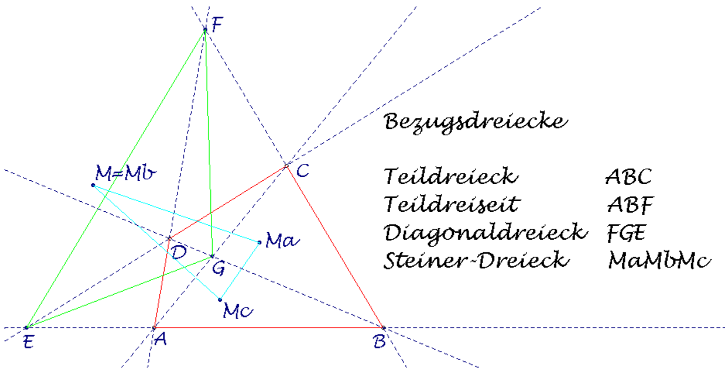
Miquel-, Poncelet- und Bennett-Punkt
eines Vierecks

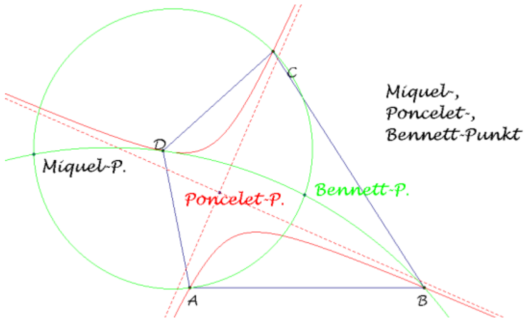
Eckart Schmidt

Für eine baryzentrische Behandlung von Vierecken lassen sich verschiedene Bezugsdreiecke benutzen. Hier werden dazu eines der Teildreiecke, eines der Teildreiseite, das Diagonaldreieck und das Steiner-Dreieck des Vierecks angesprochen. Aus der Sicht dieser Bezugsdreiecke werden drei merkwürdige Punkte des Vierecks betrachtet und eine Reihe geometrischer Zusammenhänge aufgezeigt, die ergänzend für Sehnen- und Tangenten-Vierecke spezialisiert werden.



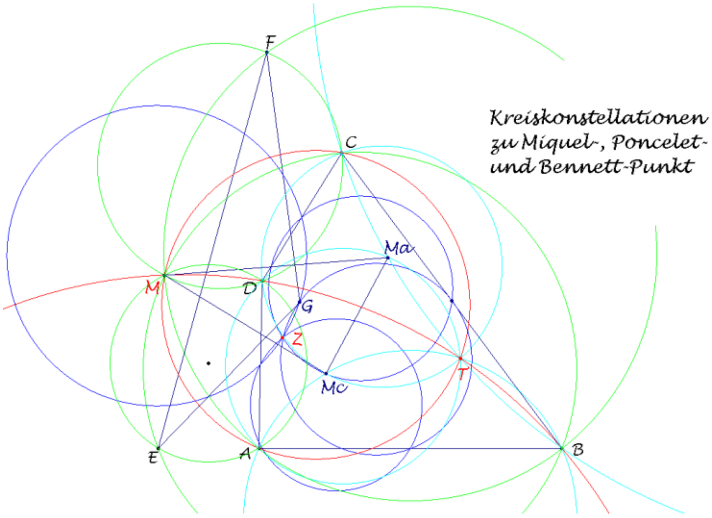
Vorbemerkungen

Ein Viereck *ABCD* sei hier durch folgende Punkte ergänzt: Die Gegenseitenschnitte *E* und *F* und der Diagonalenschnitt *G* ergeben das Diagonaldreieck *FGE*. Es werden folgende drei merkwürdige Punkte des Vierecks betrachtet:
Der Miquel- oder Steiner-Punkt *M [Ehr]* eines Vierecks – bei Clawson auch als „focal point“ angesprochen, ist der gemeinsame Punkt der Umkreise der Teildreiseite. Die Miquel-Punkte der Vierecke *ABDC, ABCD, ACBD* in den Bezeichnungen M_a, $M=M_b$, M_c ergeben das Steiner-Dreieck $M_aM_bM_c$ des Vierecks.



Der Poncelet-Punkt Z eines Vierecks *[Gri]* ist Zentrum der gleichseitigen Umhyperbel im Schnitt der Feuerbach-Kreise der Teildreiecke.

Der Bennett-Punkt T („isoptic point") eines Vierecks *[Cun,3.21]* – bei Stärk als Tangentialpunkt behandelt *[Stä]* − liegt im zweiten Schnitt der Kreise durch zwei Gegenecken und den Miquel-Punkt des Vierecks *[Stä,6]*. Diese beiden Kreise sind zwei der sechs Ähnlichkeitskreise zu jeweils zwei Umkreisen von Teildreiecken. Gemeinsamer Punkt dieser Ähnlichkeitskreise ist der Bennett-Punkt *[Cun,3.21]*.



Es seien in dieser Ausarbeitung nur Vierecke betrachtet, die sich nicht überschlagen. Dann sind Sehnen-Vierecke immer konvex, Tangenten-Vierecke haben einen „echten" Inkreis und Sehnen-Tangenten-Vierecke liegen „zwischen" zwei Kreisen. Weiterhin seien die Vierecke nicht orthozentrisch, da dann Poncelet- und Bennett-Punkt nicht eindeutig sind.

Das Bezugsdreieck für eine Behandlung mit baryzentrischen Koordinaten sei mit $A^oB^oC^o$ bezeichnet:

als Teildreieck $A^oB^oC^o=ABC$,

als Teildreiseit $A^oB^oC^o=ABF$,

als Diagonaldreieck $A^oB^oC^o=FGE$,

als Steiner-Dreieck $A^oB^oC^o= M_aM_bM_c$.

Baryzentrische Koordinaten eines Punktes P bzgl. eines Bezugsdreiecks $A^oB^oC^o$ sind homogene Koordinaten aus den Maßzahlen der orientierten Flächen der Dreiecke A^oB^oP, B^oC^oP, C^oA^oP. Benutzt werden hier die Seitenlängen a, b, c des

Bezugsdreiecks, der halbe Umfang s mit $2s = a+b+c$, sowie die Conway-Abkürzungen *[Yiu]* S_A, S_B, S_C und S mit

$$2S_A = -a^2+b^2+c^2,\ 2S_B = a^2-b^2+c^2,\ 2S_C = a^2+b^2-c^2$$

$$\text{und } S = \sqrt{S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A} = 2\Delta .$$

Bzgl. der verschiedenen Bezugsdreiecke werden Eigenschaften von Miquel-, Poncelet- und Bennett-Punkt angesprochen. Dazu sind die Berechnungsgrundlagen nur bruchstückhaft skizziert, um den rechnerischen Aufwand anzudeuten.

