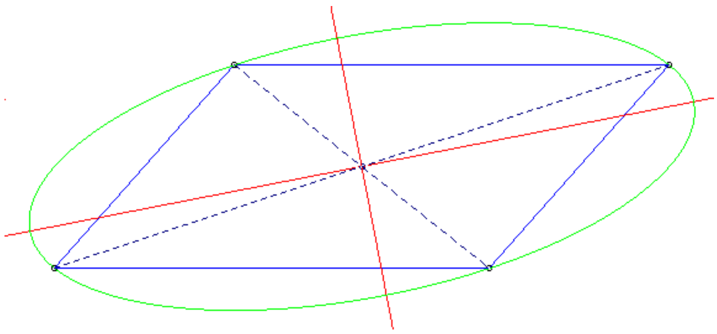
Achsen eines Parallelogramms

Eckart Schmidt

Eine Achsenkonstruktion für Ellipsen dürfte heute kaum Thema der Schulgeometrie sein. Betrachtet man statt der Ellipse ein einbeschriebenes Parallelogramm zu konjugierten Durchmessern, so lassen sich durchaus Aspekte dieser Konstruktion durch eine vektorielle Exkursion rund um das Parallelogramm aufzeigen. Die Ellipsenachsen verbergen sich dann hinter den hier behandelten Parallelogrammachsen, zu denen ein geometrisch leichter Zugang aufgezeigt wird, der unterrichtlich in der Analytischen Geometrie thematisiert werden kann. Über eine additive Zerlegung des Parallelogramms in die Bachmannschen Quadrate [1] wird abschließend eine einfache Konstruktion der Achsen entwickelt.



1. Parallelogrammachsen

Spricht man von Achsen, so denkt man normalerweise an Symmetrieachsen. Achsensymmetrie liefert aber bei Parallelogrammen schon eine Beschränkung auf Rauten und Rechtecke mit doppelter Achsensymmetrie. Ein Parallelogramm ist aber punktsymmetrisch und jede Punktspiegelung lässt sich durch zwei Achsenspiegelungen ersetzen, deren Achsen senkrecht zueinander sind. Hier sei das Paar orthogonaler Geraden ausgewählt, das benachbarte Seiten im gleichen Verhältnis teilt.

Definition: **Die Achsen eines Parallelogramms sind zwei zueinander senkrechte Geraden durch den Diagonalenschnitt, die benachbarte Seiten im gleichen Verhältnis teilen.**

Für Rechteck und Raute sind die Symmetrieachsen auch Parallelogrammachsen; für ein Quadrat liefert jedes orthogonale Geradenpaar durch den Mittelpunkt Parallelogrammachsen. Diese Fälle seien im Folgenden ausgeschlossen.
Ein Parallelogramm *ABCD* sei ursprungssymmetrisch betrachtet; die Ortsvektoren der Ecken seien $\vec{a},\ \vec{b},\ -\vec{a},\ -\vec{b}$. Teilt eine Achse die Seite *AB* und die andere Achse die Seite *BC* im

gleichen Verhältnis κ, so sind die Ortsvektoren der Teilungspunkte:

$$\vec{a}-\frac{\kappa}{1+\kappa}(\vec{a}-\vec{b}) \quad \text{und} \quad \vec{b}-\frac{\kappa}{1+\kappa}(\vec{a}+\vec{b})\,.$$

Wegen der Orthogonalität der Achsen muss das Skalarprodukt Null werden, d.h. κ der Gleichung genügen:

$$\kappa^2+\frac{\vec{a}^2-\vec{b}^2}{\vec{a}\vec{b}}\kappa-1=0\,.$$

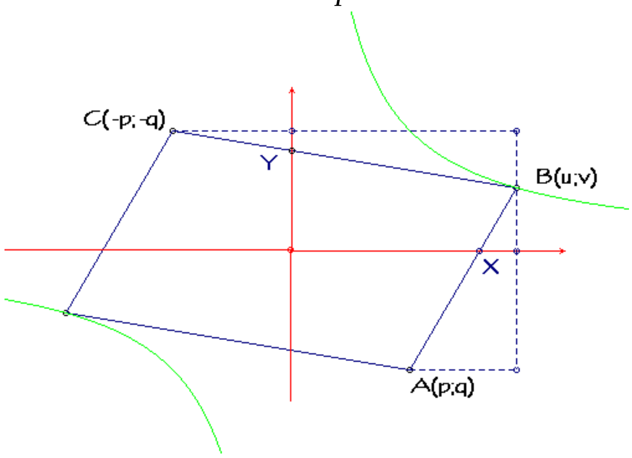
Sieht man von Rechtecken und Rauten ab, so hat die Gleichung immer zwei Lösungen mit Produkt -1, d.h. beide Lösungen beschreiben das gleiche orthogonale Achsenpaar.
Die Lösungen

