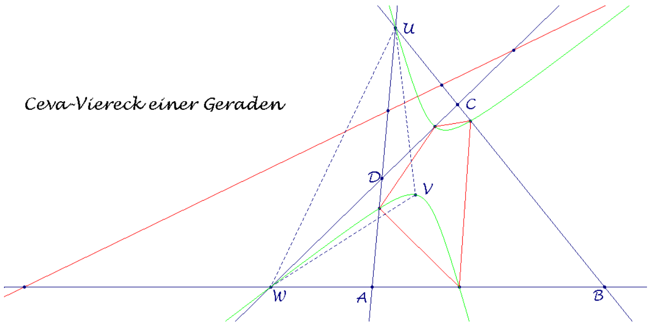
Pol-Polaren-Beziehung am Viereck

Eckart Schmidt

Bei einem Dreieck lässt sich zu einem Punkt eine Gerade als Tripolare („trilinear polar“) und zu einer Geraden ein Punkt als Tripol („trilinear pole“) aufzeigen. Die Zuordnung erfolgt mit Ceva- und Anti-Ceva-Dreiecken sowie vierten harmonischen Punkten auf den Seiten. In dieser Ausarbeitung wird eine Verallgemeinerung dieser Zusammenhänge für Vierecke versucht. – Gearbeitet wird in baryzentrischen Koordinaten des Diagonal-Dreiecks eines Vierecks.



Tripol - Tripolare

Zuerst seien bekannte Zusammenhänge am Dreieck angesprochen. Betrachtet man zu einem Punkt die Ecktransversalen in einem Bezugsdreieck, so schneiden diese die Gegenseiten in den Ecken des Ceva-Dreiecks des Punktes. Die vierten harmonischen Punkte auf den Seitengeraden des Dreiecks liegen kollinear auf der Tripolaren („trilinear polar“ [1]) des Punktes. Umgekehrt erhält man zu einer Geraden den Tripol („trilinear pole“ [1]), indem man zu den Seitenschnitten die vierten harmonischen Punkte auf den Seitengeraden betrachtet; sie bilden das Ceva-Dreieck des Tripols.
In baryzentrischen Koordinaten des Bezugsdreiecks ergibt sich die Gleichung der Tripolaren eines Punktes

$$P(p:q:r) \quad \text{zu} \quad p:\; qrx+rpy+pqz=0\ .$$

Entsprechend bestimmt sich der Tripol einer Geraden

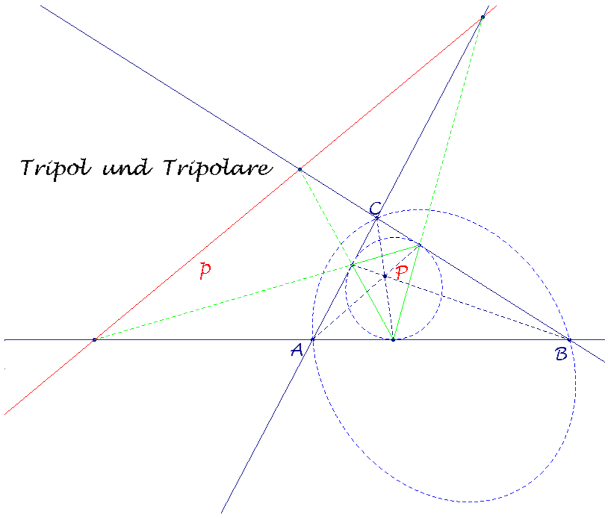
$$q:\; ax+by+gz=0 \quad \text{zu} \quad Q(bg:ga:ab)\ .$$

Tripol und Tripolare sind damit Perspektivzentrum und Perspektivachse von Ceva-Dreieck und Bezugsdreieck.

Tripol und Tripolare können auch als Pol-Polaren-Paar bzgl. zweier Kegelschnitte interpretiert werden. Zum einen ist dies ein Berührkegelschnitt des Dreiecks mit dem Brianchon-Punkt [1] im Tripol. Zu $P(p:q:r)$ hat dieser Berührkegelschnitt die Gleichung

$$q^2r^2x^2 + r^2p^2y^2 + p^2q^2z^2 - 2pqr(rxy + qzx + pyz) = 0 \ .$$

Man erhält diesen Kegelschnitt auch als Einhüllende der Tripolaren zu Punkten der Tripolaren von *P*.



Zum anderen handelt es sich um einen Umkegelschnitt, den man erhält, wenn man die Tripolare mit einer „isoconjugation" ([1], [2]) abbildet, die den Tripol fix lässt. Diese Abbildung zu $P(p:q:r)$ mit der Zuordnung

$$(x:y:z) \quad \rightarrow \quad (p^2yz : q^2zx : r^2xy)$$

liefert als Bild der Tripolaren einen Umkegelschnitt mit der Gleichung

$$rxy + qzx + pxy = 0 \ .$$

Man erhält diesen Umkegelschnitt auch als Ortslinie der Tripole der Geraden des Büschels zum Tripol *P*.

Beispiel: Zum Umkreis des Bezugsdreiecks gehören in diesem Sinne der Lemoine-Punkt und die Gerade der kollinearen Mitten der Apollonius-Kreise als Pol-Polaren-Paar. Der zugehörige Berührkegelschnitt hat die Mitte der Brocard-Punkte als Zentrum.

