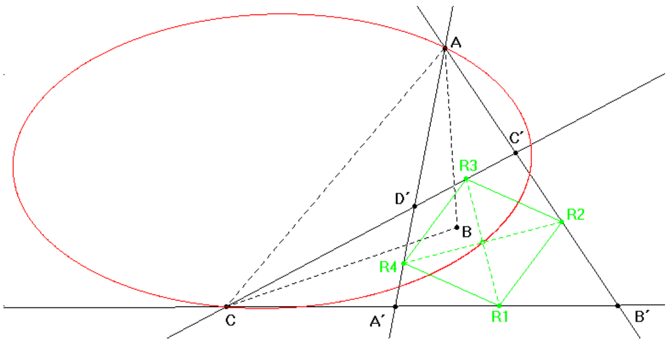
Rauten-Mitten-Kegelschnitte
zu vier Geraden

Eckart Schmidt

1. Vorbemerkungen

Zu vier Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 werden Rauten $R_1R_2R_3R_4$ betrachtet, deren Ecken entsprechend der Indizierung auf den vorgegebenen Geraden liegen. In [1] wird die Frage nach den Ortslinien der Rauten-Mitten gestellt, die nach [2] auf Kegelschnitten liegen. Diese Kegelschnitte werden hier – die Ergebnisse aus [2] ergänzend – mit baryzentrischen Koordinaten eines geeigneten Bezugsdreiecks weiter untersucht und ein Entscheidungskriterium angegeben, wann der Kegelschnitt eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist.



Vorerst sei vorausgesetzt, dass keine drei Geraden kopunktal und keine zwei Geraden parallel sind. Der Fall paralleler Geradenpaare wird in [2] behandelt. Die Geraden seien hier Seitengeraden eines Vierecks A´B´C´D´. Das Diagonaldreieck ABC – bestehend aus den Schnittpunkten A und C der Gegenseitenpaare sowie dem Diagonalenschnitt B – wird das Bezugsdreieck für baryzentrische Koordinaten:

$$A(1:0:0)\ ,\ B(0:1:0)\ ,\ C(0:0:1)\,.$$

Hat D´ das Koordinatentripel (u:v:w), so erhält man für A´, B´, C´, die das Anti-Ceva-Dreieck von D´ bzgl. ABC bilden:

$$A'(-u:v:w)\ ,\ B'(u:-v:w)\ ,\ C'(u:v:-w)\,.$$

Die Verbindungsstrecke $\overline{AC} = b$ der Gegenseitenschnittpunkte sei als Basis des Diagonaldreiecks bezeichnet.

2. Der Rauten-Mitten-Kegelschnitt

In [1] wird eine Konstruktion der Rauten $R_1R_2R_3R_4$ beschrieben, deren Ecken auf den Geraden A´B´, B´C´, C´D´, D´A´ liegen: p und q seien zwei beliebig vorgegebene zueinander senkrechte Geraden, die nicht durch A bzw. C gehen. p schneide die Gegenseitengeraden D´A´ und B´C´ in zwei Punkten mit dem Mittelpunkt P; entsprechend schneide q die Geraden A´B´ und

C´D´ mit dem Mittelpunkt Q. Der Schnittpunkt der Geraden AP und CQ ist die Mitte einer Raute mit den Diagonalengeraden p und q. Folgt man dieser Konstruktion mit baryzentrischen Koordinaten, so erhält man für die Rauten-Mitten $X(x:y:z)$ die Gleichung

$$(a^2+b^2-c^2)v^2w^2xy-(a^2-b^2+c^2)v^4xz+(-a^2+b^2+c^2)u^2v^2yz$$
$$+\ 2b^2u^2w^2y^2 = 0\ .$$