Bezugsdreieck Teildreieck

Ergänzt man drei Punkte *A*, *B*, *C* durch einen Punkt *D* zu einem Viereck *ABCD*, so liegt es nahe, das Teildreieck *ABC* als Bezugsdreieck $A^oB^oC^o$ zu wählen mit dem vierten Punkt $D(u:v:w)$. Die Gegenseitenschnitte *E* und *F* sowie der Diagonalenschnitt *G* errechnen sich dann zu

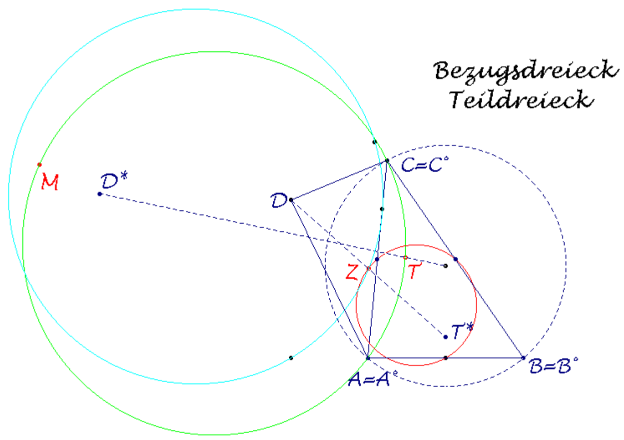
$$F(0:v:w),\quad G(u:0:w),\quad E(u:v:0).$$

Miquel-, Poncelet- und Bennett-Punkt haben wegen der metrischen Eigenschaften schon sehr unhandliche Darstellungen:

$$M\left(a^2(u+v) : S_B v - \frac{S_A u(v+w) - S_B v^2 + S_C w(u+v)}{u+v+w} : c^2(v+w)\right),$$

$$\begin{aligned} Z(&u(S_B v - S_C w)(b^2(u+v)w - c^2(w+u)v) \\ &: v(S_C w - S_A u)(c^2(v+w)u - a^2(u+v)w) \\ &: w(S_A u - S_B v)(a^2(w+u)v - b^2(v+w)u), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(&a^2 vw((u+v)(S_A u - S_C w) + (w+u)(S_A u - S_B v)) \\ &: b^2 wu((v+w)(S_B v - S_A u) + (u+v)(S_B v - S_C w)) \\ &: c^2 uv((w+u)(S_C w - S_B v) + (v+w)(S_C w - S_A u))). \end{aligned}$$



(1) Der Poncelet-Punkt ist der Schnitt der Feuerbach-Kreise der Teildreiecke *[Gri]*.

Die Gleichung des *ABC*-Feuerbachkreises ist z.B.

$$S_A x^2 + S_B y^2 + S_C z^2 - a^2 yz - b^2 zx - c^2 xy = 0\,.$$

(2) Der Poncelet-Punkt ist der Schnitt der Fußpunktkreise der Ecken bzgl. der zugehörigen Restdreiecke *[Gri]*.

Die Gleichung des Fußpunktkreises von D bzgl. ABC ist z.B.

$$\begin{aligned} &u(S_A v + b^2 w)(S_A w + c^2 v)x^2 + v(S_B u + a^2 w)(S_B w + c^2 u)y^2 \\ &+ w(S_C v + b^2 u)(S_C u + a^2 v)z^2 \\ &- u(b^2 w^2 + c^2 v^2)(S_B xy + a^2 yz + S_C zx) \\ &- v(c^2 u^2 + a^2 w^2)(S_A xy + S_C yz + b^2 zx) \\ &- w(a^2 v^2 + b^2 u^2)(c^2 xy + S_B yz + S_A zx) \\ &- 2uvw(S_A S_B xy + S_B S_C yz + S_C S_A zx) = 0\,. \end{aligned}$$

(3) Spiegelt man das isogonale Bild einer Ecke bzgl. des Restdreiecks an dessen Umkreis, so erhält man den Bennett-Punkt T *[Stä,2][Cun,3.21]*.

Dazu ist z.B. der Punkt

$$D^*(a^2 vw : b^2 wu : c^2 uv)$$

am ABC-Umkreis wie folgt zu spiegeln: $(x:y:z) \quad \to$

$$\begin{aligned} &(a^2(a^4 yz - b^4 zx - c^4 xy + a^2 b^2 (x-y)z + b^2 c^2 x^2 - a^2 c^2 (z-x)y) \\ &: b^2(-a^4 yz + b^4 zx - c^4 xy - a^2 b^2 (x-y)z + b^2 c^2 (y-z)x + a^2 c^2 y^2) \\ &: c^2(-a^4 yz - b^4 zx + c^4 xy + a^2 b^2 z^2 - b^2 c^2 (y-z)x + a^2 c^2 (z-x)y))\,. \end{aligned}$$

(4) Miquel- und Bennett-Punkt liegen mit den Gegenecken des Vierecks konzyklisch *[Stä,6]*.

Die Gleichung des Kreises durch M, T, A, C ist:

$$\begin{aligned} &a^2(-a^2(u+v)v + b^2(u+v)(v+w) + c^2 uv)yz \\ &+ b^2(-a^2(u+v)v + b^2(u+v)(v+w) - c^2(v+w)v)zx \\ &+ c^2(a^2 vw + b^2(u+v)(v+w) - c^2(v+w)v)xy \\ &+ a^2 c^2 (u+v+w)vy^2 = 0\,. \end{aligned}$$

(5) Spiegelt man ein Viereck am Poncelet-Punkt, so erhält man das Viereck der isogonalen Bilder des Bennett-Punktes bzgl. der Teildreiecke *[Stä,9][Cun,3.21]*.

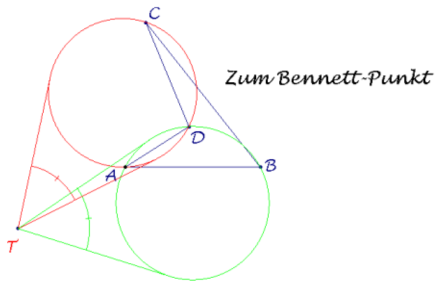
Spiegelt man die Ecke D am Poncelet-Punkt Z, erhält man das ABC-isogonale Bild des Bennett-Punktes

$$\begin{aligned} T^*\Big(&\frac{u}{(u+v)(S_A u - S_C w) + (u+w)(S_A u - S_B v)} \\ &: \frac{v}{(v+w)(S_B v - S_A u) + (v+u)(S_B v - S_C w)} \\ &: \frac{w}{(w+v)(S_C w - S_A u) + (w+u)(S_C w - S_B v)}\Big)\,. \end{aligned}$$

Die isogonalen Bilder des Bennett-Punktes bzgl. der Teildreiecke liegen also auf der gleichseitigen Umhyperbel des Vierecks mit der Gleichung

$$(S_A u - S_B v)wxy + (S_B v - S_C w)uyz + (S_C w - S_A u)vzx = 0\,.$$

(6) Für nicht konvexe Vierecke sieht man vom Bennett-Punkt die Umkreise der Teildreiecke unter dem gleichen Blickwinkel *[Stä,Fig1][Cun,3.21]*.



