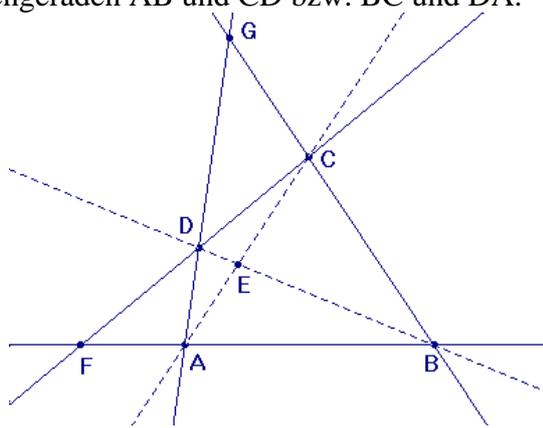


Vierecksbezogene Inversionen

Eckart Schmidt

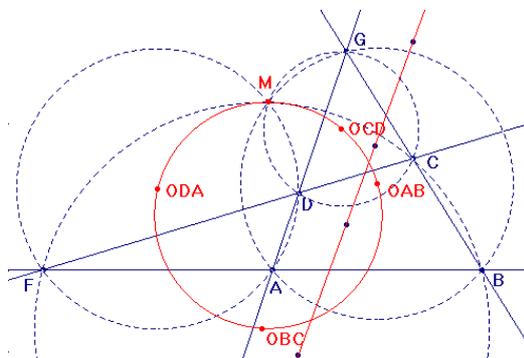
Betrachtet werden Vierecke $ABCD$ mit einem Diagonalschnitt E und den Schnittpunkten F und G der Gegenseitengeraden AB und CD bzw. BC und DA .



Diese Ausarbeitung hinterfragt eine Inversion, die Gegenecken des Vierecks vertauscht. Dabei spielt der Miquel-Punkt (auch Clifford- oder Steiner-Punkt) des vollständigen Vierseits aus den Seitengeraden des Vierecks eine besondere Rolle.

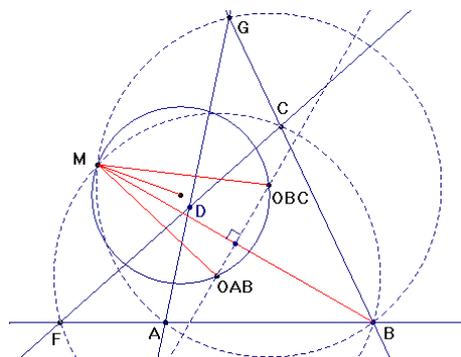
1. Der Miquel-Punkt

Betrachtet man das vollständige Vierseit aus den Seitengeraden des Vierecks $ABCD$, so schneiden sich die Umkreise der Teildreiecke ABG , BCF , CDG , DAF in einem Punkt, dem Miquel-Punkt M . Die Umkreismitten O_{AB} , O_{BC} , O_{CD} , O_{DA} dieser Teildreiecke liegen mit dem Miquel-Punkt konzyklisch auf einem Kreis, hier als Miquel-Kreis [3] angesprochen (in [1] circumcentric circle). Weiterhin liegen die Höhenschnitte der Teildreiecke kollinear auf einer Geraden (in [1] und [3] orthocentric line). Diese Ergebnisse gehen auf Steiner (1827) zurück.



Anmerkung: Offensichtlich geht die Mittelsenkrechte von \overline{MB} durch die Umkreismitten O_{AB} und O_{BC} . Da in jedem Dreieck das Produkt zweier Seiten gleich dem Produkt aus dem

Umkreisdurchmesser und der Höhe auf der dritten Seite ist, folgt für das Dreieck $O_{AB}MO_{BC}$



$$r_{AB} \cdot r_{BC} = 2\rho \cdot \frac{|MB|}{2} = \rho \cdot |MB|,$$

wobei ρ der Radius des Miquel-Kreises ist. Entsprechend folgt

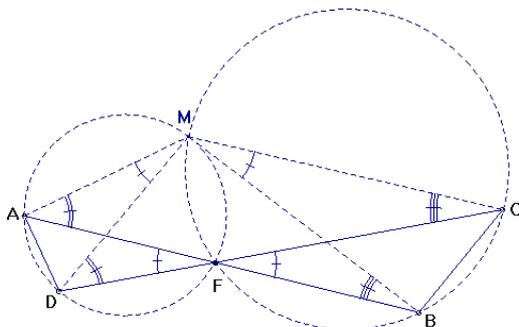
$$r_{CD} \cdot r_{DA} = \rho \cdot |MD|$$

und damit verallgemeinernd

$$|MA| \cdot |MC| = |MB| \cdot |MD| = |MF| \cdot |FG| = \frac{r_{AB} \cdot r_{BC} \cdot r_{CD} \cdot r_{DA}}{\rho^2}.$$