Benutzt man die Conway-Abkürzungen S_A, S_B, S_C mit

$$2S_A = (-a^2+b^2+c^2) = 4\Delta\cot\alpha\ , \ldots$$

$$\text{und } S=\sqrt{S_AS_B+S_BS_C+S_CS_A}=2\Delta\ ,$$

wobei Δ die Dreiecksfläche ist, so vereinfacht sich die Gleichung zu

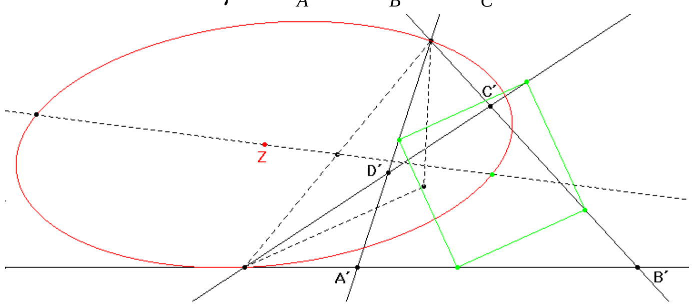
$$S_Cv^2w^2xy-S_Bv^4xz+S_Au^2v^2yz+2(S_A+S_C)u^2w^2y^2=0\ .$$

Dies ist die Gleichung eines Kegelschnitts durch die Endpunkte A und C der Basis; in diesen Punkten entartet die Raute.
Der Rauten-Mitten-Kegelschnitt enthält zwei Punkte, deren Raute ein Quadrat ist:

$$Q_{1,2}(S_Au^2\pm Suw : S_Bv^2 : S_Cw^2\pm Suw)\ .$$

Diese Punkte sind die Endpunkte eines Durchmessers des Kegelschnitts, konjugiert zu der Basis des Diagonaldreiecks. Das Zentrum des Kegelschnitts ist

$$Z(u^2(S_A\mu-2S^2w^2) : v^2S_B\mu : w^2(S_C\mu-2S^2u^2))$$
$$\text{mit}\quad \mu=S_Au^2+S_Bv^2+S_Cw^2\ .$$



Nach diesen allgemeinen Bemerkungen lassen sich Sonderfälle betrachten.

3. Sehnenvierecke

Für Sehnenvierecke A´B´C´D´ liegt die Umkreismitte im Höhenschnitt

$$H(S_BS_C : S_CS_A : S_AS_B)$$

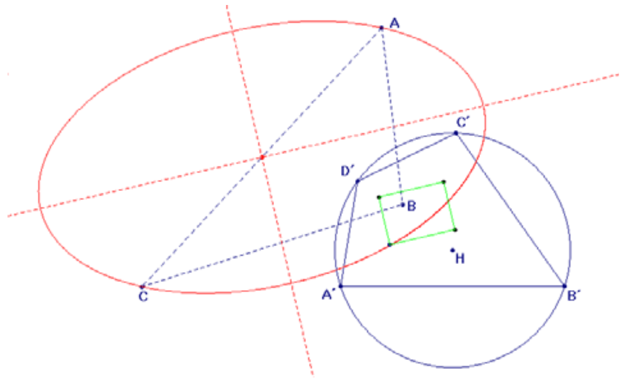
des Diagonaldreiecks; der Radius beträgt

$$\frac{\sqrt{-S_AS_BS_C}}{S}\ .$$

Auf diesem Umkreis liegen auch die Berührpunkte der Tangenten von H an den Basis-Thales-Kreis.
Die Gleichung dieses Umkreises

$$S_Au^2+S_Bv^2+S_Cw^2=0$$

lässt unmittelbar erkennen, dass das Zentrum des Rauten-Mitten-Kegelschnitts in die Basismitte fällt. Die Achsen verlaufen übrigens parallel zu den Seiten des Inkreis-Mitten-Rechtecks, bestehend aus den Inkreismitten der Teildreiecke A´B´C´, B´C´D´, C´D´A´, D´A´B´ des Sehnenvierecks.