Für den Kosinus des halben Blickwinkels ergibt sich

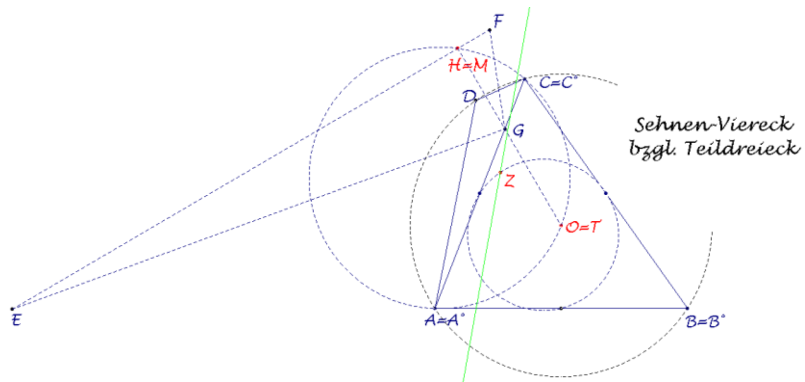
$$\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{2S\sqrt{uvw(u+v+w)}}{a^2vw + b^2wu + c^2uv}\,.$$

Für ein Sehnen-Viereck *ABCD* muss der Punkt *D* auf dem Umkreis des Bezugsdreiecks *ABC* liegen, so dass seine Koordinaten die Gleichung des Umkreises

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$$

erfüllen müssen, etwa in der Form

$$v = -\frac{b^2uw}{c^2u + a^2w}\,.$$



(7) Der Bennett-Punkt eines Sehnen-Vierecks ist die Umkreismitte des Sehnen-Vierecks.

Die Umkreismitte des Teildreiecks *ABC* ist

$$O = T_S(a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C)\,.$$

(8) Der Miquel-Punkt eines Sehnen-Vierecks ist die Spiegelung des Diagonalenschnitts am Umkreis; d.h. Höhenfußpunkt des Diagonaldreiecks.

Der Höhenfußpunkt H auf der Basis EF des Diagonaldreiecks ist

$$H = M_S(a^2u(c^2u + a^2w - b^2w) : -2S_B b^2 wu : c^2w(-b^2u + c^2u + a^2w)\,.$$

(9) Der Poncelet-Punkt eines Sehnen-Vierecks ist der Schnitt der Simson-Geraden der Ecken bzgl. der Restdreiecke.

Die Gleichung der Simson-Geraden des Punktes D bzgl. ABC ist

$$\frac{-w}{c^2u + S_B w}x + \frac{a^2w + c^2u}{a^2S_A w - c^2S_C u}y + \frac{u}{a^2w + S_B u}z = 0\,.$$

(10) Spiegelt man eine Ecke des Sehnen-Vierecks am Poncelet-Punkt, so erhält man den Höhenschnitt des Restdreiecks.

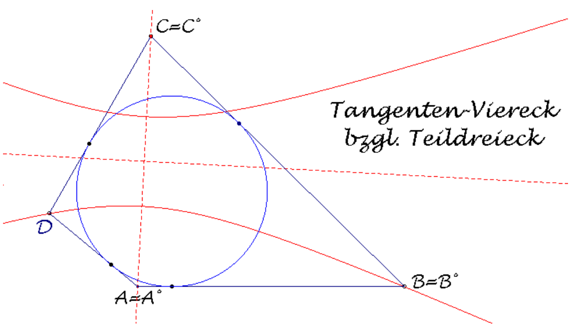
Dies ist Aussage (5) für ein Sehnen-Viereck, denn der Höhenschnitt ist das isogonale Bild der Umkreismitte.

(11) Der Poncelet-Punkt eines Sehnen-Vierecks ist der Mittelpunkt des Kreises, auf dem die Mitten der Feuerbachkreise der Teildreiecke liegen.

Der Poncelet-Punkt

$$Z_S((c^2u + S_B w)(S^2u + S_C(a^2w + S_B u))$$
$$:(S_A u - S_C w)(S_C c^2 u - S_A a^2 w) : (a^2w + S_B u)(S^2 w + S_A(c^2u + S_B w))$$

liegt nach (1) auf den Feuerbach-Kreisen der Teildreiecke, deren Radien gleich dem halben Umkreisradius sind.



Das Viereck $ABCD$ ist ein Tangentenviereck, wenn die alternierende Seitenlängensumme Null ergibt.

(12) Für ein Tangenten-Viereck liegt der Punkt D auf einer Hyperbel durch den Punkt B mit den Brennpunkten A und C.

Gleichung dieses Kegelschnitts ist

$$(a-c)^2(x+z)^2 - b^2(x-z)^2 + 4(a-c)(az-cx)y = 0\,.$$

Dies kann koordinatenmäßig etwa wie folgt berücksichtigt werden:

$$v = \frac{(a-c)^2(u+w)^2 - b^2(u-w)^2}{4(a-c)(cu-aw)}.$$

Für ein Sehnen-Tangenten-Viereck liegt die vierte Ecke auf dem Umkreis fest. Für $a > c$ ergibt sich

$$D_{ST}(abc + \frac{(a^2-c^2)S^2}{4bs(s-b)} + (a-c)\sqrt{acs(s-b) - \frac{(a-c)^2S^2}{4b^2}}$$

$$: \frac{-bS^2}{2s(s-b)} : abc - \frac{(a^2-c^2)S^2}{4bs(s-b)} - (a-c)\sqrt{acs(s-b) - \frac{(a-c)^2S^2}{4b^2}}).$$

Dieser Punkt ist der Schnitt von Umkreis und obiger Hyperbel, der mit der Ecke *B* auf dem gleichen Zweig der Hyperbel liegt.

