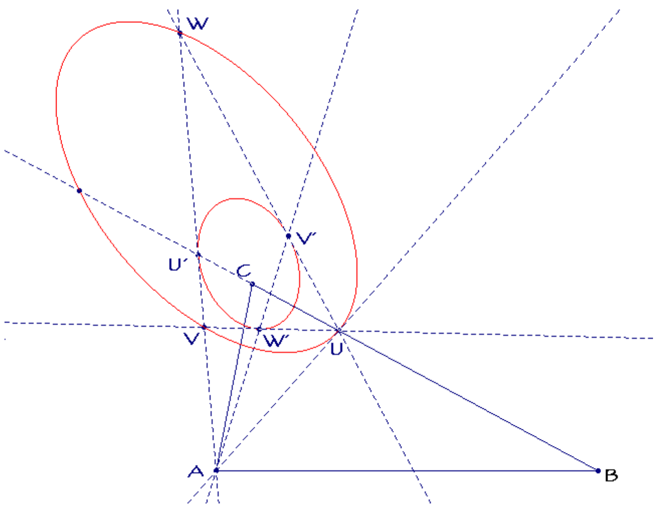
liegen auf einem Kegelschnitt mit der Gleichung

$$(\alpha^2+\alpha'^2)\beta^2\beta'^2x^2 + (\beta^2+\beta'^2)\alpha^2\alpha'^2y^2 - (\alpha^2\beta'^2+\alpha'^2\beta^2)z^2 = 0,$$

für den das Bezugsdreieck auch selbstpolar ist. Mit einem Berührpunkt sind auch die Ecken des Anti-Ceva-Dreiecks Berührpunkte der gemeinsamen Tangenten.

Perspektive Zwischendreiecke

Abschließend seien die Zusammenhänge aus der Sicht des gemeinsamen selbst-polaren Dreiecks als Bezugsdreieck betrachtetet.
Es sei der Frage nachgegangen, unter welchen Bedingungen es Zwischendreiecke zu den beiden Kegelschnitten *k* und *k´* gibt. Dabei sei *k* der Umkegelschnitt und *k´* der Berührkegelschnitt. Für $\alpha > \alpha'$ und $\beta > \beta'$ wird es offensichtlich keine Zwischendreiecke geben; o.B.d.A. sei vorerst $\alpha < \alpha'$.



Es wird ein spezielles Zwischendreieck *UVW* eingepasst mit $U(0:1:\alpha)$ im Schnitt von *k* und der Seite *BC*, dem Berührpunkt einer Tangente von *A* an *k*. Die Polare von *U* für *k´* geht aufgrund der Selbst-Polarität von *ABC* durch den Punkt *A* und liefert die Berührpunkte

$$V'(\alpha'\sqrt{\alpha'^2-\alpha^2} : \alpha\beta' : \alpha'^2\beta'),$$

$$W'(-\alpha'\sqrt{\alpha'^2-\alpha^2} : \alpha\beta' : \alpha'^2\beta').$$

Die Tangenten von *U* an *k´* schneiden *k* in den Punkten

$$V,W(\mp 2\alpha\alpha'\beta'\sqrt{\alpha'^2-\alpha^2} : \alpha\beta'+\alpha'\beta-\alpha'\beta' : -\alpha(\alpha\beta'-\alpha'\beta-\alpha'\beta').$$

Die Verbindungsgerade *VW* geht durch den Punkt *A* und hat die Gleichung

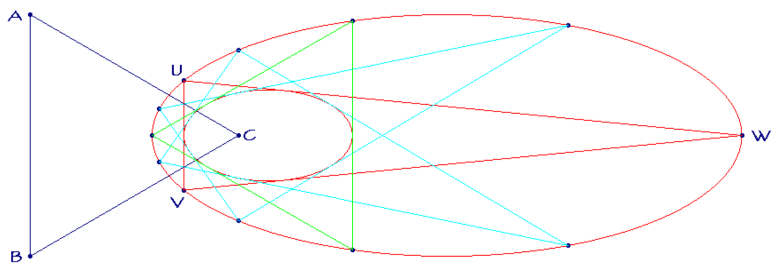
$$\alpha(\alpha^2\beta'^2-\alpha'^2\beta^2-\alpha'^2\beta'^2)y+(\alpha^2\beta'^2+\alpha'^2\beta^2+\alpha'^2\beta'^2)z=0\,.$$

Diese Gerade ist aber nur dann eine Tangente von *k´*, wenn die Koeffizienten der Kegelschnittsgleichungen einer der Gleichungen