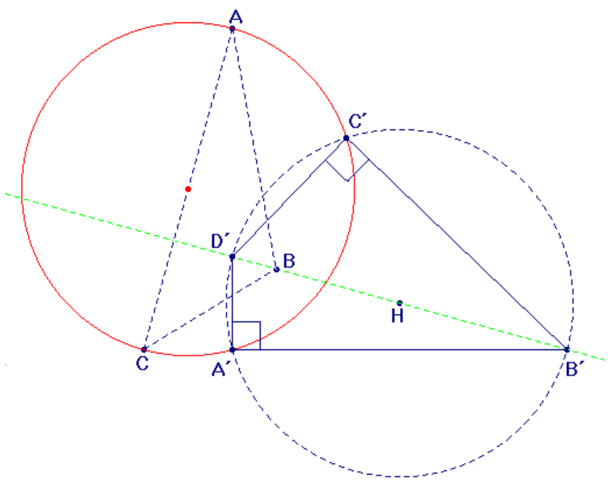
Ist D´B´ ein Umkreis-Durchmesser des Sehnenvierecks, dies ist der Fall für

$$D´(\sqrt{-S_B S_C{}^2} : \sqrt{S_A S_C (S_A + S_C)} : \sqrt{-S_B S_A{}^2}),$$

so entartet der Rauten-Mitten-Kegelschnitt zu einem Kreis, dem Thales-Kreis über der Basis mit der Gleichung

$$(S_A x - S_B y + S_C z) y + (S_A + S_C) z x = 0 .$$

Damit ist der Rauten-Mitten-Kegelschnitt eines Vierecks mit einem Paar rechter Gegenwinkel der Basis-Thales-Kreis.



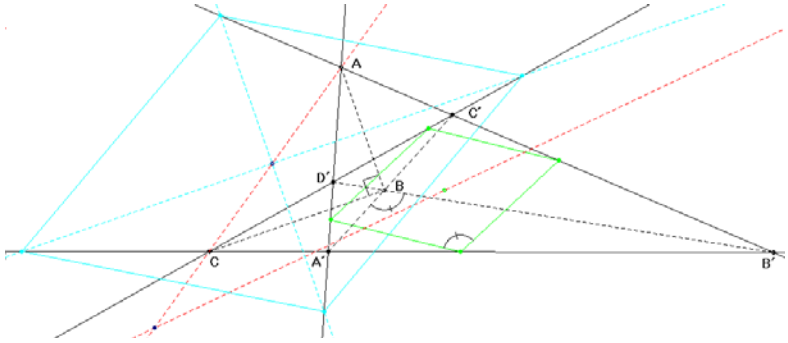
4. Die Rauten-Mitten-Geraden

Die Gleichung des Rauten-Mitten-Kegelschnitts lässt sich linear faktorisieren, wenn

$$S_B = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) = 0$$

ist. Damit entartet der Rauten-Mitten-Kegelschnitt zu zwei Geraden, wenn das Diagonaldreieck bei B rechtwinklig ist. Dieser Fall wird in [2] konkret angesprochen. Die Gleichungen dieser Geraden lauten

$$y = 0 \qquad \text{und} \quad S_C v^2 w^2 x + (S_A + S_C) u^2 w^2 y + S_A u^2 v^2 z = 0 .$$



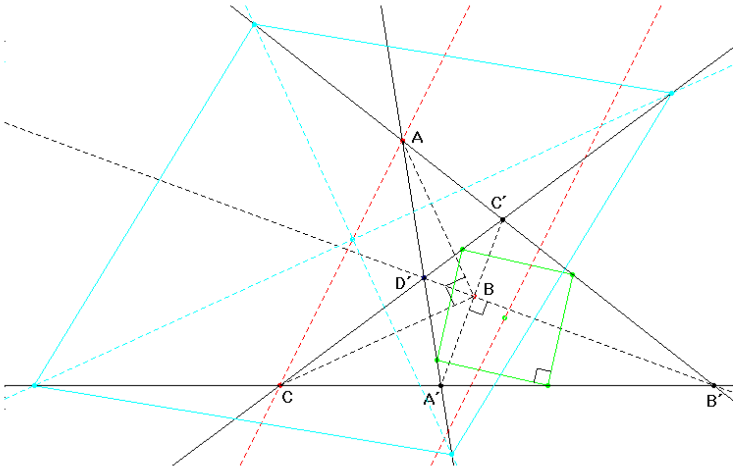
Die erste Gerade ist die Basisgerade des rechtwinkligen Diagonaldreiecks; auf ihr liegen auch die beiden Quadratmitten. Alle Rauten, deren Mitten auf dieser Geraden liegen, haben gleiche Diagonalenrichtungen. Dies sind die Kathetenrichtungen des Diagonaldreiecks.