Pol- und Polaren-Viereck

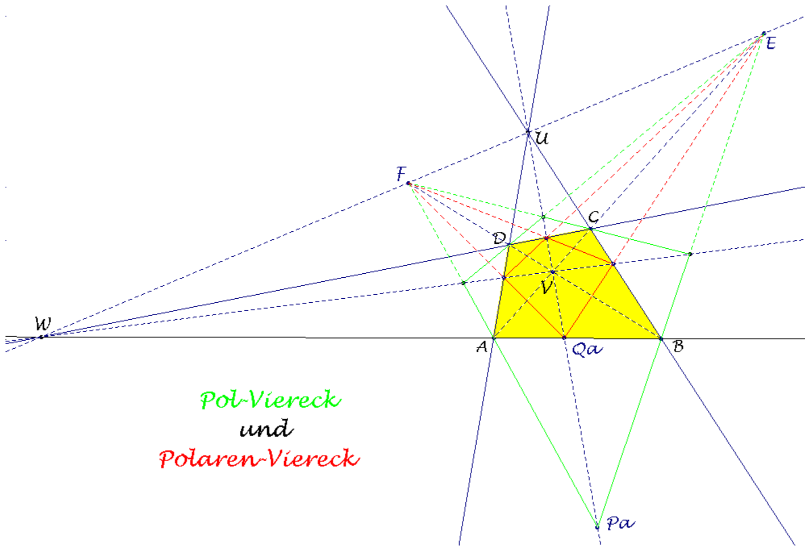
Zu einem Viereck *ABCD* sei das Dreieck aus den Gegenseitenschnitten *U*, *W* und dem Diagonalenschnitt *V* als Diagonaldreieck *UVW* bezeichnet:

$$U = DA \cap BC, \quad V = AC \cap BD, \quad W = AB \cap CD \ .$$

Bzgl. des Diagonaldreiecks ist jedes Teildreieck des Vierecks Anti-Ceva-Dreieck der vierten Ecke. Die Seite *WU* sei als Basis, die Seiten *UV* und *VW* seien als Schenkel des Diagonaldreiecks angesprochen. Hier wird das Diagonaldreieck als Bezugsdreieck für baryzentrische Koordinaten benutzt:

$$U(1:0:0), \quad V(0:1:0), \quad W(0:0:1),$$

$$A(-u:v:w),\quad B(u:-v:w),\quad C(u:v:-w),\quad D(u:v:w).$$



Die Schenkelgeraden des Diagonaldreiecks schneiden die Viereckseiten in den Punkten

$$Q_a(u:-v:0),\quad Q_b(0:v:-w),\quad Q_c(u:v:0),\quad Q_d(0:v:w).$$

Q_a und Q_c bzw. Q_b und Q_d teilen die Schenkel *UV* bzw. *VW* harmonisch.

Neben dem Diagonaldreieck wird das Diagonalendreiseit *EVF* betrachtet, das von den zwei Diagonalen *AC* und *BD* sowie der Verbindungsgeraden *WU* der Gegenseitenschnitte erzeugt wird:

$$AC \cap WU = E(u:0:w),\quad V(0:1:0),\quad BD \cap WU = F(u:0:-w).$$

Verbindet man den Punkt *E* mit den Gegenecken *B* und *D* sowie *F* mit den Gegenecken *A* und *C* des Vierecks, so erhält man in den Schnittpunkten der Verbindungsgeraden ein umbeschriebenes Viereck $P_aP_bP_cP_d$:

$$P_a(2u:-v:0),\quad P_b(0:-v:2w),\quad P_c(2u:v:0),\quad P_d(0:v:2w).$$

P_a und P_c bzw. P_b und P_d teilen die Schenkel *UV* und *VW* des Diagonaldreiecks ebenfalls harmonisch. Darüber hinaus sind folgende Punktequadrupel in harmonischer Lage:

$$(U,Q_a;P_a,V),\quad (U,Q_c;P_c,V),\quad (W,Q_b;P_b,V),\quad (W,Q_d;P_d,V).$$

Für ein Viereck liegt es nahe, zu jeder Ecke die Tripolare bzgl. des Restdreiecks oder bzgl. des Diagonaldreiecks zu betrachten. Dabei zeigt sich, dass diese Tripolaren identisch sind, z.B.:

Tripolare von *D*	bzgl. *ABC*	bzgl. *UVW*
Ceva-Dreieck	*U, V, W*	Q_d, *F*, Q_c
4. harm. Pkte	Q_b, *E*, Q_a	Q_b, *E*, Q_a
Verbindungsgerade	Q_aQ_b	Q_aQ_b

Entsprechend ergeben sich zu den Ecken *A, B, C, D* die Tripolaren Q_bQ_c, Q_cQ_d, Q_dQ_a, Q_aQ_b, die sich auf den Seiten des

Vierecks in den Punkten Q_a, Q_b, Q_c, Q_d schneiden, so dass das einbeschriebene Viereck $Q_aQ_bQ_cQ_d$ als Polaren-Viereck von *ABCD* angesprochen werden kann.
Hintergrund dieser Zusammenhänge ist, dass die Tripolare eines Punktes bzgl. eines Dreiecks auch Tripolare bzgl. des Ceva- und Anti-Ceva-Dreiecks des Punktes ist [3].