$$\kappa_{1,2}=\frac{b^2-a^2\pm\sqrt{a^4+2a^2b^2\cos 2\varphi+b^4}}{2ab\cos\varphi} \quad , \quad \varphi=\angle AOB$$

seien hier nicht weiter thematisiert. Eine Konstruktion der Achsen bleibt vorerst offen.

Wählt man die Parallelogrammachsen als kartesische Koordinatenachsen und gibt den Parallelogrammpunkt *A(p;q)* und damit auch den Gegenpunkt *C(-p;-q)* vor, so folgt für den Zwischenpunkt *B(u;v)* aus der Definition mit Hilfe der Strahlensätze

$$\frac{-q}{v}=\frac{AX}{XB}=\frac{BY}{YC}=\frac{u}{p}\ ;\ \text{d.h.}\ v=-\frac{pq}{u}\ .$$



Damit lässt sich zu einem Punkt *A(p;q)*, der nicht auf den Achsen liegt, jeder Punkt der Hyperbel mit der Gleichung

$$y=-\frac{pq}{x}$$

als Folgepunkt wählen, so dass ein Parallelogramm entsteht, dessen Achsen die Koordinatenachsen sind. Für die Ecken existiert dann folgende Koordinatendarstellung:

$$A(p;q)\,,\ B(u;-\frac{pq}{u})\ ,\ C(-p;-q)\,,\ D(-u;\frac{pq}{u})\,.$$

2. Affine Bildquadrate

Parallelogramme sind affine Bilder von Quadraten. Die Parallelogrammachsen erweisen sich als zugehörige Achsen normaler Achsenaffinitäten.

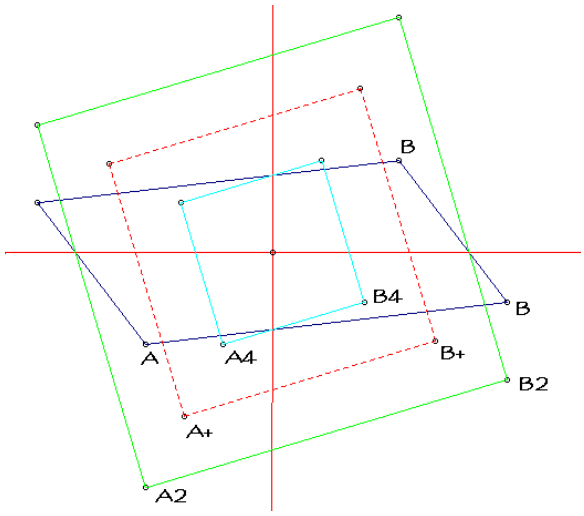
Satz 1: **Die Achsen eines Parallelogramms sind die Achsen von normalen Achsenaffinitäten, die das Parallelogramm in ein Quadrat überführen.**

Beweis: Für die x-Achse als Affinitätsachse mit dem Affinitätsfaktor μ_x hat ein Bildparallelogramm die Ecken

$$A'(p;\mu_x q),\ B'(u;-\mu_x \frac{pq}{u}) \text{ , ...}$$

Dieses Parallelogramm ist ein Quadrat, wenn die zugehörigen Ortsvektoren die gleiche Länge haben und senkrecht zueinander sind. Dies ist der Fall für $\mu_x^{\pm} = \pm\frac{u}{q}$.

Entsprechend erhält man für die y-Achse als Affinitätsachse Bildquadrate mit dem Faktor $\mu_y^{\pm} = \pm\frac{q}{u}$. □



Damit ergeben sich für das Parallelogramm vier affine Bildquadrate:

zu μ_x^+:	Q_1	:	$A_1(p;u)$, $B_1(u;-p)$, ...
zu μ_x^-:	Q_2	:	$A_2(p;-u)$, $B_2(u;p)$, ...
zu μ_y^+:	Q_3	:	$A_3(\frac{pq}{u};q)$, $B_3(q;-\frac{pq}{u})$, ...
zu μ_y^-:	Q_4	:	$A_4(-\frac{pq}{u};q)$, $B_4(-q;-\frac{pq}{u})$, ...