Rauten, deren Mitten auf der zweiten Geraden liegen, haben konstante Innenwinkel: die Diagonalen-Schnittwinkel des Vierecks.

Vierecke mit rechtwinkligem Diagonaldreieck haben spezielle geometrische Eigenschaften. So gilt z.B. für die Abstände der Ecken von dem Diagonalenschnittpunkt B:

$$\frac{A'B \cdot C'B}{B'B \cdot D'B} = \frac{A'C'}{B'D'} = \frac{\sin\beta' \sin\delta'}{\sin\alpha' \sin\gamma'}$$

$$\text{oder} \quad \frac{1}{A'B} - \frac{1}{B'B} + \frac{1}{C'B} - \frac{1}{D'B} = 0 .$$



Interessant ist der Sonderfall, wenn der Punkt D´ auf der Winkelhalbierenden des rechten Winkels des Diagonaldreiecks liegt. In diesem Fall ist die zweite Rauten-Mitten-Gerade parallel zur Basisgeraden. Für die Basismitte entartet die zugehörige Raute zu einem Quadrat. Die Rauten zu den Mitten auf der zweiten Geraden sind alles Quadrate.

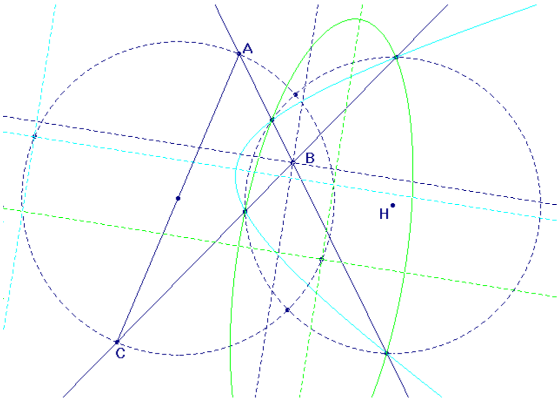
Ist D´ die Inkreismitte des rechtwinkligen Diagonaldreiecks, besteht das Viereck aus den In- und Ankreismitten des Diagonaldreiecks. Für diesen Fall eines orthozentrischen Vierecks wird die zweite Gerade zur Ferngeraden.

5. Die Rauten-Mitten-Parabeln

Der Rauten-Mitten-Kegelschnitt entartet zu einer Parabel, wenn sein Zentrum ein Fernpunkt ist. Dazu muss die Summe der baryzentrischen Koordinaten Null ergeben. Dies ist der Fall für

$$(S_A u^2 + S_B v^2 + S_C w^2 - 2Suw) = 0$$

$$\text{oder } (S_A u^2 + S_B v^2 + S_C w^2 + 2Suw) = 0 .$$



Dies sind die Gleichungen zweier Kegelschnitte, deren Zentren

$$(\pm S - S_C : S_A + S_C : \pm S - S_A) ,$$

auf dem Basis-Thales-Kreis diametral senkrecht zur Basis liegen. Die Achsen verlaufen parallel zu den Winkelhalbierenden des Dioagonalenschnittwinkels β.