Alternativ lassen sich zu jeder Seite des Vierecks die Tripole bzgl. des Restdreiseits bzw. des Diagonalendreiseits betrachten. Auch hier zeigt sich, dass diese Tripole identisch sind, z.B.:

Tripol von *CD*	bzgl. *ABU*	bzgl. *EVF*
Seitenschnitte	*C, D, W*	*D, W, C*
4. harm. Pkte	$(3u:-v:w)$, $(3u:-v:-w)$, Q_a	*B, U, A*
Ceva-Punkt	P_a	P_a

Damit ergeben sich zu den Seiten *AB, BC, CD, DA* die Tripole P_c, P_d, P_a, P_b, so dass das umbeschriebene Viereck $P_aP_bP_cP_d$ als Pol-Viereck von *ABCD* angesprochen werden kann.
Die bisherigen Ergebnisse lassen sich im folgenden Satz zusammenfassen:

Satz 1. Das Pol-Viereck ist ein umbeschriebenes, das Polaren-Viereck ein einbeschriebenes Viereck, deren Ecken paarweise auf den Schenkeln des Diagonaldreiecks liegen und diese harmonisch teilen. Ihr gemeinsames Diagonaldreieck ist das Diagonalendreiseit des Ausgangsvierecks.

Es bleibt anzumerken, dass das Pol-Viereck des Polaren-Vierecks wieder das Ausgangsviereck ist (und umgekehrt).

Innen- und Außen-Kegelschnitt eines Vierecks

Die Ecken Q_a, Q_b, Q_c, Q_d des Polaren-Vierecks sind Berührpunkte eines Kegelschnitts mit der Gleichung

$$k_i: \quad v^2w^2x^2 - w^2u^2y^2 + u^2v^2z^2 = 0$$

und dem Zentrum

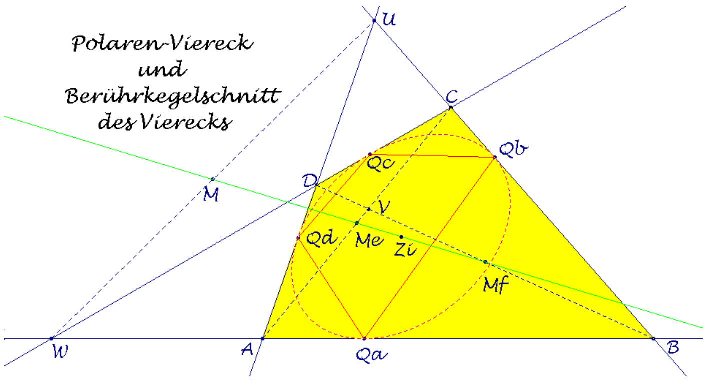
$$Z_i(u^2 : -v^2 : w^2) \ .$$

Dieser Punkt liegt als Zentrum eines Berührkegelschnitts auf der sogenannten Newton-Geraden [4] des Vierecks. Diese Gerade enthält neben den beiden Diagonalenmitten

$$M_e(-u : \frac{v^2}{u-w} : w) \quad und \quad M_f(u : -\frac{v^2}{u+w} : w)$$

die Basismitte $M(1:0:1)$ des Diagonaldreiecks; hierzu ist das Zentrum Z_i der vierte harmonische Punkt: M und Z_i teilen die Strecke M_eM_f in den Verhältnissen

$$\mp \frac{(u+w)^2 - v^2}{(u-w)^2 - v^2} \ .$$



Satz 2. Die Ecken des Polaren-Vierecks $Q_aQ_bQ_cQ_d$ sind die Berührpunkte eines einbeschriebenen Kegelschnitts des Bezugsvierecks (Innen-Kegelschnitt), dessen Zentrum Z_i der vierte harmonische Punkt auf der Newton-Geraden ist.

Die Bezeichnung Polaren-Viereck erweist sich auch insofern als gerechtfertigt, als die Polaren der Ecken des Vierecks bzgl. dieses Berührkegelschnitts die Tripolaren der Gegenecken bzgl. des Diagonaldreiecks sind.

Da das Ausgangsviereck *ABCD* das Polaren-Viereck des Pol-Vierecks ist, sind die Seiten des Pol-Vierecks $P_aP_bP_cP_d$ Tangenten eines Umkegelschnitts des Bezugsvierecks mit der Gleichung

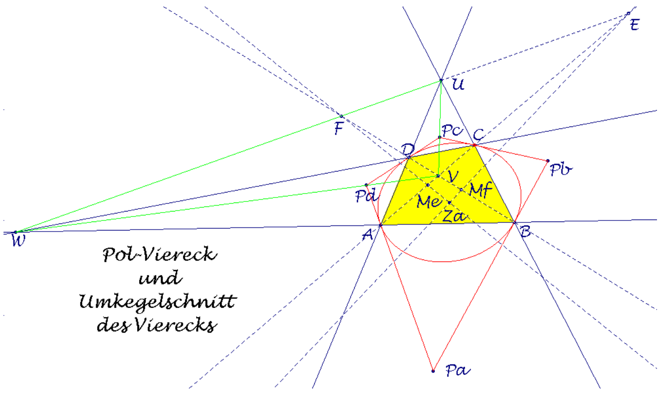
$$k_a:\quad v^2w^2x^2-2w^2u^2y^2+u^2v^2z^2=0$$

und dem Zentrum

$$Z_a(2u^2:-v^2:2w^2)\,.$$

Die Ecken des Pol-Vierecks sind somit die Pole der Seiten des Bezugsvierecks bzgl. dieses Umkegelschnitts.

Satz 3. Die Seiten des Pol-Vierecks $P_aP_bP_cP_d$ sind Tangenten eines umbeschriebenen Kegelschnitts des Bezugsvierecks (Außen-Kegelschnitt) mit dem Zentrum Z_a (s.u.).