2. Die Clawson-Inversion

Betrachtet wird ein Viereck ABCD in allgemeiner Lage, d.h. keine drei Punkte liegen kollinear. Gesucht ist die Inversion – bestehend aus Kreisspiegelung und Spiegelung an einem Durchmesser -, die die Gegenecken A und C als auch B und D des Vierecks vertauscht.



Die Umkreise der Dreiecke ADF und BCF schneiden sich im Miquel-Punkt M. Mit Scheitel- und Umfangswinkelgleichheit ergibt sich

$$\angle AMD = \angle AFD = \angle BFC = \angle BMC.$$

Somit haben die Winkel $\angle AMC$ und $\angle DMB$ gleiche Winkelhalbierende. Mit der Umfangswinkelgleichheit ergibt sich weiterhin die Ähnlichkeit der Dreiecke

$$\triangle ABM \approx \triangle DCM,$$

die somit durch eine Drehstreckung aufeinander abgebildet werden können. Streckungsfaktor ist

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}, \text{ und es gilt } \overline{MA} \cdot \overline{MC} = \overline{MB} \cdot \overline{MD}.$$

Damit ist der Miquel-Punkt M des Vierecks ABCD Zentrum einer Inversion, die nicht nur die Gegenecken, sondern nach entsprechenden Überlegungen auch die Schnittpunkte F und G der Gegenseiten vertauscht.

Bei Clawson [1] finden sich zwar Kreisspiegelungen mit Zentrum im Miquel-Punkt, aber nicht die hier behandelte Inversion. Dennoch sei hier von der Clawson-Inversion σ gesprochen.

Anmerkung: Damit lässt sich einem Viereck ABCD eine Gaußsche Zahlenebene anpassen, in der die Gegenpunkte-Paare in der Form

$$\alpha, \frac{1}{\alpha} \text{ und } \beta, \frac{1}{\beta}$$

darstellbar sind, wobei α, β komplexe Zahlen sind und der Miquel-Punkt im Ursprung liegt. Die Inversion besteht dann aus der Zuordnung des reziproken Wertes.

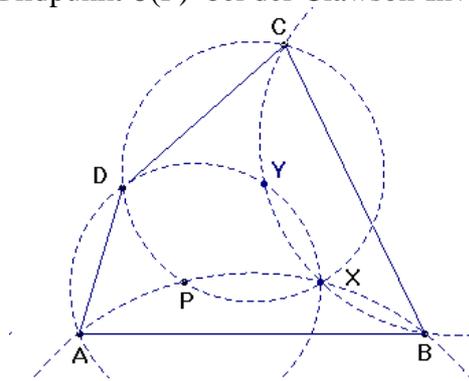
Eine Berechnung der Schnittpunkte der Gegenseiten ergibt dann

$$f = \frac{(\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta)(\bar{\alpha}\bar{\beta} - 1)}{(\bar{\alpha} - \bar{\beta})(\alpha\beta - \bar{\alpha}\bar{\beta})}$$

und für g den Kehrwert.

3. Konstruktion des Bildpunktes

Es gibt eine bemerkenswert einfache Konstruktionsmöglichkeit für den Bildpunkt bzgl. der Clawson-Inversion σ . Zeichnet man über zwei Gegenseiten des Vierecks ABCD Kreise durch den abzubildenden Punkt P, benennt den weiteren Schnittpunkt X, zeichnet über den verbleibenden Gegenseiten Kreise durch den Punkt X, dann erhält man als weiteren Schnittpunkt Y. Dieser Punkt ist der Bildpunkt $\sigma(P)$ bei der Clawson-Inversion.