Für einen stumpfen Winkel β ($S_B < 0$) schneiden sich die beiden Kegelschnitte in den Punkten

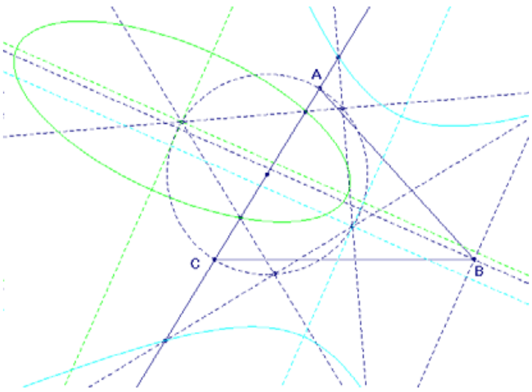
$$(\sqrt{-S_B} : \pm\sqrt{S_A} : 0) \text{ und } (0 : \pm\sqrt{S_C} : \sqrt{-S_B}) ,$$

die nicht nur auf den Schenkelgeraden des Diagonaldreiecks liegen, sondern auch auf dem Kreis um H durch die Berührpunkte seiner Tangenten an den Basis-Thales-Kreis.

Für einen spitzen Winkel β ($S_B > 0$) sind die Schnittpunkte der Kegelschnitte mit der Basisgeraden

$$(S_C : 0 : S \pm \sqrt{S_B(S_A + S_B)}) \text{ und } (S_C : 0 : -S \pm \sqrt{S_B(S_A + S_B)}) .$$

Man erhält diese Punkte konstruktiv, wenn man von B die Tangenten an den Basis-Thales-Kreis zeichnet, die Berührpunkte mit den Zentren verbindet und die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Basis betrachtet.



Wählt man den Punkt $D'(u : v : w)$ auf einem der beiden Kegelschnitte, so liegt der Gegenpunkt B´ auf dem gleichen

Kegelschnitt, während A´ und C´ auf dem anderen Kegelschnitt liegen: Der zugehörige Rauten-Mitten-Kegelschnitt ist dann eine Parabel. Die beiden Kegelschnitte begrenzen innerhalb des Diagonaldreiecks die Gebiete, in denen eine Wahl von D´ zu einer Ellipse oder einer Hyperbel führt.
Für welche Vierecke tritt nun der Parabelfall ein? Eine Auswertung der obigen Gleichungen ergibt die folgende kennzeichnende Bedingung

$$\left|\sin(\alpha'+\gamma')\right| = \left|\sin(\alpha'+\beta')\sin(\beta'+\gamma')\right|$$

für die Innenwinkel des Vierecks (vgl. 6).

6. Zusammenfassung

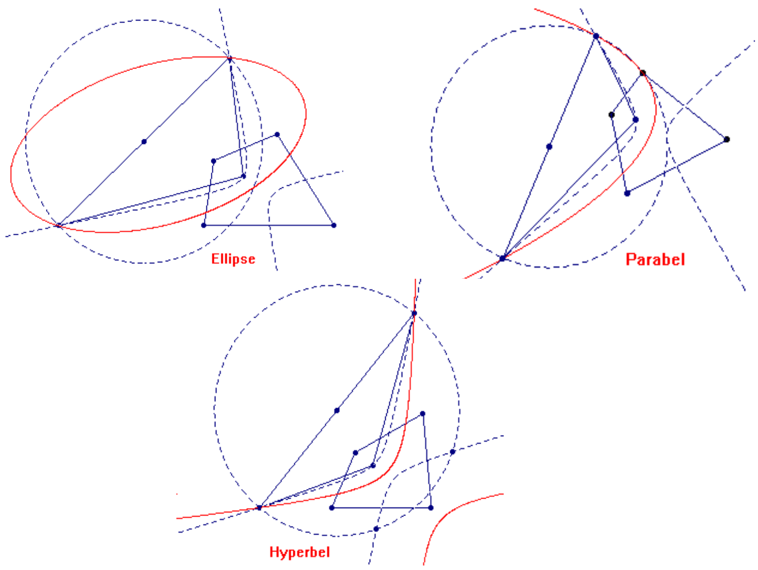
Die vier vorgegebenen Geraden seien die Seitengeraden eines Vierecks A´B´C´D´ mit dem Diagonaldreieck ABC. Zu diesem Bezugsdreieck betrachte man die Konjugation ω, die die Ecken des Vierecks A´B´C´D´ fix lässt:

$$(x : y : z) \to (u^2 yz : v^2 zx : w^2 xy)\,.$$

Diese Konjugation bildet den Basis-Thaleskreis auf den Rauten-Mitten-Kegelschnitt ab. Die Seitengeraden des Vierecks sind Fixgeraden. Die von A und C verschiedenen Schnittunkte einer Seitengeraden mit dem Thales-Kreis und dem Kegelschnitt werden durch ω vertauscht; sie liegen harmonisch zu den Endpunkten der entsprechenden Seite.
Diese Konjugation bildet weiterhin die Ferngerade auf den Mitten-Kegelschnitt von A´B´C´D´ ab. Der Mitten-Kegelschnitt ist die Ortslinie aller Zentren von Kegelschnitten durch A´, B´, C´, D´ mit der Gleichung

$$u^2 yz + v^2 zx + w^2 xy = 0\,.$$

Die ω-Bilder der Fernpunkte der Rauten-Mitten-Kegelschnitte sind also Schnittpunkte des Basis-Thales-Kreises und des Mitten-Kegelschnitts.

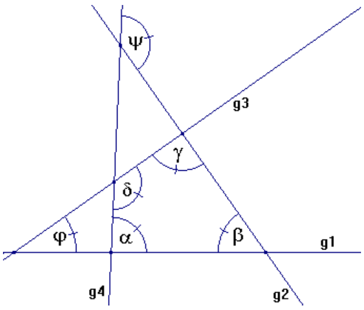


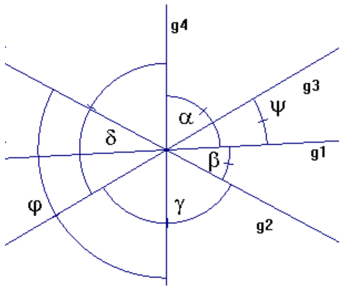
Kriterium: Der Rauten-Mitten-Kegelschnitt eines Vierecks ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem der Basis-Thales-Kreis des Diagonaldreiecks mit dem Mitten-Kegelschnitt des Vierecks neben den Gegenseitenschnittpunkten keinen, genau einen oder zwei weitere gemeinsame Punkte hat.

Um sich von der geometrisch unanschaulichen Beschreibung durch baryzentrische Koordinaten zu lösen, seien die Fernpunkte der Rauten-Mitten-Kegelschnitte näher untersucht; sie haben folgende Darstellung

$$(2S_A u^2 - \mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4S^2u^2w^2} : 2S_B v^2 : 2S_C w^2 - \mu \mp \sqrt{\mu^2 - 4S^2u^2w^2})$$

$$\text{mit} \quad \mu = S_A u^2 + S_B v^2 + S_C w^2 .$$





Benutzt werden die Winkel des Vierecks A´B´C´D´ als orientierte Schnittwinkel

$$\alpha' = \angle(g_1, g_4), \quad \beta' = \angle(g_2, g_1), \quad \gamma' = \angle(g_3, g_2), \quad \delta' = \angle(g_4, g_3) .$$

Wählt man g_4 als Bezugsgerade, so schneiden g_1, g_2, g_3 diese Gerade unter den Winkeln α', $\alpha' + \beta'$, $180° - \delta'$. Für die Schnittwinkel $\kappa_{1,2}$ der Geraden durch die Fernpunkte gilt nach einer aufwendigen, hier unterdrückten Auswertung

$$\cot \kappa_{1,2} = \cot \kappa \pm \sqrt{R}$$

$$\text{mit } \cot \kappa = \cot(\alpha' + \beta') + \frac{\cos(\alpha' + \delta')}{\sin(\alpha' - \delta')}$$

$$\text{und } R = \frac{\sin^2(\alpha' + \gamma') - \sin^2(\alpha' + \beta')\sin^2(\alpha' + \delta')}{\sin^2(\alpha' + \beta')\sin^2(\alpha' - \delta')} .$$