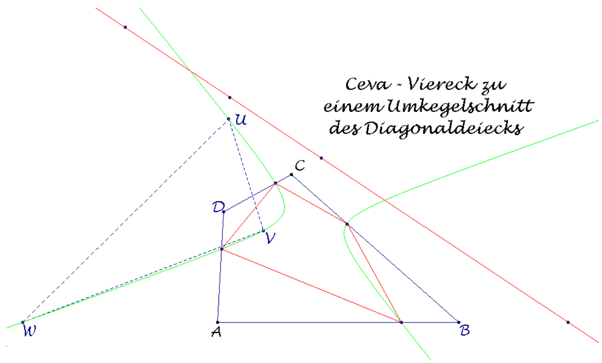
Das Zentrum Z_a liegt im Schnitt der Geraden EM_f und FM_e und kann auch wie folgt als merkwürdiger Viereckpunkt angesprochen werden: Betrachtet man einen Berührkegelschnitt des Vierecks mit dem Zentrum Z_1, so liegen die Berührpunkte mit den Gegenseitenschnitten des Vierecks auf einem weiteren Kegelschnitt mit Zentrum Z_2. Die Gerade Z_1Z_2 enthält immer den Punkt Z_a. Die zugehörigen Berechnungen seien hier unterdrückt. – Die Zentren Z_i und Z_a der beiden Kegelschnitte liegen offensichtlich kollinear mit dem Diagonalenschnitt V.

Spezielle Ceva-Vierecke

Ceva-Dreiecke sind einbeschriebene Dreiecke, deren Ecken die Seiten des Bezugsdreiecks in Verhältnissen mit Produkt −1 teilen (Satz des Ceva). In dieser Form ist eine Verallgemeinerung für Vierecke möglich.

> **Definition (Ceva-Viereck): Ein Ceva-Viereck ist ein einbeschriebenes Viereck, dessen Ecken die Seiten des Vierecks in Verhältnissen mit Produkt Eins teilen.**

Dabei zeigt sich, dass die Ecken eines Ceva-Vierecks mit den Gegenseitenschnitten *U, W* des Vierecks auf einem Kegelschnitt liegen [5]. In dieser Ausarbeitung werden aber nur Ceva-Vierecke angesprochen, die von einem Umkegelschnitt des Diagonaldreiecks *UVW* erzeugt werden.



Gibt man dem Umkegelschnitt des Diagonaldreiecks – auch als definierender Kegelschnitt des Ceva-Vierecks angesprochen – die Gleichung

$$kyz + lzx + mxy = 0 \ ,$$

dann hat das zugehörige Ceva-Viereck die Ecken

$$(u : -v : \frac{muv}{lu - kv}), \quad (\frac{kvw}{lw - mv} : -v : w),$$

$$(u : v : -\frac{muv}{lu + kv}), \quad (-\frac{kvw}{lw + mv} : v : w) \, .$$

Diese Punkte teilen die Seiten in den Verhältnissen

$$\frac{(u - v + w)(-kvw + lwu + muv)}{(-u + v + w)(kvw - lwu + muv)}, \quad \frac{(u + v - w)(kvw - lwu + muv)}{(u - v + w)(kvw + lwu - muv)} \ ,$$

$$\frac{(u+v+w)(kvw+lwu-muv)}{(u+v-w)(kvw+lwu+muv)},\quad \frac{(-u+v+w)(kvw+lwu+muv)}{(u+v+w)(-kvw+lwu+muv)}$$
mit Produkt Eins.

Das Partner-Ceva-Viereck, bestehend aus den vierten harmonischen Punkten auf den Seiten

$$(u:-v:\frac{w^2(lu-kv)}{muv}),\quad (\frac{u^2(lw-mv)}{kvw}:-v:w)\ ,$$
$$(u:v:-\frac{w^2(lu+kv)}{muv}),\quad (-\frac{u^2(lw+mv)}{kvw}:v:w)$$

entartet kollinear auf einer Geraden mit der Gleichung

$$kv^2w^2x+lw^2u^2y+mu^2v^2=0\ .$$

> **Satz 4. Ist der definierende Kegelschnitt eines Ceva-Vierecks ein Umkegelschnitt des Diagonaldreiecks, so liegen die vierten harmonischen Punkte auf den Seiten des Vierecks kollinear.**

Beispiel: Der Mittenkegelschnitt des Vierecks, auf dem die Zentren aller Umkegelschnitte liegen, erzeugt das Seitenmitten-Parallelogramm (Varignon-Parallelogramm) als Ceva-Viereck; die vierten harmonischen Punkte auf den Seiten sind Punkte der Ferngeraden.

Ceva-Viereck einer Geraden

In Umkehrung von Satz 4 lässt sich einer Geraden

$$q:\quad ax+by+gz=0$$

wie beim Dreieck, so auch beim Viereck durch die vierten harmonischen Punkte auf den Seiten ein Ceva-Viereck zuordnen mit den Ecken:

$$Q_a(u:-v:\frac{gw^2}{bv-au}),\quad Q_b(\frac{au^2}{bv-gw}:-v:w),$$
$$Q_c(u:v:-\frac{gw^2}{bv+au}),\quad Q_d(-\frac{au^2}{bv+gw}:v:w)\ .$$

Die Gegenseitenschnitte des Ceva-Vierecks

$$(bu:-au-gw:bw)\quad und\quad (bu:-au+gw:-bw)$$

liegen wieder auf der Geraden q in den Schnittpunkten mit den Diagonalen des Vierecks.

> **Definition (q-Ceva-Viereck): Bringt man eine Gerade mit den Seiten des Vierecks zum Schnitt, so ergeben die vierten harmonischen Punkte auf den Seiten die Ecken des Ceva-Vierecks dieser Geraden.**

In diesem Sinne wird der Basisgerade UW des Diagonaldreiecks das Polaren-Viereck $Q_aQ_bQ_cQ_d$ (Satz 2) als Ceva-Viereck zugeordnet; definierender Kegelschnitt ist das Geradenpaar der Schenkelgeraden des Diagonaldreiecks.