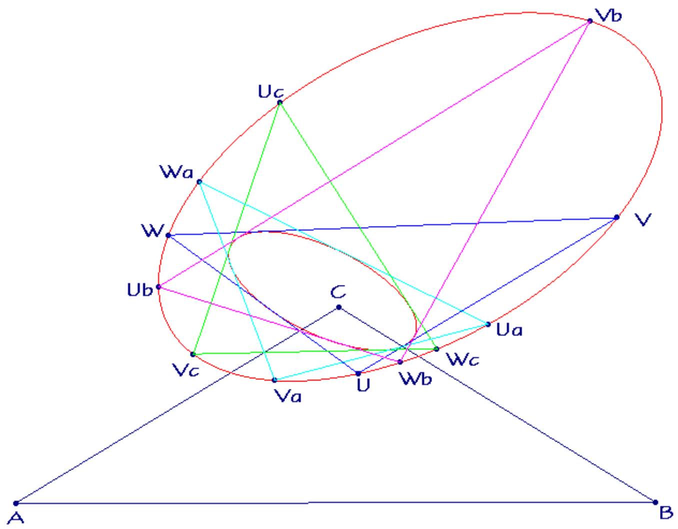
$$\pm\frac{\alpha}{\alpha'}+\frac{\beta}{\beta'}=1 \text{ (für } \alpha<\alpha'\text{), bzw. } \frac{\alpha}{\alpha'}\pm\frac{\beta}{\beta'}=1 \text{ (für } \beta<\beta'\text{)}$$

genügen (z.B. $\alpha=3,\ \beta=2,\ \alpha'=2,\ \beta'=4$).

Die Abbildung zeigt für $\alpha=\beta=2,\ \alpha'=\beta'=4$ ein Zwischendreieck *UVW* mit seinen perspektiven Bildern bzgl. der Ecken *A*, *B*, *C* eines gleichseitigen gemeinsamen selbstpolaren Dreiecks der beiden Kegelschnitte.



Die *A*-, *B*-, *C*-perspektiven Dreiecke eines Zwischendreiecks *UVW* können wie folgt angesprochen werden: Mit jeder der Ecken *U*, *V*, *W* liegen auch die Ecken der Anti-Ceva-Dreiecke $U_aU_bU_c$, $V_aV_bV_c$, $W_aW_bW_c$ auf dem Umkegelschnitt; dann sind die *A*-, *B*- *C*-perspektiven Zwischendreiecke $U_aV_aW_a$, $U_bV_bW_b$, $U_cV_cW_c$.



Die Wahl eines selbst-polaren Bezugsdreiecks zu *k* und *k´* gestattet eine einfache Parameterdarstellung der Dreiecke *UVW* und *U´V´W´*, z.B. für das Berührdreieck *U´V´W´*:

$$U'(\alpha'\cos\varphi':\beta'\sin\varphi':\alpha'\beta')\,,\ V'(\alpha'\cos\psi':\beta'\sin\psi':\alpha'\beta')\,,$$
$$W'(\alpha'\cos\zeta':\beta'\sin\zeta':\alpha'\beta')\,.$$

Eine geometrische Deutung dieser Winkelparameter konnte leider nicht gefunden werden.
Die Schnitte *U*, *V*, *W* der Tangenten in diesen Punkten errechnen sich dann zu:

$$U(\alpha'(\sin\psi'-\sin\zeta'):-\beta'(\cos\psi'-\cos\zeta'):\alpha'\beta'\sin(\psi'-\zeta'))$$

mit entsprechenden Darstellungen für *V* und *W*.
Damit ein Kegelschnitt *k* zum gleichem selbst-polaren Dreieck *ABC* mit den Punkten *U*, *V*, *W* auch die Ecken der zugehörigen Anti-Ceva-Dreiecke enthält, müssen die Winkelparameter φ', ψ', ζ' der Bedingung

$$\sin(\varphi'+\psi')+\sin(\psi'+\zeta')+\sin(\zeta'+\varphi')=0$$

genügen (z.B. $\varphi=21°, \psi=33°, \zeta=-51°$).
Unter dieser Voraussetzung gilt für die Koeffizienten α und β des Umkegelschnitts:

$$(\frac{\alpha}{\alpha'})^2=\frac{\cos\varphi'+\cos\psi'+\cos\zeta'+\cos\varphi'\cos\psi'\cos\zeta'}{\cos(\varphi'+\psi'+\zeta')},$$

$$(\frac{\beta}{\beta'})^2=\frac{\cos\varphi'\cos\psi'\cos\zeta'}{\cos(\varphi'+\psi'+\zeta')}.$$