Bezugsdreieck Teildreiseit

In der Literatur wird als Bezugsdreieck zur baryzentrischen Behandlung von Vierecken meistens nicht ein Teildreieck sondern ein Teildreiseit benutzt *[Ehr,5]*, z.B. $A^oB^oC^o = ABF$. Die vierte Seite wird als Tripolare eines Punktes $P(u:v:w)$ mit der Gleichung

$$vwx + wuy + uvz = 0$$

beschrieben. Das Viereck *ABCD* hat dann die Ecken

$$A(1:0:0),\quad B(0:1:0),\quad C(0:-v:w),\quad D(-u:0:w)$$

und für das Diagonaldreieck gilt:

$$F(0:0:1),\quad G(u:v:-w),\quad E(u:-v:0).$$

Die eingangs angesprochenen merkwürdigen Viereckpunkte errechnen sich jetzt wie folgt:

$$M(\frac{a^2}{v-w} : \frac{b^2}{w-u} : \frac{c^2}{u-v}),$$

$$Z(S_C u((S_A(v-w)u + S_B(u-w)v)(2v-w) + S_C(u-v)w^2)$$
$$: S_C v((S_A(v-w)u + S_B(u-w)v)(2u-w) - S_C(u-v)w^2)$$
$$: (S_A wu + S_B vw - c^2uv)(a^2vw + b^2wu - c^2uv)),$$

$$T(a^2v((S_A(v-w)u + S_B(u-w)v)(2u-w) - S_C(u-v)w^2)$$
$$: b^2u((S_A(v-w)u + S_B(u-w)v)(2v-w) + S_C(u-v)w^2)$$
$$: -c^2uv(S_A(v-w)u + S_B(u-w)v + S_C(u+v-2w)w)).$$

Der Miquel-Punkt *M* ist als Punkt des *ABF*-Umkreises das *ABF*-isogonale Bild eines Fernpunktes.

(13) Der Miquel-Punkt ist das bzgl. eines Teildreiseits isogonale Bild des Fernpunktes der Newton-Geraden.

Als Verbindungsgerade der Diagonalenmitten hat die Newton-Gerade die Gleichung

$$(-u+v+w)x + (u-v+w)y + (u+v-w)z = 0.$$

Geometrischer Hintergrund ist, dass der Miquel-Punkt Brennpunkt der Berührparabel des Vierecks ist, deren Achse parallel zur Newton-Gerade verläuft *[Ehr,7.4]*.

(14) Das Fußpunktviereck des Miquel-Punktes entartet kollinear *[Ehr,5.2]*.

Die Trägergerade der Fußpunkte der Lote des Miquel-Punktes auf die Seiten des Vierecks hat die Gleichung

$$\frac{v-w}{-a^2u+S_Cv+S_Bw}x+\frac{w-u}{S_Cu-b^2v+S_Aw}y+\frac{u-v}{S_Bu+S_Av-c^2w}z=0.$$

(15) Der Miquel-Punkt liegt mit den Umkreismitten der Teildreiseite auf einem Kreis *[Ehr,5.2]*.

Mittelpunkt dieses Kreises ist

$$\begin{aligned}&(a^2(-S_A(v-w)(3u^2-2u(v+w)+vw)-S_B(w-u)^2v+S_C(u-v)^2w)\\&:b^2(S_A(v-w)^2u-S_B(w-u)(3v^2-2v(w+u)+wu)-S_C(u-v)^2w)\\&:c^2(-S_A(v-w)^2u+S_B(w-u)^2v-S_C(u-v)(3w^2-2w(u+v)+uv)).\end{aligned}$$

(16) Poncelet-Punkt und *ABF*-isogonales Bild des Bennett-Punktes als auch Bennett-Punkt und *ABF*-isogonales Bild des Poncelet-Punktes liegen kollinear mit dem Gegenseitenschnitt *F* des Vierecks: *Z, T*, F* als auch *Z*, T, F* liegen kollinear.

Die Koordinaten des Poncelet- und des Bennett-Punktes zeigen, dass aus der Sicht des Gegenseitenschnitts $F=C^o$ die Verbindungsgeraden *FZ* und *FT* symmetrisch zur zugehörigen Winkelhalbierenden liegen *[Stä,10]*.

Der Tripol $P(u:v:w)$ der vierten Seite bestimmt jetzt das Viereck. Für ein Sehnenviereck müssen die vierten Seiten Parallelen sein. Ihre Tripole liegen auf einem Umkegelschnitt des Bezugsdreiecks *ABF* mit der einfachen Gleichung

$$a^2(x-z)y-b^2(y-z)x=0,$$

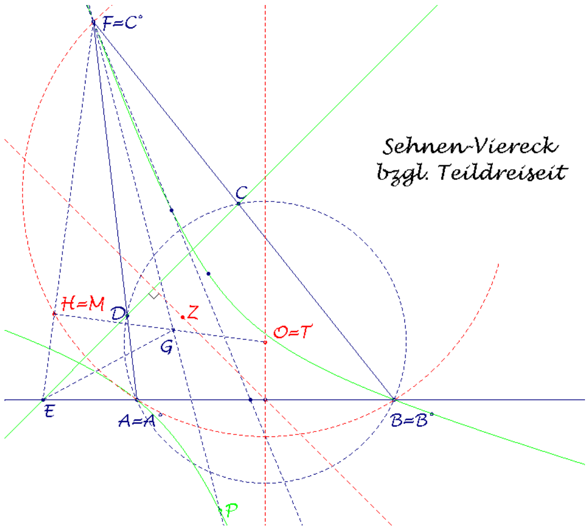
zu berücksichtigen in der Form

$$w=\frac{(a^2-b^2)uv}{a^2v-b^2u}.$$

(17) Für ein Sehnen-Viereck zu dem Bezugsdreieck *ABF* liegt der Tripol der Seite *CD* auf einem Umkegelschnitt durch den Schwerpunkt des Bezugsdreiecks und die Mitte der Winkelhalbierenden durch *F*.

Dieser *ABF*-Umkegelschnitt durch den Schwerpunkt $(1:1:1)$ und die Mitte $(a:b:a+b)$ der Winkelhalbierenden durch *F* ist das *ABF*-isogonale Bild einer Geraden durch den *ABF*-Lemoine-Punkt $L(a^2:b^2:c^2)$ und die Seitenmitte $(1:1:0)$ von *AB*.

(18) Für ein Sehnen-Viereck zu dem Bezugsdreieck *ABF* liegt der Tripol der Seite *CD* auf der Seite *FG* des Diagonaldreiecks.



Die drei Viereckpunkte sind dann für ein Sehnen-Viereck:

$$H = M_S\left(-u : v : \frac{c^2uv}{a^2v - b^2u}\right),$$

$$Z_S\left(a^2\left(S_A + \frac{S^2(u-v)}{S_Au - S_Bv}\right) : b^2\left(S_B + \frac{S^2(u-v)}{S_Au - S_Bv}\right)\right.$$
$$\left. : \frac{(S^2 + S_AS_B)(S_Bb^2u - S_Aa^2v)}{S_C(S_Au - S_Bv)}\right),$$

$$O = T_S\left(S_B + \frac{S^2(u-v)}{S_Au - S_Bv} : S_A + \frac{S^2(u-v)}{S_Au - S_Bv} : -c^2\right).$$

Zu vorgegebenem Teildreiseit liegen die Miquel-Punkte der Sehnen-Vierecke auf dem Umkreis des Bezugsdreiecks und die Bennett-Punkte (in den Umkreismitten der Sehnen-Vierecke) auf der Mittelsenkrechten von *AB*. Die Poncelet-Punkte sind Punkte einer Senkrechten durch die Seitenmitte von *AB* zur Tripolaren des Mittelpunktes der Winkelhalbierenden durch *F*.