Bezeichnet man die Schnittwinkel der Gegenseitengeraden mit

$$\varphi = \alpha' + \beta' = \angle(g_2, g_4) \text{ und } \psi = 180° - \beta' - \gamma' = \angle(g_1, g_3)$$

und die Gegenwinkelsumme des Vierecks mit

$$\sigma = \alpha' + \gamma' = \angle(g_1, g_4) + \angle(g_3, g_2) = -\beta' - \delta' ,$$

so gilt

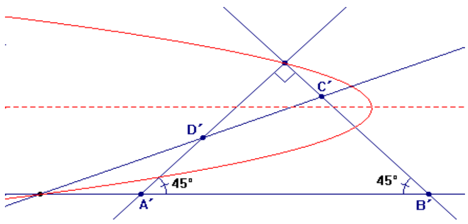
$$\cot \kappa = \cot(\varphi) - \frac{\cos(\psi)}{\sin(\varphi + \sigma)}$$

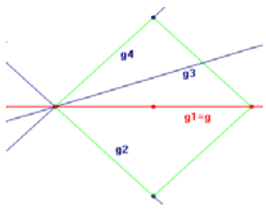
$$\text{und } R = \frac{\sin^2 \sigma - \sin^2 \varphi \sin^2 \psi}{\sin^2 \varphi \sin^2(\varphi + \sigma)} .$$

Ist $R<0$, d.h. $|\sin\sigma| < |\sin\varphi \sin\psi|$, so ist der Rauten-Mitten-Kegelschnitt eine Ellipse.

Ist R=0, d.h. $|\sin\sigma| = |\sin\varphi \sin\psi|$, so ist der Rauten-Mitten-Kegelschnitt – wie oben schon angesprochen – eine Parabel, deren Achse die Gerade g_4 unter dem Winkel κ schneidet.
Ist R>0, d.h. $|\sin\sigma| > |\sin\varphi \sin\psi|$, so ist der Rauten-Mitten-Kegelschnitt eine Hyperbel, deren Asymptoten die Gerade g_4 unter den Winkeln $\kappa_{1,2}$ schneiden.
Es zeigt sich, dass die Richtungen zu den Fernpunkten nur von den Schnittwinkeln der Geraden abhängen, so dass sich die Ergebnisse auch für kopunktale Geraden auswerten lassen.

Ein Beispiel: Ist $\alpha=\beta=45°$, somit $\varphi=90°$ und $\psi=180°-\sigma$, so tritt der Parabelfall ein – unabhängig von der Wahl von γ. Die Parabelachse schneidet die Gerade g_4 unter dem Winkel von 45° und ist somit parallel zu g_1. Im Falle kopunktaler Geraden fällt die Rauten-Mitten-Gerade mit g_1 zusammen. Die Rauten sind Quadrate, deren eine Ecke im gemeinsamen Schnittpunkt der Geraden liegt. Die Richtung von g_3 spielt hier keine Rolle.





Abschließend sei – leider ohne Beweis – mitgeteilt, dass alle Vierecke mit Seiten parallel zu vier vorgegebenen Richtungen Rauten-Mitten-Kegelschnitte mit parallelen Achsen und konstantem Achsenverhältnis haben.

7. Kopunktale Geraden

Betrachtet man Konstellationen zu der behandelten Fragestellung „aus hinreichender Ferne“, so scheinen die vier Geraden in einem Zentrum kopunktal zu sein. Ist der Rauten-Mitten-Kegelschnitt eine Ellipse, so „verschwindet“ sie im Zentrum; eine Parabel wird zu einer Geraden und eine Hyperbel zu einem Geradenpaar durch das Zentrum.
Die obigen Ergebnisse lassen sich verallgemeinern: Der Rauten-Mitten-Kegelschnitt entartet für vier verschiedene kopunktale Geraden entweder im Zentrum, in einer Geraden oder einem Geradenpaar, je nachdem R<0, R=0 oder R>0 ist. Die Geradenrichtungen ergeben sich aus den Winkeln κ bzw. $\kappa_{1,2}$ zur Geraden g_4. Dabei gilt für den Winkel zwischen den Rauten-Mitten-Geraden