Ein q-Ceva-Viereck und das Diagonaldreieck haben einen gemeinsamen Umkegelschnitt mit der Gleichung

$$k_q: \quad au^2yz + bv^2zx + gw^2xy = 0$$

und dem Zentrum

$$Z_q(au^2(-au^2+bv^2+gw^2) : bv^2(au^2-bv^2+gw^2) : gw^2(au^2+bv^2-gw^2)\,.$$

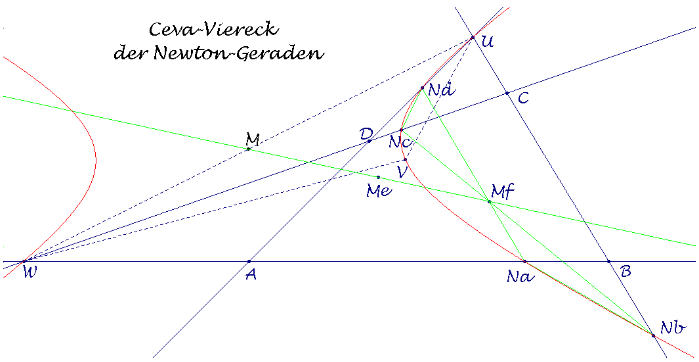
Der Pol der Geraden q bzgl. k_q ist der Diagonalenschnitt des Ceva-Vierecks von q. Der Pol der Geraden q bzgl. des Innen-Kegelschnitts k_i (Satz 2) ist auch Pol der Basisgeraden UW des Diagonaldreiecks bzgl. k_q.
Einen anderen Zugang zum gemeinsamen Umkegelschnitt k_q von Diagonaldreieck und q-Ceva-Viereck liefert der folgende Satz:

> **Satz 5. Der definierende Kegelschnitt k_q eines q-Ceva-Vierecks ist das Bild der Geraden q bei der „*ABCD*-conjugation“ des Diagonaldreiecks, die die Ecken des Vierecks fix lässt.**

Dabei sei unter der „*ABCD*-conjugation“ eine „isoconjugation“ [1] des Diagonaldreiecks verstanden, die die Ecken des Vierecks fix lässt. Man bestätigt dann den Satz unmittelbar anhand der Zuordnungsvorschrift dieser Abbildung:

$$X(x:y:z) \quad \to \quad X^*(u^2yz : v^2zx : w^2xy)\ .$$

Diese Abbildung ordnet einem Punkt X den gemeinsamen Punkt X^* der Polaren von X bzgl. der Umkegelschnitte des Vierecks zu.



Als Beispiel sei das Ceva-Viereck der Newton-Geraden des Vierecks angesprochen (vgl. Vorbemerkungen zu Satz 2): Die Newton-Gerade verbindet die Diagonalenmitten M_e und M_f und enthält die Basismitte M des Diagonaldreiecks; sie hat die Gleichung

$$n: \quad v^2x + (u^2-w^2)y - v^2z = 0\ .$$

Das Ceva-Viereck der Newton-Geraden hat die Ecken

$$N_a\left(u : -v : \frac{vw^2}{-u^2+uv+w^2}\right), \quad N_b\left(\frac{u^2v}{u^2+vw-w^2} : -v : w\right),$$

$$N_c\left(u : v : \frac{vw^2}{u^2+uv-w^2}\right), \quad N_d\left(\frac{u^2v}{-u^2+vw+w^2} : v : w\right)\ .$$

Die Diagonalen des Ceva-Vierecks der Newton-Geraden sind parallel, die Gegenseitenschnitte fallen in die Diagonalenmitten M_e und M_f des Vierecks und der definierende Kegelschnitt ist Umkegelschnitt des Diagonaldreiecks mit Zentrum in der Basismitte M (auf der Newton-Geraden):

$$k_n: \quad w^2xy + (w^2 - u^2)zx - u^2yz = 0.$$

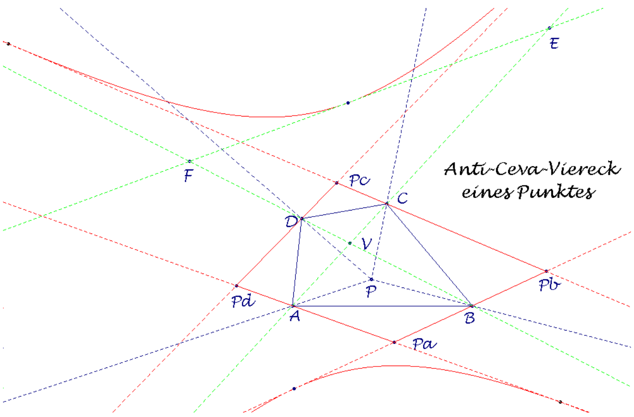
Anti-Ceva-Viereck eines Punktes

Projektiv analog zu obiger Definition des Ceva-Vierecks einer Geraden lässt sich zu einem Punkt ein Anti-Ceva-Viereck aufzeigen. Auch hier kann man von einer Verallgemeinerung der Zusammenhänge am Dreieck sprechen.
Betrachtet man zu einem Punkt P die Ecktransversalen in einem Viereck $ABCD$ und an jeder Ecke zu den beiden Seitengeraden und der Ecktransversale eine vierte Gerade mit Doppelverhältnis −1, dann erhält man vier Geraden, die mit den Seitengeraden des Diagonalendreiseits EVF Tangenten eines Kegelschnitts sind.
Gibt man dem Punkt die Koordinaten $P(p:q:r)$, so haben die „vierten harmonischen“ Geraden die Gleichungen

$$v(rv - qw)x + (ruv - 2quw - pvw)y + v(qu + pv)z = 0 \ ,$$
$$v(rv + qw)x + (ruv + 2quw + pvw)y + v(qu + pv)z = 0 \ ,$$
$$v(rv + qw)x + (-ruv - 2quw + pvw)y + v(-qu + pv)z = 0 \ ,$$
$$v(rv - qw)x + (-ruv + 2quw - pvw)y + v(-qu + pv)z = 0 \ .$$