(19) Der Poncelet-Punkt eines Sehnen-Vierecks ist das Perspektivzentrum seines Fußpunktvierecks und des Seitenmitten-Parallelogramms.

Der Poncelet-Punkt Z_S liegt auf der Senkrechten zur Seite *CD* durch die Seitenmitte von *AB* mit der Gleichung

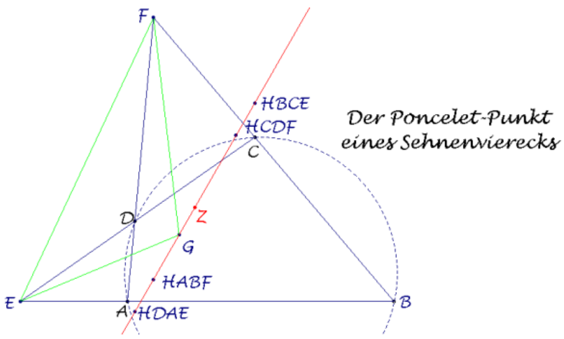
$$x - y + \frac{(S_A - S_B)S_C}{S^2 + S_AS_B}z = 0.$$

Auch eine weitere Eigenschaft des Poncelet-Punktes sei hier angesprochen: Die Höhen der Teildreiseite eines Vierecks liegen bekanntlich kollinear auf einer Senkrechten zur Newton-Geraden. Für ein Sehnen-Viereck geht diese Gerade („orthocentric line" *[Ehr,5.2]*) mit der Gleichung

$$-a^2 S_A v x + b^2 S_B u y + S_C (a^2 v - b^2 u) z = 0$$

zusätzlich durch den Diagonalenschnitt G und den Poncelet-Punkt Z.

(20) Die Höhenschnitte der Teildreiseite eines Sehnen-Vierecks liegen kollinear mit dem Diagonalenschnitt und punktsymmetrisch zum Poncelet-Punkt.



Für ein Tangenten-Viereck muss die vierte Seite eine Tangente an den Inkreis des Bezugsdreiecks sein.

(21) Für ein Tangenten-Viereck zu dem Bezugsdreieck *ABF* liegt der Tripol der Seite *CD* auf der Tripolaren des *ABF*-Gergonne-Punktes.

Die Tripolare des Gergonne-Punktes $Ge(\frac{1}{s-a} : \frac{1}{s-b} : \frac{1}{s-c})$ hat die Gleichung

$$(s-a)x + (s-b)y + (s-c)z = 0.$$

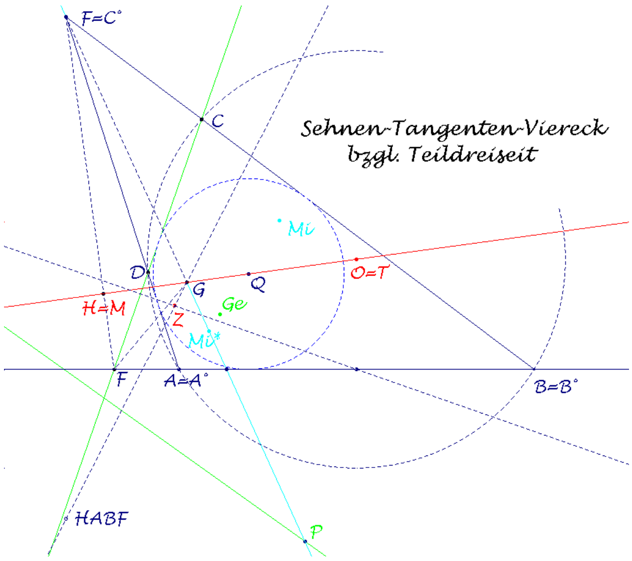
Für ein Sehnen-Tangenten-Viereck verbleibt dann nur noch ein Tripol für die vierte Seite

$$P_{ST}(\frac{-a}{s-a} : \frac{-b}{s-b} : \frac{a+b}{s-c}).$$

Dieser Punkt liegt im Schnitt der Tripolaren des Gergonne-Punktes *Ge* mit der Ecktransversalen *FMi** des *ABF*-isogogonalen Bildes des Mittenpunkts $Mi(a(s-a) : b(s-b) : c(s-c))$ des Bezugsdreiecks. Auf dieser Ecktransversale liegt auch der Diagonalenschnitt

$$G(\frac{a}{s-a} : \frac{b}{s-b} : \frac{a+b}{s-c})$$

als vierter harmonischer Punkt zu P_{ST} bzgl. F und dem Schnitt mit AB.



Das Sehnen-Tangenten-Viereck hat dann die Ecken

$$A(1:0:0),\quad B(0:1:0),\quad C(0:\frac{b}{s-b}:\frac{a+b}{s-c}),\quad D(\frac{a}{s-a}:0:\frac{a+b}{s-c}).$$

Der Bennett-Punkt fällt in die Umkreismitte O

$$O=T_{ST}(\frac{aS^2}{sc}+\frac{2a^2S_A}{a+b}:\frac{bS^2}{sc}+\frac{2b^2S_B}{a+b}:\frac{c^2S_C}{s}-\frac{cS_AS_B}{s(a+b)})$$

mit dem Umkreisradius $R=\frac{c}{4sS}\sqrt{4S_AS_B+2c^2(a+b)^2}$.

Der Berührkreis des Sehnen-Tangenten-Vierecks ist der Inkreis des Bezugsdreiecks. Die Inkreismitte Q hat bzgl. des Umkreises die Potenz $-\frac{abc^2}{2s^2}$:

$Q(a:b:c)$ mit dem Inkreisradius $r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$.

Spiegelt man den Diagonalenschnitt G am In- oder Umkreis, so erhält man den Miquel-Punkt im Höhenfußpunkt H des Diagonaldreiecks.

$$H=M_{ST}(\frac{a}{s-a}:\frac{-b}{s-b}:\frac{c^2}{(s-c)(a-b)}).$$

Der Poncelet-Punkt

$$Z_{ST}(\frac{S^2(a+b)}{2bcs}+S_B:\frac{S^2(a+b)}{2acs}+S_A:\frac{(S^2+S_AS_B)(abc+S_Aa+S_Bb+S_Cc)}{2S_Cabc}).$$

liegt im Schnitt des Lotes von einer Seitenmitte auf die Gegenseite und der Verbindungsgeraden des Diagonalenschnitts G mit dem Höhenschnitt H_{ABF} eines Teildreiseits.

