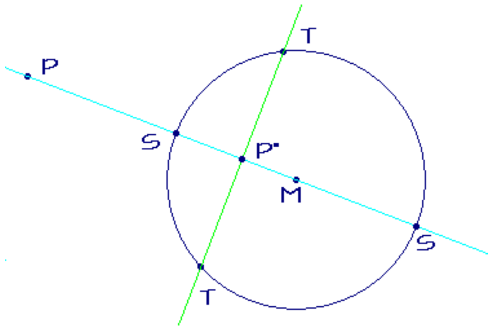
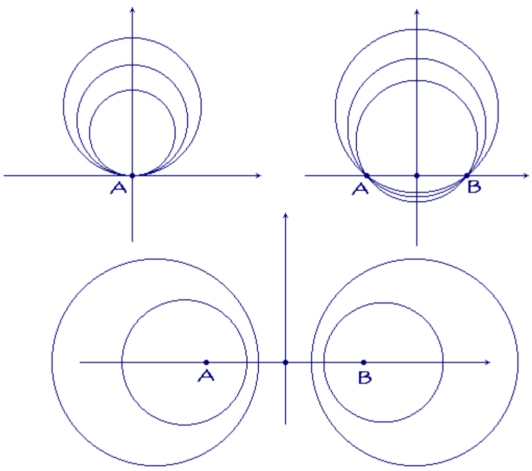
Pol-Polaren-Ortslinien zu Kreisbüscheln

Eckart Schmidt



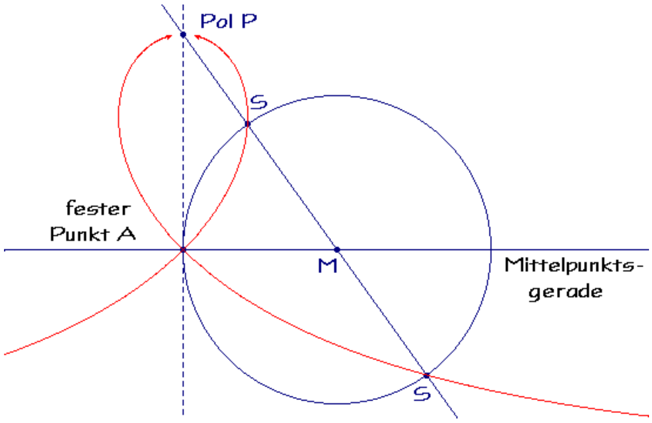
Zu einem Pol-Polaren-Paar bzgl. eines Kreises lassen sich die Schnittpunkte S der Sekanten Pol-Zentrum oder die Schnittpunkte T der Polaren mit dem Kreis als auch der Schnitt P° der beiden Geraden betrachten. Die Ortslinien dieser Punkte für Kreisbüschel liefern neben Kreisen auch Strophoiden und Zirkularkurven. Dazu werden parabolische, elliptische und hyperbolische Kreisbüschel betrachtet. Anfangs werden kartesische, später baryzentrische Koordinaten benutzt.



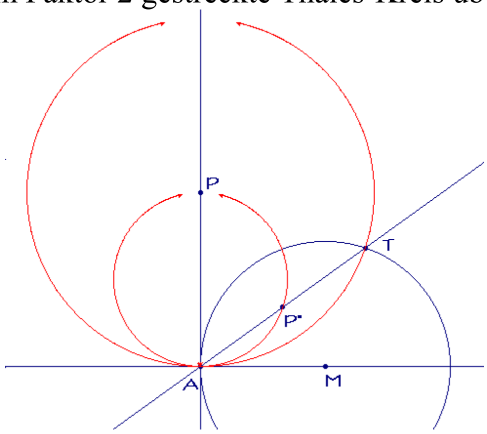
Strophoiden

Betrachtet man die Schnittpunkte eines Geraden- und eines Kreisbüschels, so erhält man Strophoiden. Dabei ist das Kreisbüschel durch eine Kurve m für die Mittelpunkte M und einen festen gemeinsamen Punkt A auf m vorgegeben und das Geradenbüschel durch einen Pol P. Die Schnittpunkte der Sekanten PM mit dem Kreis um M durch A ergeben die Strophoide [1]. Man spricht von der Strophoiden der Kurve m bzgl. des Pols P und des festen Punktes A. Wir beschränken uns hier auf Geraden g für die Mittelpunktskurve. Einfachstes

Beispiel ist die symmetrische Strophoide, bei der der feste Punkt A Fußpunkt des Lotes vom Pol P auf die Gerade der Mittelpunkte ist.



