

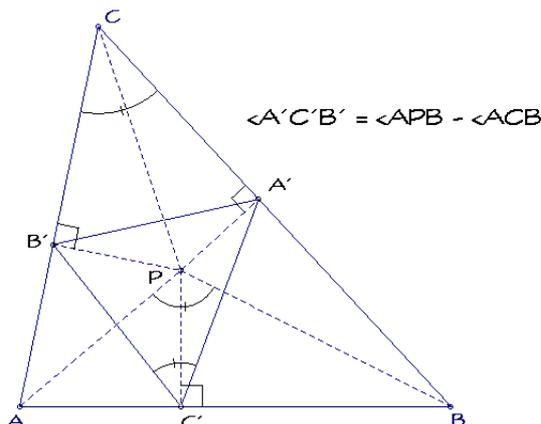
Simson-Geraden eines Kreisvierecks

Eckart Schmidt

Die Fußpunktdreiecke von Umkreispunkten eines Dreiecks entarten bekanntlich kollinear auf der Simson- (oder Wallace-) Geraden (z.B. [1], [2]). Hier wird die entsprechende Fragestellung für Kreisvierecke untersucht. Neben Eigenschaften der Fußpunktvierecke von Umkreispunkten wird auch eine Simson-Gerade für Kreisvierecke angeboten.

1. Fußpunktdreiecke

Lotet man von einem Punkt P der Dreiecksebene auf die Seitengeraden des Dreiecks ABC, so erhält man das Fußpunktdreieck A'B'C' des Punktes P.



Vom Punkt P ist der Blickwinkel zu den Seiten die Summe der entsprechenden Innenwinkel von ABC und A'B'C'.

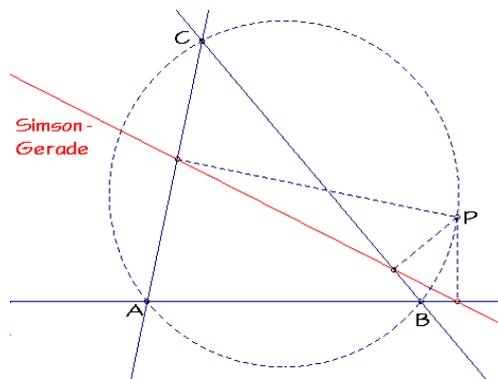
Satz 1. Für die Innenwinkel des Fußpunktdreiecks A'B'C' von P bzgl. ABC gilt

$$\angle A'C'B' = \angle APB - \angle ACB, \dots$$

Beweis: Die Vierecke AC'PB' und C'BA'P sind offensichtlich Kreisvierecke. Die Umfangswinkel $\angle APC'$ und $\angle AB'C'$ über AC' sind gleich groß, entsprechend $\angle C'PB$ und $\angle C'A'B$ über C'B. Ihre Summe ergibt $\angle APB$. Aus der Winkelbilanz im Viereck B'C'A'C ergibt sich dann zwanglos die Behauptung.

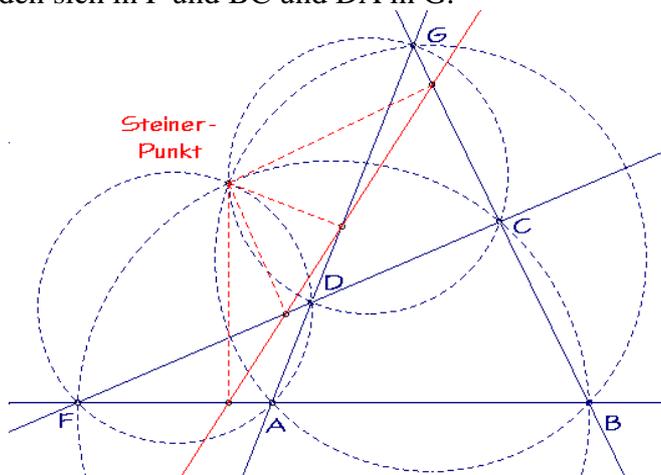
Liegt P auf dem Umkreis, so ist die Winkeldifferenz $\angle APB - \angle ACB = \angle A'C'B'$ Null oder 180° , d.h. A', B', C' sind kollinear auf der sogenannten Simson-Geraden des Punktes P bzgl. ABC. Diametrale Punkte des Umkreises haben orthogonale Simson-Geraden, die sich auf dem Neun-Punkte-Kreis des