Das Diagonaldreieck als Bezugsdreieck

In diesem Abschnitt sei das Diagonaldreieck Bezugsdreieck für baryzentrische Koordinaten: $A^oB^oC^o=FGE$. Das Anti-Ceva-Dreieck einer Ecke ist dann das Restdreieck des Vierecks. So ist folgende Darstellung der Ecken des Vierecks möglich:

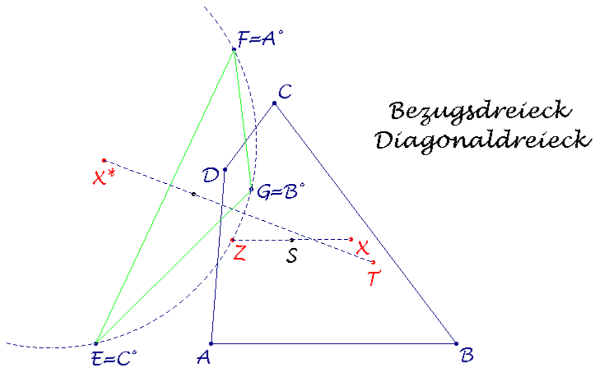
$$A(-u:v:w),\quad B(u:-v;w),\quad C(u:v:-w),\quad D(u:v:w).$$

Die drei merkwürdigen Punkte des Vierecks errechnen sich dann zu:

$$M(a^2v^2(u^2-v^2+w^2)+b^2u^2(-u^2+v^2+w^2)-2c^2u^2v^2$$
$$:-2v^2(S_Au^2+S_Bv^2+S_Cw^2)$$
$$:-2a^2v^2w^2+b^2w^2(u^2+v^2-w^2)+c^2v^2(u^2-v^2+w^2)),$$

$$Z\left(\frac{1}{b^2w^2-c^2v^2}:\frac{1}{c^2u^2-a^2w^2}:\frac{1}{a^2v^2-b^2u^2}\right),$$

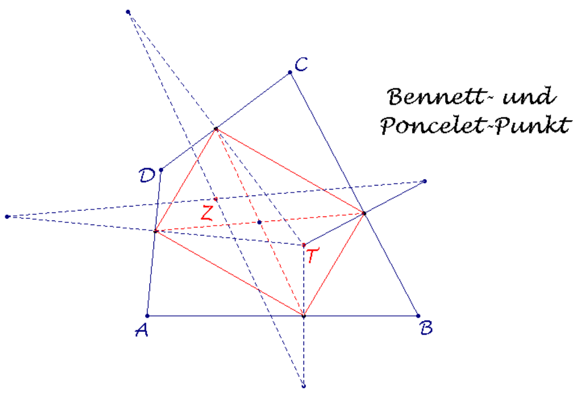
$$T(a^4v^2w^2-b^4u^2w^2-c^4u^2v^2+b^2c^2u^2(-u^2+v^2+w^2)$$
$$:-a^4v^2w^2+b^4u^2w^2-c^4u^2v^2+a^2c^2v^2(u^2-v^2+w^2)$$
$$:-a^4v^2w^2-b^4u^2w^2+c^4u^2v^2+a^2b^2w^2(u^2+v^2-w^2)).$$



(22) Der Poncelet-Punkt liegt auf dem Umkreis des Diagonaldreiecks *[Gri]*.

Diese wichtige Eigenschaft bestätigt sich jetzt leicht mit der Gleichung des Umkreises des Bezugsdreiecks:

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy=0 .$$



(23) Das Fußpunktviereck des Bennett-Punktes ist ein Parallelogramm.

Die Fußpunkte der Lote von einem Punkt *X(x:y:z)* auf die Seiten des Vierecks errechnen sich zu:

$$L_{AB}\left(u:-v:\frac{(S_Au+S_Bv)(vx+uy)+(a^2v^2+b^2u^2-2S_Cuv)z}{-a^2vy+b^2ux-S_C(vx-uy)}\right),$$

$$L_{BC}(\frac{(S_B v+S_C w)(wy+vz)+(-2S_A vw+b^2w^2+c^2v^2)x}{-S_A(wy-vz)-b^2wz+c^2vy}:v:-w),$$
$$L_{CD}(u:v:\frac{(S_A u-S_B v)(-vx+uy)+(a^2v^2+b^2u^2+2S_C uv)z}{a^2vy+b^2ux+S_C(vx+uy)}),$$
$$L_{DA}(\frac{(S_B v-S_C w)(-wy+vz)+(2S_A vw+b^2w^2+c^2v^2)x}{S_A(wy+vz)+b^2wz+c^2vy}:v:w).$$

Nur für den Bennett-Punkt ergeben diese Punkte ein Parallelogramm.

(24) Spiegelt man den Bennett-Punkt am Diagonalenschnitt seines Fußpunktparallelogramms, so erhält man den Poncelet-Punkt.

Dieser Diagonalenschnitt hat die Koordinaten:

$$(u^2(-b^2c^2u^2+S_C c^2v^2+S_B b^2w^2):v^2(S_C c^2u^2-a^2c^2v^2+S_A a^2w^2)$$
$$:w^2(S_B b^2u^2+S_A a^2v^2-a^2b^2w^2).$$

In anderer Formulierung: Der Poncelet-Punkt ist der Mittelpunkt der Spiegelungen des Bennett-Punktes an zwei Gegenseiten *[Stä,8]*.

(25) Die Spiegelung des Poncelet-Punktes am Schwerpunkt des Vierecks und das Komplement des Bennett-Punktes bzgl. des Diagonaldreiecks liegen isogonal bzgl. des Diagonaldreiecks.

Zur Kontrolle sei das Komplement von T bzgl. FGE angegeben:

$$X*(a^2((a^2-2S_A)v^2w^2+b^2(w^2-u^2)w^2-c^2(u^2-v^2)v^2)$$
$$:b^2(-a^2(v^2-w^2)w^2+(b^2-2S_B)u^2w^2+c^2(u^2-v^2)u^2)$$
$$:c^2(a^2(v^2-w^2)v^2-b^2(w^2-u^2)u^2+(c^2-2S_C)u^2v^2)).$$

Für ein Sehnen-Viereck ist der Umkreis der Polarkreis („polar circle“ *[Joh,176]*]) des Diagonaldreiecks mit der Gleichung

$$S_A u^2+S_B v^2+S_C w^2=0,$$

zu berücksichtigen mit

$$v^2=\frac{S_A u^2+S_C w^2}{-S_B}.$$

Mittelpunkt des Polarkreises und damit Bennett-Punkt des Sehnenvierecks ist der Höhenschnitt des Diagonaldreiecks *[Stä,9]*.

$$O=T_S=H_{FGE}(S_B S_C:S_C S_A:S_A S_B);$$

der Radius des Polarkreises ist

$$R=\frac{1}{S}\sqrt{-S_A S_B S_C}.$$

Die Basisgerade EF des Diagonaldreiecks ist Polare des Diagonalenschnitts G; im Höhenfußpunkt auf der Basis des Diagonaldreiecks liegt der Miquel-Punkt

$$H = M_S(S_C : 0 : S_A)\,.$$

(26) Der Poncelet-Punkt eines Sehnen-Vierecks ist die am Schwerpunkt *S* des Vierecks gespiegelte Umkreismitte *O*.