Betrachtet man die Spiegelungen $P°$ des Pols P an den Kreisen dieses parabolischen Kreisbüschels, so ergibt sich offensichtlich ein Kreis, der Thales-Kreis über AP. Die Polaren von P schneiden sich im Punkt A und den zugehörigen Kreis in einem weiteren Punkt T, dessen Ortslinie ebenfalls ein Kreis ist, der von A mit dem Faktor 2 gestreckte Thales-Kreis über AP.



Parabolische Kreisbüschel

Betrachtet werden Kreise, deren Mitten M auf einer Geraden liegen und die durch einen Punkt A auf dieser Geraden gehen. Der Pol P sei nicht mehr an die Senkrechte in A zur Mittelpunktsgeraden gebunden. Ein kartesisches Koordinatensystem sei wie folgt angepasst:

$$M(0;\rho),\quad A(0;0),\quad P(u;v).$$

Die Kreise des Büschels haben dann die Gleichungen

$$x^2+(y-\rho)^2=\rho^2$$

mit dem Radius ρ als Parameter.

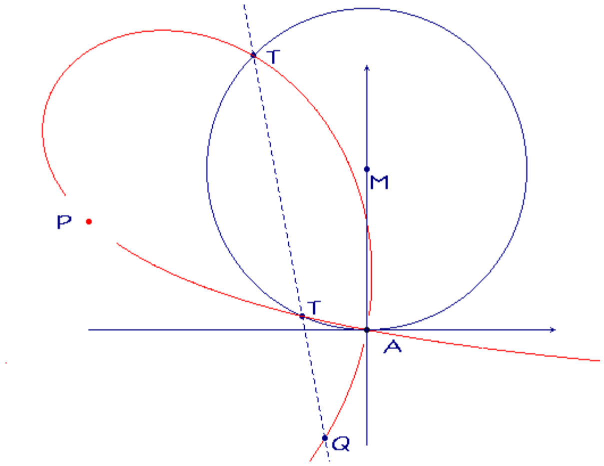
(1) Die Polaren von P mit den Gleichungen

$$ux+(v-\rho)y-v\rho=0$$

schneiden sich in $Q(\frac{v^2}{u};-v)$ diametral zu P bzgl. des Ortskreises der Spiegelpunkte $P°$ (s.u.).

(2) Die Polaren von P schneiden die Kreise in den T-Punkten, deren Ortslinie die Gleichung hat:

$$(y+v)x^2+(y-v)y^2-2uxy=0\,.$$

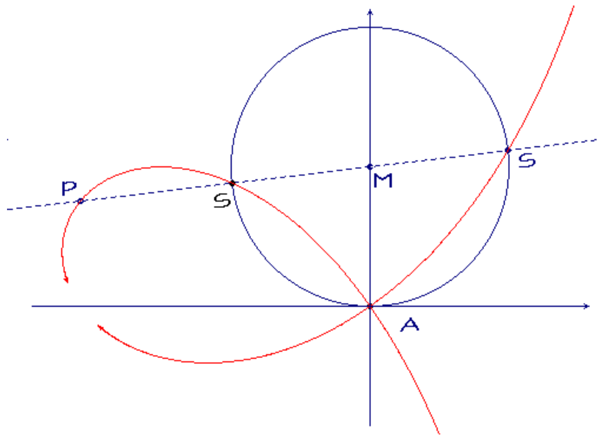


(3) Die Verbindungsgeraden PM mit den Gleichungen

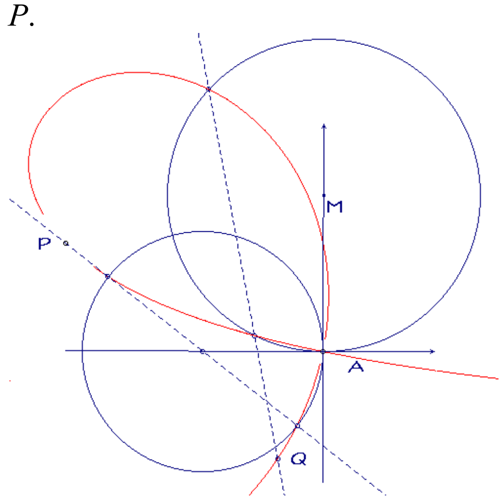
$$(v-\rho)x-uy+u\rho=0$$

schneiden die Kreise in den S-Punkten, deren Ortslinie zur Gleichung hat:

$$(x-u)x^2+(x+u)y^2-2vxy=0\,.$$



Diese Ortslinie ist gemäß ihrer Konstruktion eine Strophoide: Definierende Gerade ist die y-Achse mit dem festen Punkt A und dem Pol P.



Das Vertauschen von x und y sowie u und v ergibt die Ortslinie unter (2). Damit ist auch die Ortslinie der T-Punkte eine

Strophoide, nur mit der x-Achse als erzeugender Geraden und dem Pol Q. Die S-Schnitte des Büschels und die T-Schnitte des orthogonalen Büschels liegen auf der gleichen Strophoiden (und umgekehrt).

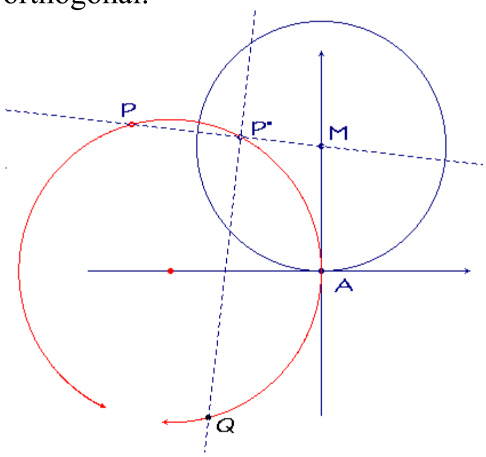
(4) Spiegelt man P an den Kreisen des Büschels, so erhält man die Punkte

$$P°(\frac{\rho^2 u}{u^2+(v-\rho)^2};\frac{\rho(u^2+v^2-\rho v)}{u^2+(v-\rho)^2}),$$

die auf einem Kreis liegen mit der Gleichung:

$$(x-\frac{u^2+v^2}{2u})^2+y^2=\frac{(u^2+v^2)^2}{4u^2}.$$

Dieser Kreis hat den Durchmesser PQ und schneidet alle Kreise des Büschels orthogonal.



Elliptische Kreisbüschel

Lässt man jetzt auch noch die Bindung des festen Punktes A an die Mittelpunktsgerade fallen, d.h. verallgemeinert man die Strophoiden-Konstellation, so gehen die Kreise durch zwei feste Punkte: A und seinen Spiegelpunkt B an der Mittelpunktsgeraden. Mit dem Dreieck ABP ergibt sich ein Bezugsdreieck für baryzentrische Koordinaten, mit denen die Ergebnisse interpretierbarer werden. Die Seitenlängen seien

$$AB=c,\quad BP=a,\quad PA=b.$$

Benutzt werden weiterhin die Conway-Abkürzungen:

$$2S_A=-a^2+b^2+c^2,\quad 2S_B=a^2-b^2+c^2,\quad 2S_C=a^2+b^2-c^2,$$

$$\text{sowie } S^2=S_AS_B+S_BS_C+S_CS_A.$$

Als Parameter sei der Abstand μ des Mittelpunktes von der Geraden AB gewählt. Dann haben die Kreise des Büschels die Mittelpunkte

$$M(cS+2S_B\mu:cS+2S_A\mu:-2c^2\mu)$$

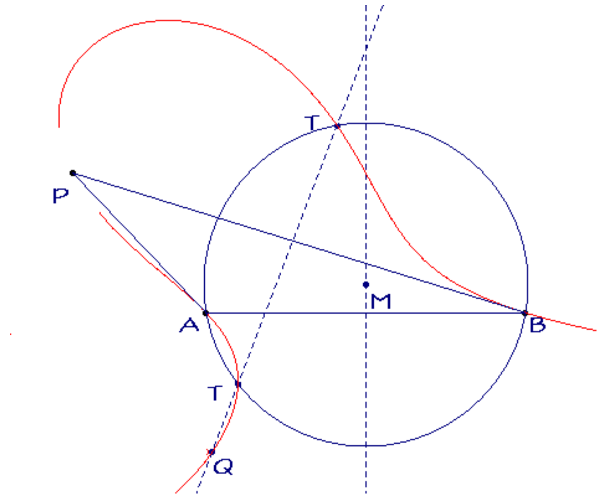
und die Gleichungen

$$cS(c^2xy+S_Byz+S_Azx-S_Cz^2)-2S^2z(x+y+z)\mu=0.$$

(1) Die Polaren von $P(0:0:1)$ bzgl. der Kreise des Büschels haben die Gleichungen:

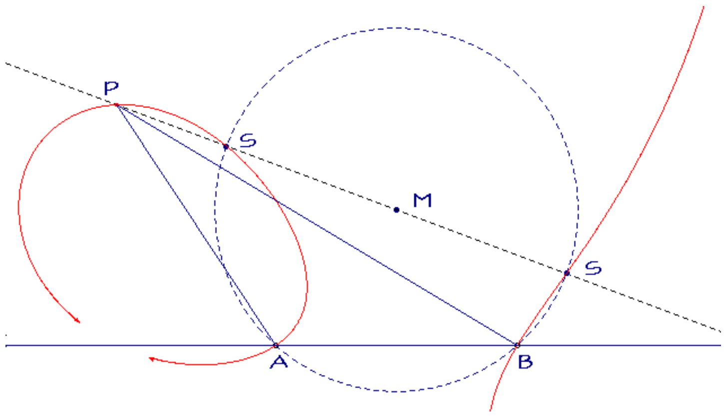
$$(cS_A - 2S\mu)x + (cS_B - 2S\mu)y - 2(cS_C + 2S\mu)z = 0$$
und schneiden sich im Punkt
$$Q(2a^2 : -2b^2 : b^2 - a^2)\,.$$

(2) Die T-Schnitte der Polaren mit den Kreisen ergeben nach Elimination des Parameters eine Ortslinie mit der Gleichung
$$(c^2y^2 + b^2z^2)x + (a^2z^2 + c^2x^2)y + 2c^2xyz = 0\,.$$



Diese Kurve dritter Ordnung ist isogonal invariant, d.h. invariant bei der Abbildung
$$(x : y : z) \quad \to \quad (a^2yz : b^2zx : c^2xy)\,;$$
hat aber keinen Pivot-Punkt, auch wenn der gemeinsame Schnitt Q der Polaren auf der Kurve liegt. Die Kurve kann aber als „non-pivotal isogonal circular cubic“ [2] angesprochen werden. Dazu sei angemerkt, dass Fußpunktkreise der Kurvenpunkte die Gerade AB senkrecht schneiden, d.h. ihre Mittelpunkte auf AB haben.

(3) Die Verbindungsgeraden PM mit den Gleichungen
$$(cS + 2S_A\mu)x - (cS + 2S_B\mu)y = 0$$
liefern für die S-Schnitte nach Elimination des Parameters eine Ortslinie mit der Gleichung
$$S_B(b^2z^2 - c^2y^2)x + S_A(c^2x^2 - a^2z^2)y - c^2(a^2y^2 - b^2x^2)z = 0$$



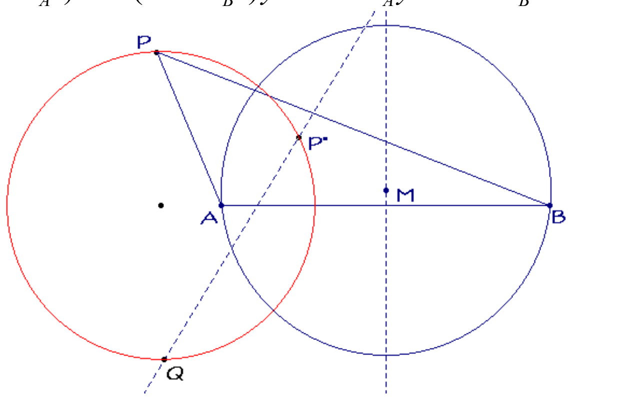
Auch diese Kurve dritter Ordnung ist isogonal invariant. Dabei verlaufen die Verbindungsgeraden isogonaler Kurvenpunkte senkrecht zu AB. Damit handelt es sich um eine „pivotal isogonal circular cubic“ [2], d.h. eine Zirkularkurve des Dreiecks ABP mit dem Pivot-Punkt im Fernpunkt $F(S_B : S_A : -2c^2)$ der Senkrechten zu AB.