Begründung: Betrachtet man die Inversion κ , mit dem Zentrum X, die P und Y vertauscht, so bilden die Bildpunkte $\kappa(A), \kappa(B), \kappa(C), \kappa(D)$ ein Viereck, dessen Gegenseiten sich in P und Y schneiden. Z.B. schneiden sich die Gegenseiten $\kappa(A)\kappa(B)$ und $\kappa(C)\kappa(D)$ als κ -Bilder der Kreise $k(A,B,X,P)$ und $k(C,D,X,P)$ im Punkt $\kappa(P)=Y$. Zu dem Viereck $\kappa(A)\kappa(B)\kappa(C)\kappa(D)$ gibt es eine Inversion μ , die die Gegenecken und damit auch P und Y vertauscht. Die Abbildung $\kappa\mu\kappa$ vertauscht dann A und C als

auch B und D. Sie ist eine kreiserhaltende Transformation, die offensichtlich keine Ähnlichkeit ist, und somit eindeutig als Produkt einer Kreisspiegelung und einer Bewegung darstellbar ist [2]. Damit gilt

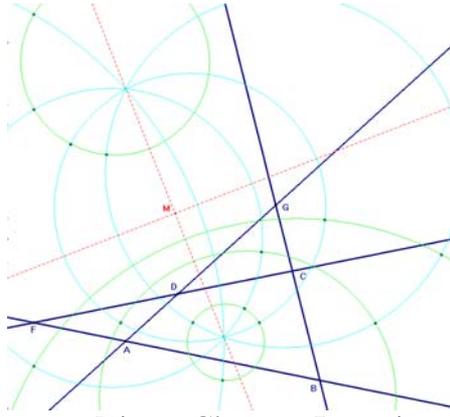
$$\kappa\mu\kappa = \sigma \text{ und somit } \sigma(P) = \kappa\mu\kappa(P) = Y.$$

4. Eigenschaften der Clawson-Inversion

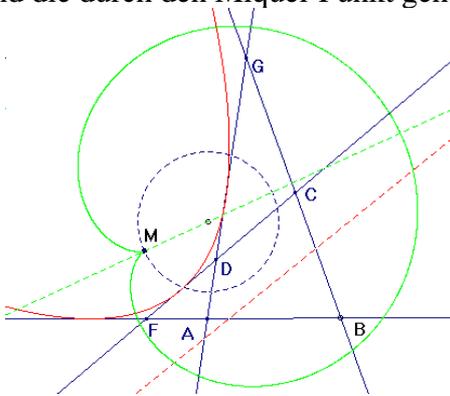
Hier seien einige Eigenschaften der Clawson-Inversion σ benannt, ohne auf einen Beweis einzugehen.

- (1) σ vertauscht die Gegenecken A und C, B und D und die Gegenseitenschnittpunkte F und G.
- (2) σ bildet die Seitengeraden AB, BC, CD, DA auf die Umkreise der Dreiecke CDG, DAF, ABG, BCF ab.
- (3) Kreise um A, B, C, D, F, G durch den Miquel-Punkt M werden durch σ auf Geraden durch zwei Umkreismitten abgebildet: z.B. wird ein Kreis um A durch M zur Verbindungsgeraden $O_{BC}O_{CD}$.
- (4) Die Umkreismitten O_{AB} , O_{BC} , O_{CD} , O_{DA} werden durch σ auf die Spiegelpunkte des Miquel-Punktes an den Vierseitgeraden CD, DA, AB, BC abgebildet.
- (5) Die Clawson-Inversion bildet den „circumcentric circle“ auf die „orthocentric line“ ab – wohl die bemerkenswerteste Eigenschaft.
- (6) Die Bildkreise der Diagonalen AC und BD schneiden sich im Miquel-Punkt und dem Tangentialpunkt T des Vierecks. Diesen von R. Stärk [5] ausführlich untersuchten merkwürdigen Punkt eines Vierecks erhält man, wenn man einen Viereckspunkt isogonal-konjugiert bzgl. des Restdreiecks abbildet und dann am Umkreis des Restdreiecks spiegelt. Sein Name wird erst vor dem Hintergrund der einem Viereck zugeordneten Zikularkurve verständlich.
- (7) σ vertauscht den Diagonalschnittpunkt E mit dem Tangentialpunkt T des Vierecks.