Dies ist die Aussage (24) für Sehnen-Vierecke: Das Fußpunktparallelogramm des Bennett-Punktes in der Umkreismitte ist das Seitenmittenparallelogramm mit dem Symmetriezentrum im Schwerpunkt.
Der Schwerpunkt des Sehnen-Vierecks ist

$$S(S_B u^2(b^2w^2 - c^2w^2 + c^2u^2) : (c^2u^2 + a^2w^2)(S_A u^2 + S_C w^2)$$
$$: S_B w^2(a^2w^2 - a^2u^2 + b^2u^2)$$

und der Poncelet-Punkt errechnet sich zu

$$Z_S\left(\frac{S_B}{c^2 S_A u^2 + (S^2 + S_B S_C)w^2} : \frac{1}{c^2u^2 - a^2w^2} : \frac{S_B}{a^2 S_C w^2 + (S^2 + S_A S_B)u^2}\right)\,.$$

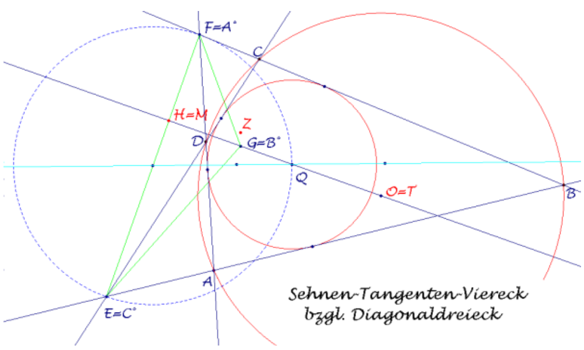
(27) Der Poncelet-Punkt eines Sehnen-Vierecks liegt im Schnitt einer Parallelen zur Höhe des Diagonaldreiecks durch das isogonale Bild des Fernpunktes der Newton-Geraden und einer Parallelen zur Newton-Geraden durch das isogonale Bild des Fernpunktes der Höhe des Diagonaldreiecks.

Diese beiden Parallelen haben die Gleichungen

$$((S_A - S_B)u^2 + a^2w^2)(S_A c^2u^2 + (S^2 + S_B S_C)w^2)x$$
$$-2S_B(c^2u^2 - a^2w^2)(S_A u^2 + S_C w^2)y$$
$$-(c^2u^2 + (S_C - S_B)w^2)((S^2 + S_A S_B)u^2 + S_C a^2w^2)z = 0\;,$$
$$S_C(S_A c^2u^2 + (S^2 + S_B S_C)w^2)x + S_B b^2(a^2w^2 - c^2u^2)y$$
$$-S_A(S_C a^2w^2 + (S^2 + S_A S_B)u^2)z = 0\,.$$

Bei vorgegebenem Diagonaldreieck liegen die Ecken eines zugehörigen Tangenten-Vierecks auf einer Kurve vierten Grades mit der Gleichung

$$(x^2 - z^2)(S_A^2 x^2 - S_C^2 z^2) + (S_A - S_C)(c^2x^2 - a^2z^2)y^2 = 0\,.$$



Für ein Sehnen-Tangenten-Viereck ergeben sich die Koordinaten der Eckpunkte mit

$$u=\sqrt{\frac{S_C^2}{\sqrt{S_AS_C}}+S}, \quad v=\frac{b^2}{\sqrt{\sqrt{S_AS_C}-S}}, \quad w=\sqrt{\frac{S_A^2}{\sqrt{S_AS_C}}+S}\ .$$

Der Inkreis des Sehnen-Tangenten-Vierecks hat seinen Mittelpunkt Q auf der Höhe des Diagonaldreiecks im Schnitt mit der Newton-Geraden:

$$Q(S_BS_C : S_AS_C+S\sqrt{S_AS_C} : S_AS_B)\,.$$

Diese Inkreismitte ist auch Punkt des Thales-Kreises über der Basis EF des Diagonaldreiecks.
Der Radius des Inkreises ergibt sich aus der Pol-Polaren-Beziehung von G und EF zu

$$r=\sqrt{\frac{S_B(S\sqrt{S_AS_C}-S_AS_C)}{S_AS_C-S^2}}\ .$$

Der Poncelet-Punkt eines Sehnen-Tangenten-Vierecks ist

$$Z_{ST}(\frac{-1}{S_AS+(S_B+c^2)\sqrt{S_AS_C}}$$
$$:\frac{b^2}{S_B(S_A-S_C)(S-\sqrt{S_AS_C})}:\frac{1}{S_CS+(S_B+a^2)\sqrt{S_AS_C}})\,.$$

Bezugsdreieck Steiner-Dreieck

Auch aus der Sicht des Steiner-Dreiecks lässt sich ein Viereck erschließen. Das Bezugsdreieck besteht dann aus den Miquel-Punkten $M_a=A^o$, $M_b=M=B^o$, $M_c=C^o$ der Vierecke *ACDB, ABCD, ADBC*. In diesem Bezugsdreieck lässt sich zu jeder Ecke eine Inversion – bestehend aus einer Geraden- und einer Kreisspiegelung – betrachten, die die beiden anderen Ecken vertauscht. Diese hier als Steiner-Inversionen angesprochenen Abbildungen sind:

$$\sigma_A: \quad (x:y:z)\to(\frac{a^2yz+b^2zx+c^2xy}{x+y+z}:-b^2z:-c^2y)\,,$$
$$\sigma=\sigma_B: \quad (x:y:z)\to(-a^2z:\frac{a^2yz+b^2zx+c^2xy}{x+y+z}:-c^2x)\,,$$
$$\sigma_C: \quad (x:y:z)\to(-a^2y:-b^2x:\frac{a^2yz+b^2zx+c^2xy}{x+y+z})\,.$$