Die Quadrate Q_1 und Q_2 bzw. Q_3 und Q_4 liegen symmetrisch zur x-Achse bzw. y-Achse; die Quadrate Q_1 und Q_3 bzw. Q_2 und Q_4 liegen jeweils perspektiv zum Ursprung. Auf eine Konstruktion dieser affinen Bildquadrate wird hier nicht eingegangen.

3. Bachmannsche Quadrate

Wenn einem Parallelogramm Quadrate zugeordnet werden, sollte an eine Parallelogrammzerlegung erinnert werden, die sich bei Bachmann findet [1]. Danach besitzt jedes Parallelogramm eine eindeutige additive Zerlegung in zwei schwerpunktsgleiche Quadrate entgegengesetzten Umlaufsinns. Diese Zerlegung soll hier aufgegriffen werden. Dazu seien ursprungssymmetrische Parallelogramme als Paare der Ortsvektoren ihrer ersten beiden Ecken beschrieben: $P = (\vec{a}, \vec{b})$.

Ursprungssymmetrische Quadrate entgegengesetzten Umlaufsinns lassen sich dann darstellen in der Form:

$$Q_+ = (\vec{a}_+, D\vec{a}_+) \quad \text{und} \quad , \quad Q_- = (\vec{a}_-, -D\vec{a}_-)$$

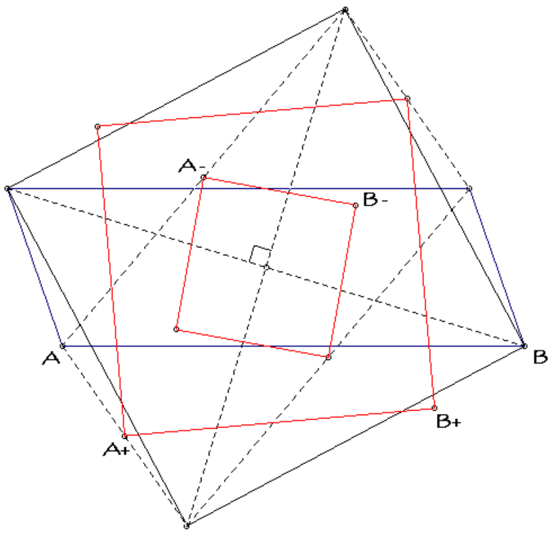
wobei D eine 90°-Drehung beschreibt:

$$D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Die Ortsvektoren $\vec{a}_+$ und $\vec{a}_-$ der ersten Ecken der Bachmannschen Quadrate ergeben sich aus dem Ansatz

$$P = Q_+ + Q_- \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}_+, D\vec{a}_+) + (\vec{a}_-, -D\vec{a}_-)$$

$$\text{zu} \quad \vec{a}_+ = \frac{1}{2}(\vec{a} - D\vec{b}) \quad \text{und} \quad \vec{a}_- = \frac{1}{2}(\vec{a} + D\vec{b}) \ .$$



Die Konstruktion der beiden Bachmannschen Quadrate entnimmt man entsprechend der vektoriellen Darstellung unmittelbar der Abbildung. Eine Beschreibung findet sich bei der abschließenden Achsenkonstruktion.

Die Bachmannschen Quadrate eines Parallelogramms stehen in engem geometrischen Bezug zu den affinen Bildquadraten Q_1, Q_2, Q_3, Q_4.

Satz 2: **Der Mittelwert zweier affiner Bildquadrate gleichen Umlaufsinns ergibt ein Bachmannsches Quadrat des Parallelogramms.**

Beweis: Zum Beweis bestätigt man leicht:

$$P = \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4)$$

$$= \frac{1}{2}(Q_2 + Q_4) + \frac{1}{2}(Q_1 + Q_3) = Q_+ + Q_- . \quad \square$$

4. Napoleonische Quadrate

Der Satz von Fermat-Napoleon umfasst eine Reihe von geometrischen Aussagen. Hier sei in Verallgemeinerung der folgende Zusammenhang aufgegriffen [3]:
Zeichnet man zu den Seiten eines Parallelogramms Quadrate gleichen Umlaufsinns, so bilden die Mittelpunkte dieser Quadrate wieder ein Quadrat. Wir sprechen von den Napoleonischen Quadraten $N_a^{\pm} N_b^{\pm} N_c^{\pm} N_d^{\pm}$ eines Parallelogramms. Für die Ortsvektoren der Ecken ergibt sich :