Anmerkung 1. Eine weitere Aussage von Steiner besagt, dass die In- und Ankreismitten der Teildreiecke ABG, BCF, CDG, DAF auf acht Kreisen liegen, die aus zwei orthogonalen Vierer-Büscheln bestehen [1] [3]. Die Symmetrieachsen sind Fixgeraden; die gemeinsamen Punkte eines Büschels die Fixpunkte von σ . Alle acht angesprochenen Kreise sind Fixkreise der Clawson-Inversion.

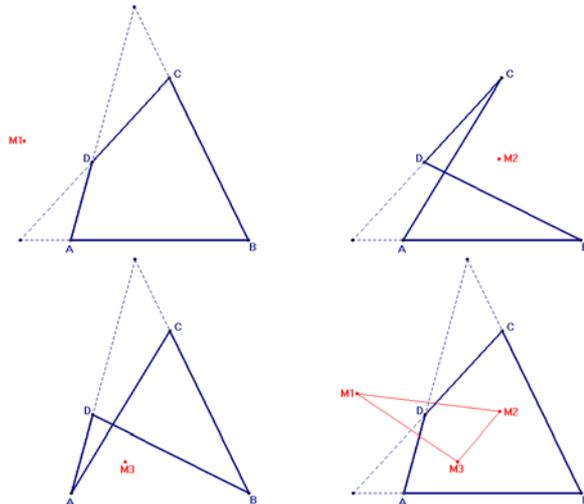


Anmerkung 2. Die Clawson-Inversion bildet die einbeschriebene Parabel des vollständigen Vierseits [3] – mit dem Brennpunkt im Miquel-Punkt und der „orthocentric line“ als Leitgerade – auf eine Kardioide ab. Diese Kardioide ist die Hüllkurve aller Kreise, deren Mittelpunkte auf dem Steiner-Kreis liegen und die durch den Miquel-Punkt gehen.



5. Weitere Inversionen

Zu vier Punkten A, B, C, D liegt es nahe, neben dem Viereck ABCD auch die Vierecke ABDC und ADCB zu betrachten. Die zugehörigen Miquel-Punkte seien $M_1=M$, M_2 , M_3 mit den Inversionen $\sigma_1=\sigma$, σ_2 , σ_3 , die wieder die Gegenecken des jeweiligen Vierecks vertauschen. Dann vertauscht die Inversion $\sigma=\sigma_1$ die Miquel-Punkte M_2 und M_3 .



Der Miquel-Punkt M_2 ist der von F verschiedene Schnittpunkt der Kreise $k(A,C,F)$ und $k(B,D,F)$. Die Inversion $\sigma=\sigma_1$ ergibt die Kreise $k(C,A,G)$ und $k(D,B,G)$, die sich in den Punkten M_3 und G schneiden. Damit ist M_3 das σ -Bild von M_2 und umgekehrt. Die Inversionen σ_2 und σ_3 bilden dann folgendermaßen ab:

σ_2 vertauscht A und D, B und C, F und E;

σ_3 vertauscht A und B, C und D, E und G.

Das Produkt von jeweils zwei Inversionen ergibt die dritte, das Produkt aller drei Inversionen ist die Identität.

6. Baryzentrische Koordinaten

Wählt man das Dreieck $M_1M_2M_3$ mit den Seitenlängen a, b, c als Bezugsdreieck für baryzentrische Koordinaten

$$M_1(1,0,0), M_2(0,1,0), M_3(0,0,1),$$

so ergibt sich für die Inversion $\sigma=\sigma_1$, die M_2 und M_3 vertauscht:

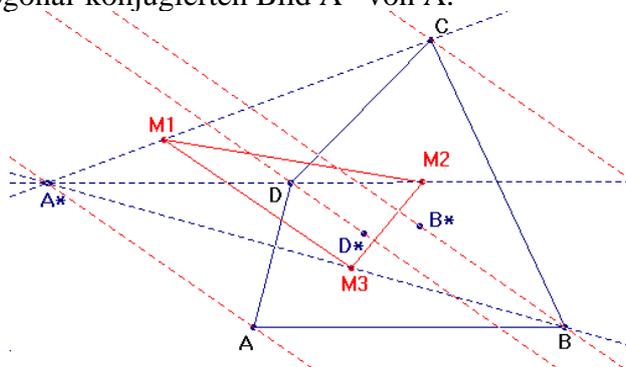
$$\sigma(x, y, z) = (-c^2xy - b^2xz - a^2yz, b^2z(x+y+z), c^2y(x+y+z)).$$

Entsprechende Darstellungen erhält man für σ_2 und σ_3 . Dabei gilt $\sigma_1(A)=C$, $\sigma_2(A)=D$, $\sigma_3(A)=B$.