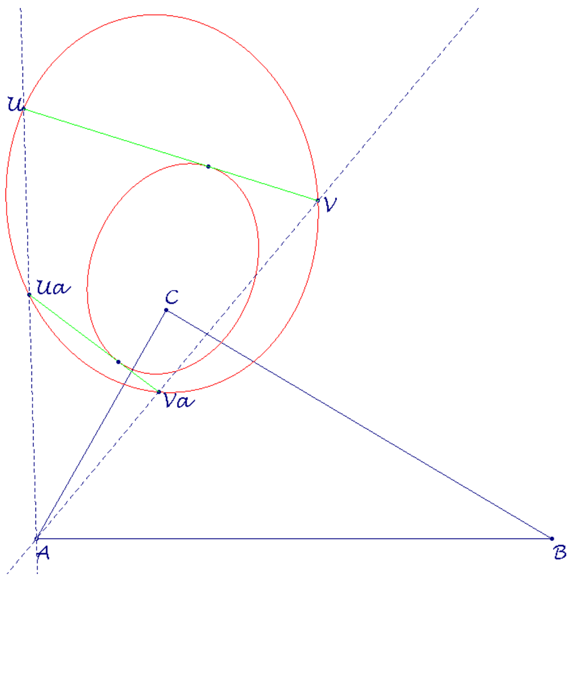
Mit diesen Werten bestätigt man dann den Zusammenhang

$$(-\alpha\beta'+\alpha'\beta+\alpha'\beta')(\alpha\beta'-\alpha'\beta+\alpha'\beta')(\alpha\beta'+\alpha'\beta-\alpha'\beta')$$
$$(\alpha\beta'+\alpha'\beta+\alpha'\beta')=0.$$

Da $\alpha,\beta,\alpha',\beta'>0$ angenommen *wurden*, kann der letzte Faktor entfallen. Nullsetzen einer der ersten drei Faktoren reproduziert obige Bedingungen für die Existenz von Zwischendreiecken.

Ausblick

Betrachtet man verallgemeinernd n-Ecke zwischen zwei Kegelschnitten, so liefern die Ecken des gemeinsamen selbstpolaren Dreiecks als Perspektivzentren weiterhin perspektive Zwischen-n-Ecke.



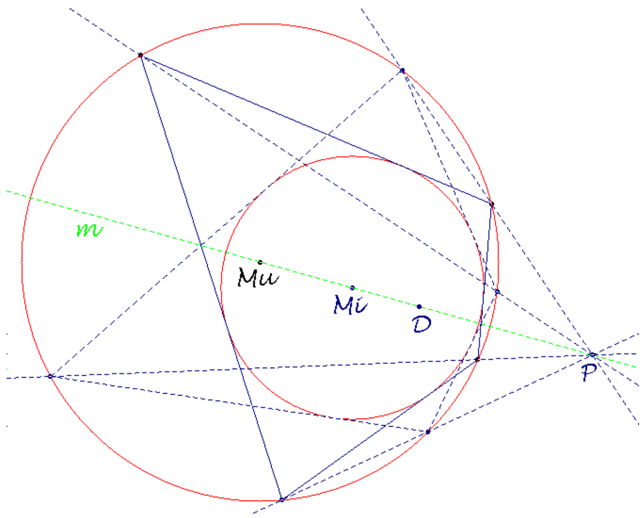
Zur Begründung: Betrachtet man – mit den Bezeichnungen des vorigen Abschnitts – zu zwei Punkten

$$U(\alpha\cos\varphi : \beta\sin\varphi : \alpha\beta)\,,\; V(\alpha\cos\psi : \beta\sin\psi : \alpha\beta)$$

des Kegelschnitts k die Sekante UV, so ist diese genau dann Tangente des Kegelschnitts $k´$, wenn

$$\alpha^2\beta'^2(\cos\varphi-\cos\psi)^2+\alpha'^2\beta^2(\sin\varphi-\sin\psi)^2 - \alpha'^2\beta'^2\sin(\varphi-\psi)^2=0 \,.$$

Da sich die A-, B-, C-perspektiven Bilder $U_{a,b,c}$ und $V_{a,b,c}$ von U und V nur durch Vorzeichenwechsel von α oder β ergeben und die Tangentenbedingung für $k´$ diese Koeffizienten quadratisch enthält, sind die Sekanten U_aV_a, U_bV_b , U_cV_c ebenfalls Tangenten von $k´$.



Betrachtet man abschließend ein Sehnen-Tangentenviereck $K_1K_2K_3K_4$, so liegt ein Perspektivzentrum offensichtlich im Fernpunkt der Senkrechten zur Verbindungsgeraden m der beiden Mittelpunkte M_i und M_u. Das perspektive Dreieck ist das an m gespiegelte Viereck $K_1´K_2´K_3´K_4´$. Ein zweites Perspektivzentrum liegt im Diagonalenschnitt D auf m. Das dritte Perspektivzentrum P erhält man durch Spiegelung des Diagonalenschnitts D am In- oder Umkreis; perspektives Viereck ist dann $K_3´K_4´K_1´K_2´$.

Literatur

[1] H. M. Cundy: Curves and conjugacy or a tour of some interesting geometry. – The Mathematical Gazette 80 (1996), 207-218.

[2] R. A. Johnson: Advanced Euclidean Geometry. – Dover Publication, Inc. Mineola, New York, 2007.

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de