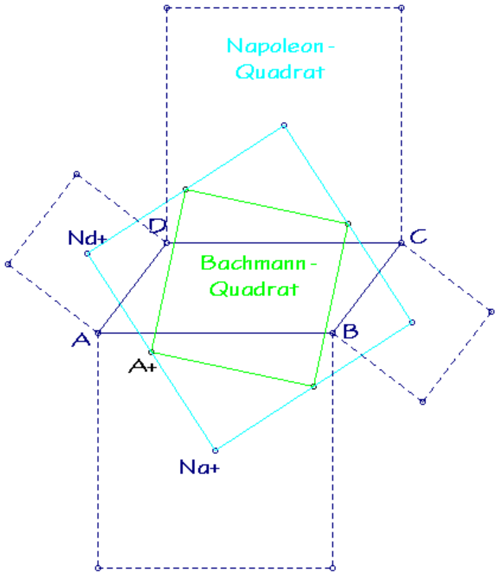
$$N_a^{\pm} : \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \mp \frac{1}{2} D(-\vec{a} + \vec{b}), \cdots, N_d^{\pm} : \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) \mp \frac{1}{2} D(\vec{a} + \vec{b}) .$$

Die Seitenmitten dieser Quadrate

z.B. von $N_d^{\pm} N_a^{\pm}$: $\frac{1}{2}(\vec{a} \mp D\vec{b}) = \vec{a}_{\pm}$

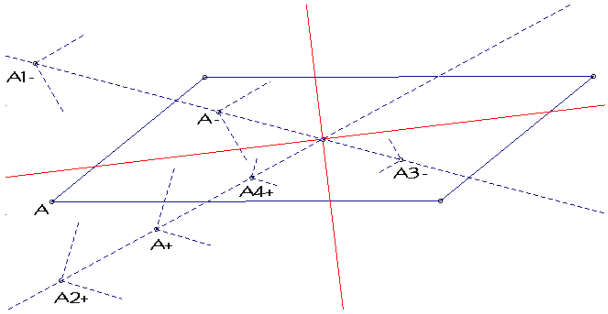
sind die Ecken der Bachmannschen Quadrate. Damit ergibt sich eine weitere einfache Konstruktionsmöglichkeit der Bachmannschen Quadrate.

Satz 3. Die Seitenmittenquadrate der Napoleonischen Quadrate sind die Bachmannschen Quadrate eines Parallelogramms.



5. Achsenkonstruktion

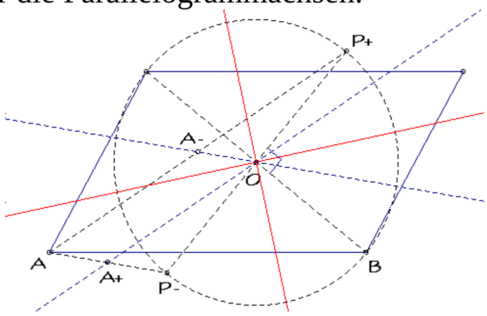
Es wäre schade, die aufgezeigten geometrischen Zusammenhänge ohne eine Konstruktionsmöglichkeit der Parallelogrammachsen abzuschließen. Ausgangspunkt ist die Konstruktion der Bachmannschen Quadrate, zumindest zweier entsprechender Punkte.



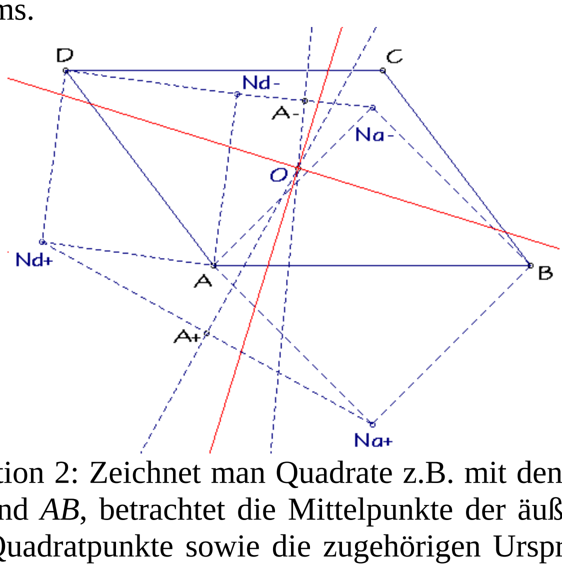
Die Bachmannschen Quadrate sind die Mittelwerte jeweils zweier affiner Bildquadrate gleichen Umlaufsinns:

Q_+ perspektiv zu Q_2 und Q_4,
Q_- perspektiv zu Q_1 und Q_3,
Q_1 und Q_2 symmetrisch zur x-Achse,
Q_3 und Q_4 symmetrisch zur y-Achse.

Damit sind die Achsen des Parallelogramms die Symmetrieachsen der Ursprungsgeraden zu entsprechenden Punkten der beiden Bachmannschen Quadrate.
Hieraus ergeben sich z.B. folgende zwei Konstruktionsmöglichkeiten für die Parallelogrammachsen.



Konstruktion 1: Dreht man z.B. den Parallelogrammpunkt B um $\pm 90°$ um den Diagonalenschnitt O und verbindet die Bildpunkte P^+ und P^- mit dem Punkt A, so sind die Mittelpunkte dieser Verbindungsstrecken die Ausgangspunkte A_- und A_+ der Bachmannschen Quadrate. Die Symmetrieachsen der Ursprungsgeraden OA_+ und OA_- sind dann die Achsen des Parallelogramms.



Konstruktion 2: Zeichnet man Quadrate z.B. mit den Diagonalen AD und AB, betrachtet die Mittelpunkte der äußeren bzw. inneren Quadratpunkte sowie die zugehörigen Ursprungsgera-

den, dann sind die Symmetrieachsen dieser Ursprungsgeraden die Parallelogrammachsen.

5. Ellipsenachsen

Zu einer Ellipse in Normallage mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

werden zwei konjugierte Durchmesser betrachtet mit den Endpunkten

$$A(x_o;y_o)\,,\ B(\frac{ay_o}{b};-\frac{bx_o}{a})\,,\ C(-x_o;-y_o)\,,\ D(-\frac{ay_o}{b};\frac{bx_o}{a})\,.$$

Dann werden die Seite *AB* durch die x-Achse und *BC* durch die y-Achse im gleichen Verhältnis $\frac{ay_o}{bx_o}$ bzw. die Seite *AB* durch die y-Achse und *BC* durch die x-Achse im gleichen Verhältnis $-\frac{bx_o}{ay_o}$ geteilt. Damit sind die Ellipsenachsen als Koordinatenachsen auch die Parallelogrammachsen.

Satz 4. **Die Parallelogrammachsen sind die Achsen einer umbeschriebenen Ellipse, für die die Parallelogrammdiagonalen konjugierte Durchmesser sind.**

Entsprechend lässt sich zeigen, dass die Parallelogrammachsen die Achsen einer einbeschriebenen Ellipse sind, deren Berührpunkte in den Seitenmitten liegen.
Die obige Konstruktion der Parallelogrammachsen lässt sich also als weitere Konstruktionsmöglichkeit für die Ellipsenachsen zu vorgegebenen konjugierten Halbmessern betrachten. Ein Vergleich der bekanntesten Konstruktionen der Ellipsenachsen z.B. nach Rytz oder Jacobi findet sich bei Sieber [2]. Die hier beschriebene Konstruktionsmöglichkeit ähnelt eher der Rytzschen Achsenkonstruktion. Dabei liegt der Reiz im geometrischen Hintergrund einer additiven Zerlegung des Parallelogramms in seine Bachmannschen Quadrate und deren Bezug zu den Napoleonischen Quadraten.

Literatur

[1] F. Bachmann / E. Schmidt: n-Ecke. – BI-Hochschultaschenbuch 471/471a, Bibliographisches Institut AG, Mannheim 1970, S. 156.

[2] H. Siebert: Wie die Konstruktionen von Rytz und Jacobi miteinander zusammenhängen. – PM 25 (1983), Nr. 2, S. 50.

[3] E. Schmidt: Affin-reguläre n-Ecke und ihre regulären Komponenten. – MNU 39/4 (1986), S.195.

Eckart Schmidt - Hasenberg 27 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt. de
eckart_schmidt@t-online.de