Das Dreieck CDB erweist sich perspektiv zum Bezugsdreieck $M_1M_2M_3$. Für $A(u,v,w)$ ergibt sich dieses Perspektivzentrum zu

$$(a^2vw, b^2wu, c^2uv),$$

dem isogonal-konjugierten Bild A^* von A.



Entsprechend liegen die Dreiecke DCA, ABD, BAC perspektiv zu $M_1M_2M_3$ mit den Perspektivzentren B^*, C^*, D^* .

Dabei erweisen sich die Verbindungsgeraden AA^*, BB^*, CC^*, DD^* parallel mit dem gemeinsamen Fernpunkt

$$P_\infty(\alpha, \beta, \gamma) = (-c^2u^2v - b^2u^2w + a^2v^2w + a^2vw^2, \\ -c^2uv^2 + b^2u^2w - a^2v^2w + b^2uw^2, \\ c^2u^2v + c^2uv^2 - b^2uw^2 - a^2vw^2),$$

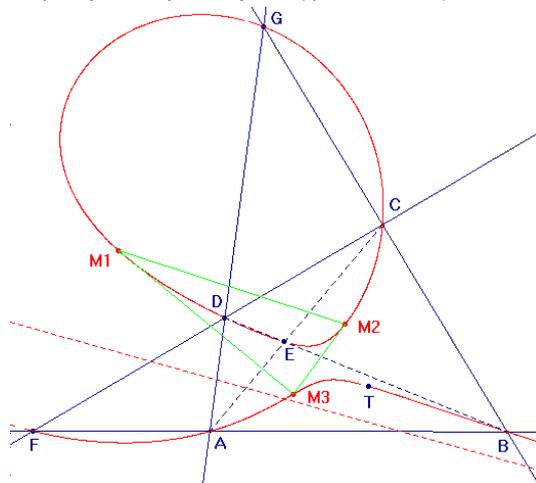
wenn u, v, w die baryzentrischen Koordinaten von A sind.

7. Zirkularkurve eines Vierecks

Zu einem Bezugsdreieck lassen sich Kurven dritter Ordnung betrachten, die durch eine dreiecksbezogene Konjugation und einen Pivot-Punkt festgelegt sind [4]. Für die isogonale Konjugation $*$ und einen Fernpunkt P_∞ als Pivot-Punkt erhält man eine Zirkularkurve. Verbindungsgeraden isogonal-

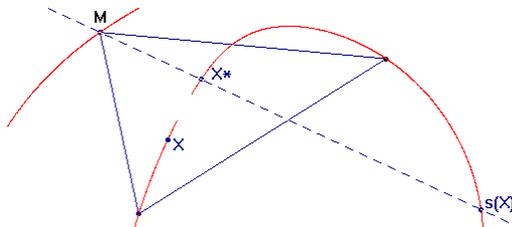
konjugierter Kurvenpunkte verlaufen parallel zur Asymptote durch den Pivot-Punkt. Wählt man für die hier behandelten Zusammenhänge $M_1M_2M_3$ als Bezugsdreieck und den Fernpunkt $P_\infty(\alpha, \beta, \gamma)$ als Pivot-Punkt, so erhält man eine Zirkularkurve mit der Gleichung

$$xyc^2(\alpha y - \beta x) + yza^2(\beta z - \gamma y) + zxb^2(\gamma x - \alpha z) = 0.$$



Auf dieser Zirkularkurve liegen die Miquel-Punkte M_1, M_2, M_3 , die Ecken des Vierecks A, B, C, D , die Schnittpunkte F, G der Gegenseiten, der Diagonalschnitt E und der Tangentialpunkt T .