Bildet man jetzt einen Punkt $P(u:v:w)$ mit diesen Inversionen ab, dann ergeben die Punkte

$$A=\sigma_AP, \quad B=\sigma_BP, \quad C=\sigma_CP, \quad D=P$$

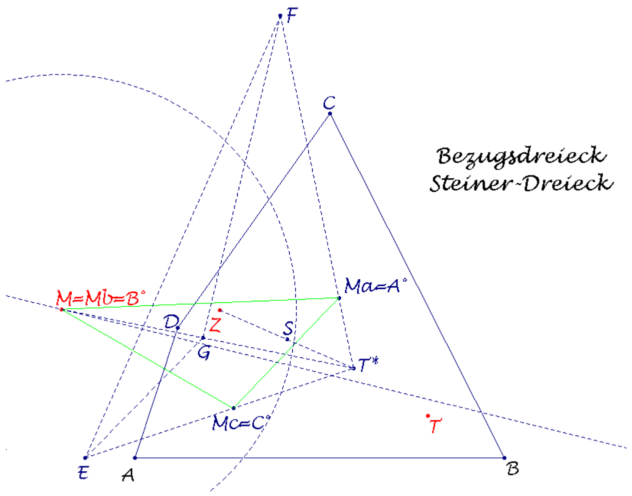
ein Viereck *ABCD*, dessen Steiner-Dreieck das Bezugsdreieck ist. Die Inversion $\sigma=\sigma_B$ vertauscht nicht nur die Steiner-Punkte M_a und M_c, sondern auch die Gegenecken und Gegenseitenschnitte des Vierecks *ABCD*.
Eine analytische Behandlung des Vierecks mit dem Steiner-Dreieck als Bezugsdreieck ist sehr aufwändig. Der Diagonalenschnitt errechnet sich zu

$$G\left(\frac{(u+v+w)^2(-a^2b^2w^2+b^2c^2u^2+c^2a^2v^2)-(a^2vw+b^2wu+c^2uv)^2}{c^2(u+v+w)uv+w(a^2vw+b^2wu+c^2uv)}\right.$$
$$:2b^2(u+v+w)$$
$$\left.:\frac{(u+v+w)^2(a^2b^2w^2-b^2c^2u^2+c^2a^2v^2)-(a^2vw+b^2wu+c^2uv)^2}{a^2(u+v+w)vw+u(a^2vw+b^2wu+c^2uv)}\right)$$

und der Bennett-Punkt hat die Koordinaten

$$T\left(\frac{a^2((u+v+w)^2(a^2b^2w^2-b^2c^2u^2+c^2a^2v^2)-(a^2vw+b^2wu+c^2uv)^2)}{a^2(u+v+w)vw+u(a^2vw+b^2wu+c^2uv)}\right.$$
$$:\frac{b^2((u+v+w)^2(a^2b^2w^2+b^2c^2u^2-c^2a^2v^2)-(a^2vw+b^2wu+c^2uv)^2)}{b^2(u+v+w)wu+v(a^2vw+b^2wu+c^2uv)}$$
$$\left.:\frac{c^2((u+v+w)^2(-a^2b^2w^2+b^2c^2u^2+c^2a^2v^2)-(a^2vw+b^2wu+c^2uv)^2)}{c^2(u+v+w)uv+w(a^2vw+b^2wu+c^2uv)}\right).$$

(28) Die Steiner-Inversion σ eines Vierecks vertauscht den Diagonalenschnitt mit dem Bennett-Punkt.

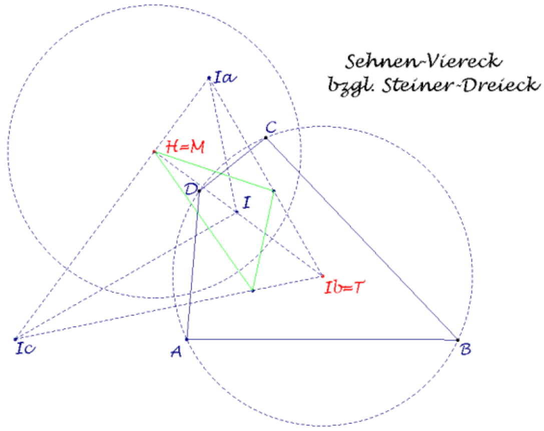


Damit haben der Diagonalenschnitt und der Bennett-Punkt das gleiche Abstandsprodukt ac vom Miquel-Punkt wie die Gegenecken und die Gegenseitenschnitte des Vierecks.

(29) Das isogonale Bild des Bennett-Punktes bzgl. des Steiner-Dreiecks ist das Perspektivzentrum von Diagonal- und Steiner-Dreieck.

(30) Spiegelt man das isogonale Bild des Bennett-Punktes bzgl. des Steiner-Dreiecks am Schwerpunkt des Vierecks, so erhält man den Poncelet-Punkt.

Auf die aufwändige Darstellung des Poncelet-Punktes sei hier verzichtet.



Für ein Sehnen-Viereck fällt der Bennett-Punkt in die Umkreismitte, die im Ankreismittelpunkt I_b des Steiner-Dreiecks liegt. Der Umkreis des Sehnen-Vierecks schneidet den Inversionskreis der Steiner-Inversion σ orthogonal. Der Radius ist

$$R = \frac{2abc}{a-b+c}$$

und seine Gleichung lautet

$$bcx^2 - cay^2 + abz^2 + 2c(s-a)xy + 2bszx + 2a(s-c)yz = 0 \;.$$

Spiegelt man die Ecken des Steiner-Dreiecks eines Sehnen-Vierecks am Umkreis des Sehnen-Vierecks, so erhält man die Ecken des Diagonaldreiecks. Das Diagonaldreieck besteht also aus der Inkreismitte I und den Ankreismitten I_a und I_c des Steiner-Dreiecks.

Für ein Sehnen-Tangenten-Viereck verbleibt nur noch eine Möglichkeit für den Punkt D:

$$D_{ST}(a(-X+Y+Z) : b(X+Y+Z) : c(X+Y-Z))$$

$$\text{mit } X = \sqrt{\sqrt{s} + \frac{(s-c)\sqrt{s-b}}{s-a}}, \quad Y = \sqrt{\frac{b(\sqrt{s}+\sqrt{s-b})}{s}},$$

$$Z = \sqrt{\sqrt{s} + \frac{(s-a)\sqrt{s-b}}{s-c}} \;.$$

Die Mitte des Inkreises des Sehnen-Tangenten-Vierecks

$$Q(-a : a+c-2\sqrt{s(s-b)} : -c)$$

ist Fixpunkt der Steiner-Inversion σ. Der Radius beträgt

$$\sqrt[4]{\frac{a^2c^2(a+c-2\sqrt{s(s-b)})}{s}} \;.$$

Literatur

[Cla] J.W. Clawson: The Complete Quadrilateral. – Annals of Mathematics, ser. 2, 20 (1919) 232-261.

[Cun] H.M. Cundy, C.F. Parry: Geometrical Properties of some Euler and Circular Cubics. Part 2. – Journal of Geometry 68, 58-75, 2000.

[Ehr] J.-P. Ehrmann: Steiner´s Theorems on the Complete Quadrilateral. – Forum Geometricorum Volume 4 (2004) 35-52.
[Gri] D. Grinberg: Poncelet points and antigonal conjugates. − http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=109112
[Joh] R. A. Johnson: Advanced Euclidean Geometry. – Dover Publications, 2007.
[Stä] R. Stärk, D. Baumgartner: Ein merkwürdiger Punkt des Vierecks. – PM 1/44. Jg. 2002, S.19.
[Yiu] F. v. Lamoen, P. Yiu: The Kiepert Pencil of Kiepert Hyperbolas. – Forum Geometricorum Volume 1 (2001) 125-132.

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de