(4) Spiegelt man den Punkt P an den Kreisen des Büschels, so erhält man die Punkte

$$\begin{aligned} P^\circ(2(cS_C + 2S\mu)(cS + 2S_B\mu) \\ : 2(cS_C + 2S\mu)(cS + 2S_A\mu) \\ : c^4S - 4c^3S_C\mu - 4c^2S\mu^2). \end{aligned}$$

Die Ortslinie dieser Punkte ist ein Kreis mit der Gleichung

$$(S^2 + S_A{}^2)x^2 - (S^2 + S_B{}^2)y^2 - 2a^2S_Ayz + 2b^2S_Bzx = 0\,.$$



Der Mittelpunkt dieses Kreises $(a^2 : -b^2 : 0)$ ist auch Mittelpunkt der Strecke PQ und teilt die Strecke AB im Verhältnis $-b^2/a^2$. Der Ortskreis schneidet alle Kreise des Büschels orthogonal, so dass A an diesem Kreis gespiegelt B ergibt. Es sei angemerkt, dass die Inversion mit Zentrum P, die A und B vertauscht, die Mittelsenkrechte von AB auf diesen Ortskreis abbildet.

Hyperbolische Kreisbüschel

Betrachtet werden jetzt Kreise, zu denen zwei feste Punkte A und B spiegelbildlich liegen. Ihre Mitten liegen auf AB und ihre Schnitte mit AB sind mit A und B in harmonischer Lage. Die Kreise dieses Büschels schneiden die Kreise des zugehörigen elliptischen Büschels orthogonal. Gearbeitet wird weiterhin mit baryzentrischen Koordinaten zum Bezugsdreieck ABP.
Teilt ein Mittelpunkt N die Strecke AB im Verhältnis τ, so hat er die Koordinaten $N(1:\tau:0)$ und der zugehörige Inversionskreis die Gleichung

$$b^2z^2 + c^2y^2 + 2S_Ayz + (a^2z^2 + c^2x^2 + 2S_Bzx)\tau = 0\,.$$

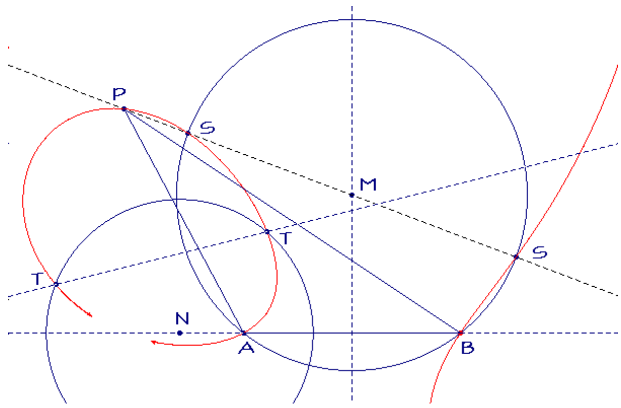
(1) Die Polaren von P bzgl. der Kreise dieses Büschels haben die Gleichungen

$$S_B\tau x + S_Ay + (b^2 + a^2\tau)z = 0\,.$$

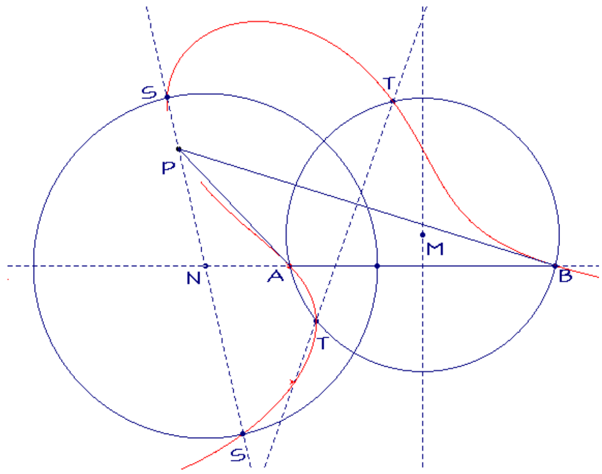
Sie schneiden sich in dem Punkt

$$R(a^2S_A : b^2S_B : S_AS_B)\,.$$

(2) Ihre T-Schnitte liegen auf der Zirkularkurve der S-Schnitte des elliptischen Büschels.