Dreiecks schneiden. Der Umkreispunkt P ist isogonal-konjugiert zum Fernpunkt der Simson-Geraden seines diametralen Partners. Durchläuft P den Umkreis, so ist die Einhüllende der Simson-Geraden eine dreispitzige Hypozykloide (Steiner-Kurve [3]).



2. Fußpunktvierecke

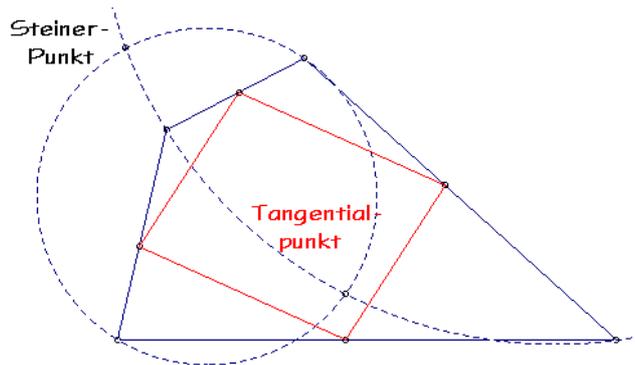
Betrachtet man ein Viereck $ABCD$ mit den Seitengeraden $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$ und lotet von einem Punkt P auf a , b , c , d , so erhält man das Fußpunktviereck $A'B'C'D'$. Der Diagonalschnitt sei E und die Gegenseiten AB und CD schneiden sich in F und BC und DA in G .



Satz 2. Das Fußpunktviereck entartet für den Steiner-Punkt des Vierseits $abcd$ kollinear.

Beweis: Damit das Fußpunktviereck kollinear entartet, müssen die Simson-Geraden von P bzgl. der Dreiecke ABG , BCF , CDG , DAF zusammenfallen. Dazu muss P auf den Umkreisen dieser Dreiecke liegen, die sich bekanntlich im Steiner-Punkt des Vierseits $abcd$ schneiden [4].

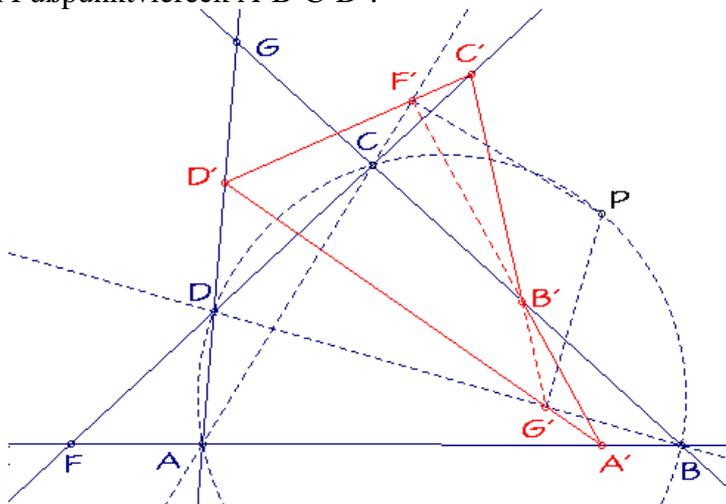
Spiegelt man den Steiner-Punkt an den Geraden des Vierseits, so erhält man eine Parallele zur Fußpunktgeraden, auf der auch die Höhenschnitte der Teildreiecke liegen [4].