Diese Geraden liefern ein umbeschriebenes Viereck des Bezugsvierecks mit den Ecken

$$P_a(-2qu - pv : qv : rv), \quad P_b(pv : qv : -2qw - rv),$$
$$P_c(2qu - pv : qv : rv), \quad P_d(pv : qv : 2qw - rv), \quad .$$



Dabei werden die Seiten dieses umbeschriebenen Vierecks von den Ecken des Bezugsvierecks in den Verhältnissen

$$\frac{(-p+q+r)v - 2qu}{(p+q-r)v + 2qw}, \quad \frac{(p+q-r)v - 2qw}{(-p+q+r)v - 2qu},$$
$$\frac{(-p+q+r)v + 2qu}{(p+q-r)v - 2qw}, \quad \frac{(p+q-r)v + 2qw}{(-p+q+r)v + 2qu}$$

mit Produkt Eins geteilt. Das umbeschriebene Viereck $P_aP_bP_cP_d$ kann somit als Anti-Ceva-Viereck des Punktes P angesprochen werden. Der Punkt P ist Diagonalenschnitt seines Anti-Ceva-Vierecks, dessen Diagonalen auch die Gegenseitenschnitte des Vierecks enthalten.

> **Definition (P-Anti-Ceva-Viereck): Betrachtet man in den Ecken des Vierecks zu den Seitengeraden und der Ecktransversale eines Punktes P jeweils die vierte Gerade mit Doppelverhältnis -1, so erhält man das Anti-Ceva-Viereck des Punktes P.**

In diesem Sinne wird dem Diagonalenschnitt V des Vierecks das Pol-Viereck (Satz 3) als Anti-Ceva-Viereck zugeordnet.

Die Ecken eines P-Anti-Ceva-Vierecks lassen sich konstruktiv leichter wie folgt gewinnen: Schneiden die Verbindungsgeraden des Punktes P mit den Gegenseitenschnitten U und W die Seiten des Vierecks in den Punkten S_a, S_b, S_c, S_d, dann sind die Punkte-Quadrupel

$$P,U;S_a,P_a \quad , \quad P,W;S_b,P_b \quad , \quad P,U;S_c,P_c \quad , \quad P,W;S_d,P_d$$

in harmonischer Lage.

Ein P-Anti-Ceva-Viereck und das Diagonalendreiseit EVF des Vierecks haben einen gemeinsamen Berührkegelschnitt mit der Gleichung

$$k_P: \quad v^4(rx+pz)^2 - 4qy(pv^2w^2x - qw^2u^2y + ru^2v^2z = 0$$

und dem Zentrum

$$Z_P(2qu^2 + pv^2 : (p-r)v^2 : -2qw^2 - rv^2)\ .$$

Die Tripolare des Punktes P bzgl. des Diagonaldreiecks schneidet die Basisgerade UW im Berührpunkt. Die Polare des Punktes P bzgl. des Außen-Kegelschnitts k_a (Satz 3) ist auch Polare des Diagonalenschnitts V des Vierecks bzgl. k_P.
Entsprechend der „*ABCD*-conjugation“ als Punktabbildung bzgl. des Diagonaldreiecks (Satz 5) kann auch eine „*abcd*-conjugation“ als Geradenabbildung bzgl. des Diagonalendreiseits aufgezeigt werden, indem man zu einer Geraden - immer auf das Diagonalendreiseit bezogen - den Tripol betrachtet, diesen einer „isoconjugation“ mit Fixpunkten in den Tripolen der Vierecksseiten unterwirft und zu dem Bildpunkt wieder die Tripolare aufsucht. Diese Geradenabbildung mit der Zuordnung

$$q(a:b:g) \quad \to \quad q^\wedge: \quad v^2abx + (u^2a^2 - w^2g^2)y - v^2bgz = 0$$

bildet die Seitengeraden des Vierecks auf sich ab und ordnet den Büschelgeraden des Punktes P Tangenten des Kegelschnitts k_P zu. – Anschaulicher gesprochen ordnet diese Abbildung einer Geraden q die Gerade der Pole von q bzgl. der Berührkegelschnitte des Vierecks zu.