(3) Die Verbindungsgeraden PN mit den Gleichungen $\tau x - y = 0$ liefern S-Schnitte auf der Ortslinie der T-Schnitte zu dem elliptischen Büschel.



(4) Spiegelt man den Punkt P an den Kreisen des hyperbolischen Büschels, so erhält man die Punkte

$$P^\circ(b^2 + a^2\tau : (b^2 + a^2\tau)\tau : -c^2\tau)\,,$$

deren Ortslinie wiederum ein Kreis ist mit der Gleichung

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy=0.$$

Dieser Kreis ist der Umkreis von ABP, auf dem auch der Punkt R diametral zu P liegt.

Zusammenfassend liegen die T-Schnitte des elliptischen Büschels und die S-Schnitte des orthogonalen hyperbolischen Büschels auf der gleichen Kurve, entsprechend die S-Schnitte des elliptischen und die T-Schnitte des hyperbolischen Büschels.

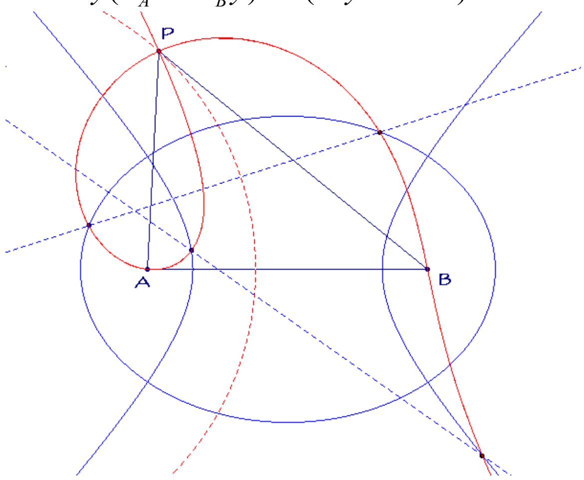
Kegelschnitte mit gleichen Brennpunkten

Die Thematik dieser Ausarbeitung kann in verschiedenster Weise erweitert werden. Z.B. kann die Mittelpunktsgerade durch einen Kreis ersetzt werden oder – wie hier abschließend –, Kreisbüschel durch Kegelschnittsbüschel ersetzt werden.
Betrachtet man die orthogonalen Büschel von Ellipsen und Hyperbeln mit gleichen Brennpunkten *A* und *B* sowie einen festen Punkt *P,* so erhalten die Kegelschnitte die Gleichungen

$$(c^2-\kappa^2)(c^2(x-y)^2-\kappa^2(x+y)^2)$$
$$+z^2((a-b)^2-\kappa^2)((a+b)^2-\kappa^2)$$
$$+2z(c^2-\kappa^2)(x(a^2-b^2-\kappa^2)-y(a^2-b^2+\kappa^2))=0\,,$$

wenn der Parameter κ die Summe bzw. die Differenz der Abstände zu den Brennpunkten bezeichnet. Die Polaren von *P* schneiden dann diese brennpunktsgleichen Kegelschnitte auf einer Ortslinie mit der Gleichung

$$2xy(S_A x-S_B y)-z(a^2y^2-b^2x^2)=0\,.$$



Diese Kurve dritter Ordnung ist das isogonale Bild des Apollonius-Kreises zu *AB* bzgl. *ABP*, denn dieser Kreis hat die Gleichung

$$c^2(a^2y^2-b^2x^2)+2z(a^2S_A y-b^2S_B x)=0\,.$$

Darüber hinaus kann die Kurve auch als Strophoide angesprochen werden mit der Seitenhalbierenden von *AB* als erzeugender Geraden, dem Knoten *P* auf dieser Geraden und dem Pol $(a^2:b^2:2S_C)$ im isogonalen Bild des Schnitts $(2S_C:2S_C:c^2)$ von Seitenhalbierender und Apollonius-Kreis.

Literatur

[1] E. H. Lockwood: A Book of Curves. – Cambridge at the University Press 1961.
[2] J.-P. Ehrmann and B.Gibert: Special Isocubics in the Triangle Plane. – http://perso.wanadoo.fr/bernard.gibert.

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de