Bei Stärk [5] findet sich in einem Beitrag über den sogenannten Tangentialpunkt eines Vierecks der Hinweis, dass für diesen Punkt das Fußpunktviereck punktsymmetrisch, d.h. zu einem Parallelogramm entartet. Diesen geometrisch interessanten Viereckspunkt findet man konstruktiv z.B. im zweiten Schnitt der Kreise durch den Steiner-Punkt und ein Gegeneckenpaar des Vierecks. Für ein Kreisviereck fällt der Tangentialpunkt in den Mittelpunkt und das Fußpunktviereck ist das Varignon-Parallelogramm der Seitenmitten.

3. Fußpunktvierecke zu Umkreispunkten

Jetzt sei $ABCD$ ein Kreisviereck und P ein Umkreispunkt mit dem Fußpunktviereck $A'B'C'D'$.

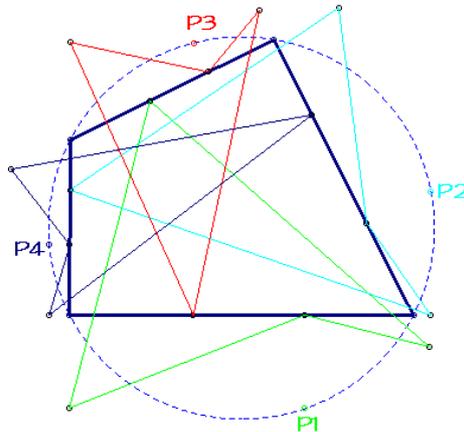


Satz 3. Die Gegenseiten $A'B'$ und $C'D'$ des Fußpunktvierecks eines Umkreispunktes P bzgl. $ABCD$ schneiden sich im Fußpunkt des Lotes von P auf AC ; entsprechend schneiden sich $B'C'$ und $D'A'$ im Fußpunkt des Lotes von P auf BD .

Beweis: $A'B'$ ist die Simson-Gerade von P bzgl. ABC und $C'D'$ ist die Simson-Gerade von P bzgl. ACD ; diese Geraden schneiden sich offensichtlich im Lot von P auf die gemeinsame Seitengerade AC . - Die Schnittpunkte der Gegenseiten von $A'B'C'D'$ seien entsprechend mit F' und G' bezeichnet.

Satz 4. Ein Umkreispunkt des Kreisvierecks ist gleichzeitig Steiner-Punkt seines Fußpunktvierecks.

Beweis: Der Steiner-Punkt des Vierseits $a'b'c'd'$ liegt im Schnittpunkt der Umkreise von $A'F'D'$, $B'G'A'$, $C'F'B'$ und $D'G'C'$, die Thales-Kreise über AP , BP , CP und DP sind und den gemeinsamen Punkt P haben.



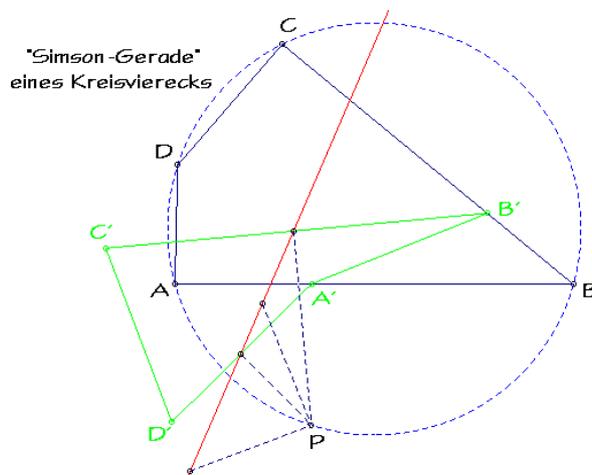
Satz 5. Die Schnittwinkel entsprechender Seitengeraden von Fußpunktvierecken zu Umkreispunkten sind gleich groß.

Beweis: Wendet man die Winkelbeziehung für Fußpunktdreiecke z.B. auf das Dreieck ABG an, so gilt

$$\angle APB - \angle AGB = \angle B'A'D'.$$

Für Umkreispunkte P sind die Schnittwinkel $\angle(AP, PB)$ gleich groß. Das Winkelmaß von $\angle AGB$ ist unabhängig von P . Somit sind die Schnittwinkel $\angle(B'A', A'D')$ für alle Punkte P des Umkreises gleich groß.