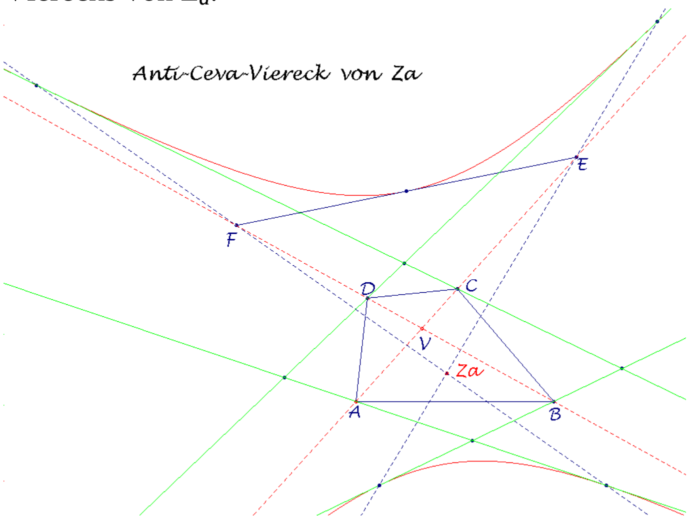
> **Satz 6. Der Kegelschnitt k_P eines P-Anti-Ceva-Vierecks ist die Einhüllende der Bildgeraden des Geradenbüschels von P bei der „*abcd*-conjugation“**

des Diagonalendreiseits, die die Seitengeraden des Vierecks fix lässt.

Als Beispiel sei der Kegelschnitt zu dem Zentrum Z_a des Außen-Kegelschnitts (Satz 3) betrachtet: Aus der Gleichung

$$k_{Za}: \quad (u^2z+w^2x)^2+u^2w^2y(2x+y+2z)=0$$

ergibt sich der Diagonalenschnitt V als Zentrum. Die Schenkelgeraden VE und VF des Diagonalendreiseits sind die Asymptoten; der Berührpunkt mit der Basis EF fällt in die Basismitte. Die Verbindungsgeraden Z_aE und Z_aF enthalten die Berührpunkte des Kegelschnitts und der Seiten des Anti-Ceva-Vierecks von Z_a.



Perspektivitäten von Ceva- und Anti-Ceva-Viereck

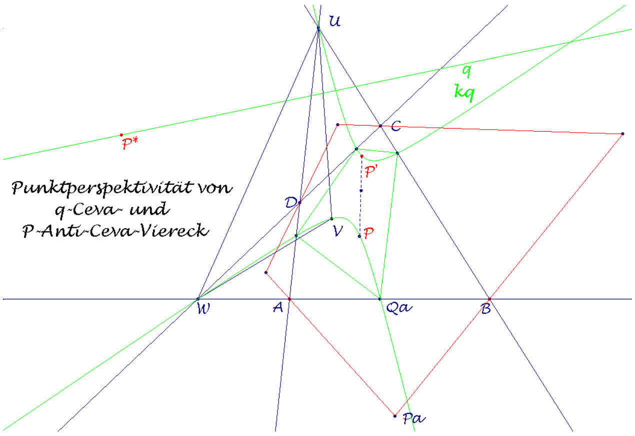
Tripol und Tripolare sind beim Dreieck Perspektivzentrum und Perspektivachse von Ceva- bzw. Anti-Ceva-Dreieck und Bezugsdreieck. In diesem Abschnitt seien Perspektivitäten zwischen Ceva- und Anti-Ceva-Vierecken untersucht.
Anhand der Berechnungsgrundlagen zu den Sätzen 2 und 3 bestätigt man unmittelbar den folgenden Satz:

Satz 7. Ceva- und Anti-Ceva-Viereck zu Polare und Pol bzgl. des Außen-Kegelschnitts k_a sind punktperspektiv zum Diagonalenschnitt V des Vierecks. − Ceva- und Anti-Ceva-Viereck zu Polare und Pol bzgl. des Innen-Kegelschnitts k_i sind achsenperspektiv zur Basis *UW* des Diagonaldreiecks.

Als Beispiel lassen sich Pol-Viereck (als Anti-Ceva-Viereck von *V*) und das Polaren-Viereck (als Ceva-Viereck von *UW*) anführen: Da das Diagonaldreieck *UVW* selbstpolar zu Innen- und Außen-Kegelschnitt ist, sind die beiden Vierecke sowohl punkt -als auch achsenperspektiv.

Mit den Berechnungsgrundlagen zu Satz 5 und Satz 6 ergibt sich ein weiterer Satz:

Satz 8. **Ein q-Ceva-Viereck und ein P-Anti-Ceva-Viereck liegen punktperspektiv, wenn P Punkt des Kegelschnitts k_q ist, und achsenperspektiv, wenn q Tangente an den Kegelschnitt k_P ist.**



Bei Punktperspektivität eines q-Ceva-Vierecks und eines P-Anti-Ceva-Vierecks liegen nicht nur der Punkt P sondern auch das Perspektivzentrum $P´$ auf dem Kegelschnitt k_q. Die Sehnen $PP´$ haben zu fester Geraden q einen gemeinsamen Punkt

$$(u^2a : -v^2b : w^2g)\ ,$$

den Pol von q bzgl. des Innen-Kegelschnitts k_i.

Bei Achsenperspektivität eines q-Ceva-Vierecks und eines P-Anti-Ceva-Vierecks sind nicht nur die Gerade q sondern auch die Perspektivachse $q´$ Tangenten an den Kegelschnitt k_P. Die Schnitte von q und $q´$ liegen zu festem Punkt P auf einer Geraden mit der Gleichung

$$v^2w^2px - 2u^2w^2qy + u^2v^2rz = 0\ ;$$

dies ist die Polare von P bzgl. des Außen-Kegelschnitts k_a.

Satz 8 kann auch in der folgenden Form ausgesprochen werden:

Satz 9. **Ein q-Ceva-Viereck und ein P-Anti-Ceva-Viereck liegen punktperspektiv, wenn q Gerade eines Büschels des Punktes $P*$ ist, und achsenperspektiv, wenn P ein Punkt der Geraden q^ ist.**

Anmerkung: Betrachtet man zu einem Punkt P die Polare p zu dem zugehörigen Kegelschnitt k_P und zu dieser Polaren p den zugehörigen Kegelschnitt k_p, so enthält dieser wieder den Punkt P. Damit ist das Anti-Ceva-Viereck von P punktperspektiv zu dem Ceva-Viereck von p. – Entsprechende Aussagen lassen sich ausgehend von einer Geraden q machen.