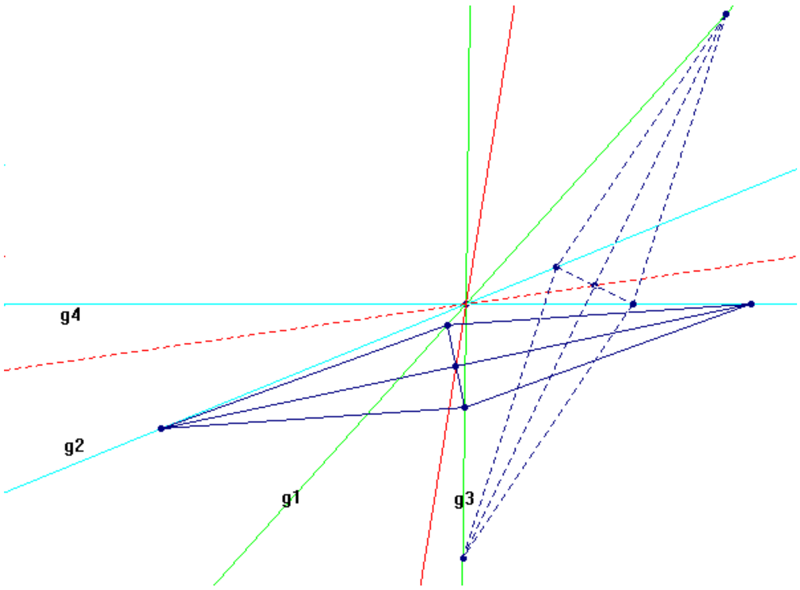
$$\cot(\kappa_1 - \kappa_2) = \frac{\cos\sigma - \cos\varphi\cos\psi}{\sqrt{\sin^2\sigma - \sin^2\varphi\sin^2\psi}} \, .$$

Greift man die Ergebnisse aus [2] auf, so liefern die vierten harmonischen Richtungen zu den Richtungen der

Gegengeradenpaare und einer Rauten-Mitten-Geraden die orthogonalen Richtungen der zugehörigen Rautendiagonalen. Betrachtet man zu einer Rauten-Mitten-Geraden mit dem Schnittwinkel κ_i die vierte harmonische Richtung z.B. bzgl. des Gegengeradenpaares (g_2,g_4), so gilt für den Schnittwinkel ω_i der zugehörigen Rautendiagonale

$$\cot\omega_{1,2} = \cot\kappa_{2,1} + \frac{2\cos\psi}{\sin(\varphi+\sigma)} .$$

Daraus lässt sich aber leider keine einfache Konstruktionsmöglichkeit für die Rautendiagonalen ablesen, so dass die zweite Frage in [1] unbeantwortet bleibt. Mit einem Konstruktionsprogramm kann man den obigen Ausführungen dagegen durchaus folgen. Dabei zeigt sich, dass die Rauten zu beiden Rauten-Mitten-Geraden ähnlich sind. Dies wird verständlich, wenn man zu den vier Geradenrichtungen ein Viereck mit rechtwinkligem Diagonaldreieck betrachtet und die Ergebnisse aus 4 berücksichtigt.



Literatur

[1] Charlotte Thum-Rung: Zur Konstruktion von „einbeschriebenen“ Rauten. – PM 5/46. Jg. 2004, S.199.

[2] Günter Pickert: Antwort auf zwei Fragen zu einbeschriebenen Rauten. – PM 5/46. Jg. 2004, S.200.

Eckart Schmidt - Hasenberg 27 - D 24223 Raisdorf
http://eckart_schmidt.bei.t-online.de
eckart_schmidt@t-online.de