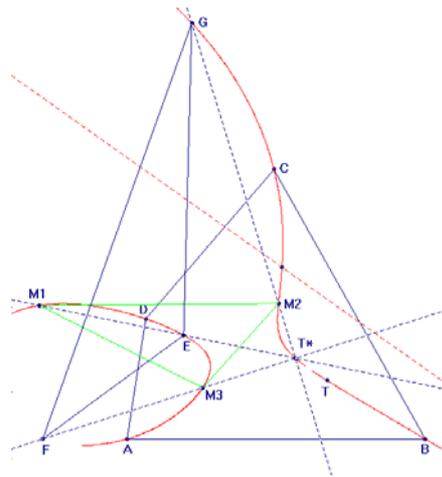
Diese Zirkularkurve eines Vierecks bleibt nicht nur isogonal-konjugiert invariant bzgl. des Dreiecks der Miquel-Punkte, sondern wird auch durch die Inversionen $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ auf sich abgebildet.



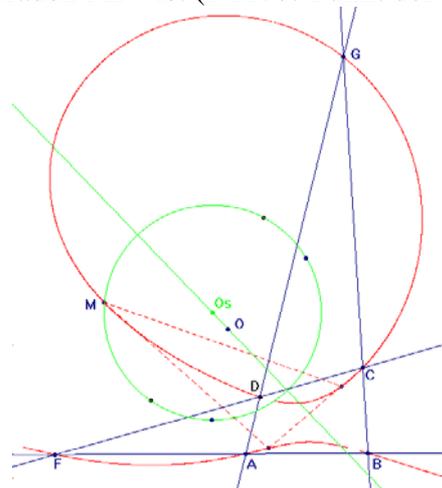
Der Bildpunkt $\sigma_1(X)$ eines Kurvenpunktes X ist der dritte Schnittpunkt der Geraden M_1X^* mit der Zirkularkurve.

8. Vierecke korrespondierender Punkte

Geht man umgekehrt von einem Bezugsdreieck $M_1M_2M_3$ mit den entsprechenden Inversionen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ aus, betrachtet dazu eine isogonal-konjugiert invariante Zirkularkurve, so kann man zu einem Punkt A der Kurve die korrespondierenden Punkte $\sigma_1(A)=C, \sigma_2(A)=D, \sigma_3(A)=B$ betrachten. Der Tangentialpunkt T dieser vier Punkte A, B, C, D liegt wieder auf der Zirkularkurve. Die Bildpunkte $\sigma_1(T), \sigma_2(T), \sigma_3(T)$ des Tangentialpunktes T ergeben das Diagonaldreieck EGF der vier Punkte A, B, C, D . Das Diagonaldreieck EGF liegt somit perspektiv zum Bezugsdreieck $M_1M_2M_3$ mit dem Perspektivzentrum T^* .



Anmerkung: Durchläuft der Punkt A die Zirkularkurve, so variiert das Viereck ABCD bzw. das zugehörige vollständige Vierseit. Der Miquel-Punkt $M=M_1$ bleibt fest. Die Mittelpunkte O_s der Miquel-Kreise bewegen sich auf einer Geraden durch die Umkreismitte O des Bezugsdreiecks $M_1M_2M_3$, die parallel zur Verbindungsgeraden MP^* ist (P Pivot-Punkt der Zirkularkurve).



Literatur

- [1] J.W. Clawson: The Complete Quadrilateral. – American Mathematical Monthly Vol. 20 (1919), S.232.
- [2] H.S.M. Coxeter: Unvergängliche Geometrie. – Birkhäuser, Basel 1981, S.122.
- [3] Jean-Pierre Ehrmann: Steiner's Theorems on the Complete Quadrilateral. – Forum Geometricorum, Volume 4 (2004) 35-52.
- [4] Jean-Pierre Ehrmann and Bernard Gibert: Special Isocubics in the Triangle Plane. – [http://perso.wanadoo.fr/bernard.gibert/...](http://perso.wanadoo.fr/bernard.gibert/)
- [5] R.Stärk und D.Baumgartner: Ein merkwürdiger Punkt des Vierecks. – PM 1/44. Jg.2002.

Eckart Schmidt - Hasenberg 27 - D 24223 Ralsdorf
http://eckart_schmidt.bei.t-online.de
 eckart_schmidt@t-online.de