Zu jedem P-Anti-Ceva-Viereck gibt es zwei Ceva-Vierecke zu den Geraden $P*U$ und $P*W$ in punkt- und achsenperspektiver Lage. Zu jedem q-Ceva-Viereck gibt es zwei Anti-Ceva-

Vierecke in punkt- und achsenperspektiver Lage; die zugehörigen Punkte liegen auf q^ in den Schnitten mit den Schenkeln des Diagonalendreiseits.

Ortslinien

Betrachtet man zu einer Geraden q den Umkegelschnitt k_q des Diagonaldreiecks und zu den Punkten dieses Kegelschnitts die Tripolaren bzgl. des Diagonaldreiecks, so liegen diese im Büschel. Büschelpunkt ist $(u^2a : v^2b : w^2g)$, dies ist das „*ABCD*-konjugierte“ Bild des Tripols der Geraden q. – Betrachtet man entsprechend zu einem Punkt P den Berührkegelschnitt des Diagonalendreiseits und zu den Tangenten dieses Kegelschnitts die Tripole bzgl. des Diagonalendreiseits, so liegen diese auf einer Geraden mit der Gleichung

$$pr^2v^2x + q(r^2u^2 - p^2w^2)y - p^2rv^2z = 0 .$$

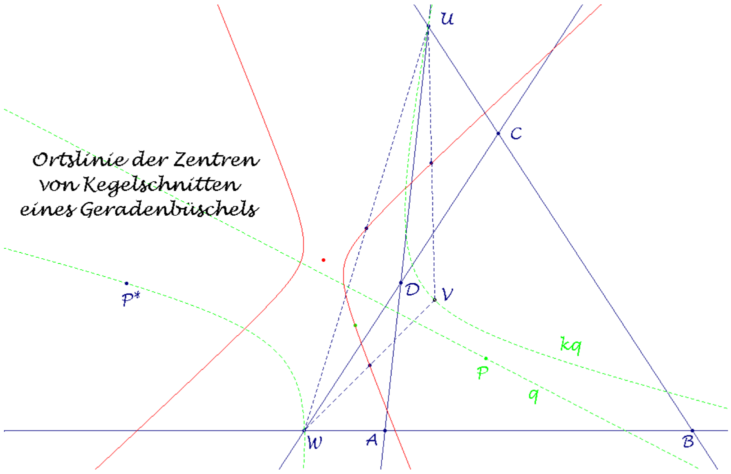
Diese Gerade ist das „*abcd*-konjugierte“ Bild der Tripolaren von P bzgl. des Diagonalendreiseits.
Diese Zusammenhänge lassen sich vierecksunabhängig einsehen, wenn man z.B. in der ersten Aussage die „*ABCD*-conjugation“ durch eine beliebige „isoconjugation“ des Diagonaldreiecks und den Umkegelschnitt k_q durch das Bild von q bei dieser Abbildung ersetzt.
Entsprechend lässt sich der abschließende Satz bestätigen: Betrachtet man zu den Geraden q des Geradenbüschels eines Punktes $P(p:q:r)$ die zugehörigen Umkegelschnitte k_q des Diagonaldreiecks, so enthalten diese Umkegelschnitte alle den Bildpunkt P^* von P bei der „*ABCD*-conjugation“, d.h. ihre Zentren liegen auf dem Mittenkegelschnitt der Punkte U, V, W, P^* mit der Gleichung

$$pv^2w^2x^2 + qw^2u^2y^2 + ru^2v^2z^2$$
$$- u^2(rv^2 + qw^2)yz - v^2(pw^2 + ru^2)zx - w^2(qu^2 + pv^2)xy = 0 \quad .$$

> **Satz 10.** **Die Zentren der Umkegelschnitte des Diagonaldreiecks zu Geraden des Büschels eines Punktes *P* liegen auf einem Umkegelschnitt des Seitenmittendreiecks durch den Punkt *P*.***
>
> **Die Zentren der Berührkegelschnitte des Diagonalendreiseits zu Punkten einer Geraden *q* liegen auf der Newton-Geraden des Vierseits aus den Seitengeraden des Diagonalendreiseits und *q*^.**

Der zweite Teil des Satzes folgt unmittelbar daraus, dass die Bildgerade q^ bei der „*abcd*-conjugation“ Tangente an jeden Kegelschnitt k_P zu Punkten P auf q ist. Diese Newton-Gerade hat die Gleichung

$$(2aw^2 - bv^2 + 2gw^2)x - (2au^2 - bv^2 + 2gw^2)y$$
$$+ (2au^2 - bv^2 + 2gu^2)y = 0 \; .$$



Literatur

[1] Weisstein, Eric W. "…". From MathWorld – A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/....html.

[2] B. Gibert, Cubics in the Triangle Plane. http://perso.wanadoo.fr./bernard.gibert/

[3] E. Schmidt: Pol-Polaren-Beziehung am Dreieck. – http://eckartschmidt.de.

[4] J.-P. Ehrmann: Steiner´s Theorems on the Complete Quadrilateral. – Forum Geometricorum, Volume 4 (2004) 35-52.

[5] E. Schmidt: Ceva-Dreiecke und Ceva-Vierecke. – http://eckartschmidt.de.

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de