4. Simson-Geraden zu Kreisvierecken



Für einen Umkreispunkt P eines Kreisvierecks kann das Fußpunktviereck nicht kollinear entarten. Betrachtet man aber zu einem Umkreispunkt P und seinem Fußpunktviereck $A'B'C'D'$

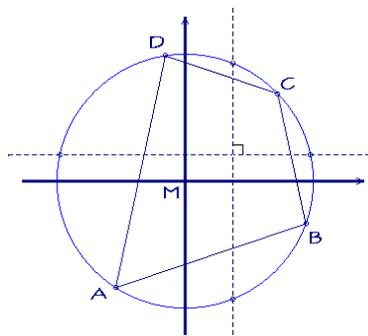
erneut das Fußpunktviereck $A''B''C''D''$, so liegen A'' , B'' , C'' , D'' auf einer Geraden.

Satz 6. (Simson-Gerade) Das zweite Fußpunktviereck eines Umkreispunktes entartet kollinear.

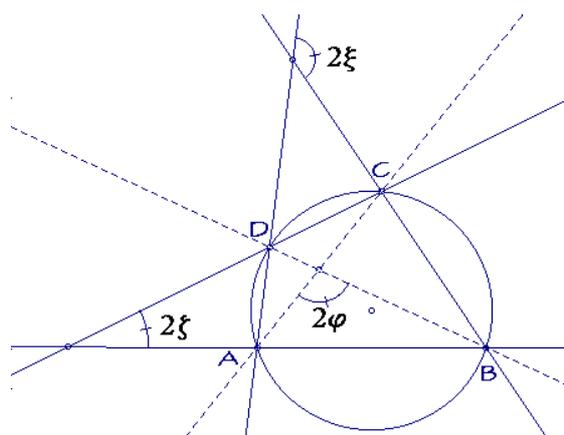
Beweis: Wie oben gezeigt ist ein Umkreispunkt Steiner-Punkt seines Fußpunktvierecks und das Fußpunktviereck des Steiner-Punktes entartet kollinear.

Dieser Zusammenhang lässt sich zur Simson-Gerade eines Kreis-n-Ecks verallgemeinern: Für ein Kreis-n-Eck entartet das $(n-2)$ te Fußpunkt-n-Eck eines Umkreispunktes kollinear. Der Beweis erfolgt zwanglos durch vollständige Induktion.

5. Analytische Behandlung



Für eine analytische Behandlung stellt sich die Frage nach einem geeigneten Koordinatensystem. Es liegt nahe, den Koordinatenursprung in den Mittelpunkt des Umkreises zu legen. Die Richtungen der Koordinatenachsen seien parallel zu den orthogonalen Bogenmittendiagonalen des Vierecks.



Das Kreisviereck sei gekennzeichnet durch die halben Schnittwinkel der Gegenseiten und den halben Schnittwinkel der Diagonalen:

$$\begin{aligned} \angle(AB, CD) = \alpha - \beta = 2\xi, \quad \angle(BC, DA) = \alpha + \beta = 2\xi, \\ \angle(AC, BD) = 2\varphi. \end{aligned}$$

Bezeichnet man den Umkreisradius mit R , so gewinnt man folgende Koordinatendarstellung:

$$\begin{aligned} A &(-R \cdot \cos(\xi - \zeta - \varphi); -R \cdot \sin(\xi - \zeta - \varphi)), \\ B &(+R \cdot \cos(\xi + \zeta - \varphi); -R \cdot \sin(\xi + \zeta - \varphi)), \\ C &(-R \cdot \cos(\xi - \zeta + \varphi); +R \cdot \sin(\xi - \zeta + \varphi)), \\ D &(+R \cdot \cos(\xi + \zeta + \varphi); +R \cdot \sin(\xi + \zeta + \varphi)). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Diagonalschnitt

$$E\left(-R \frac{\sin \xi \sin \zeta}{\cos \varphi}; R \frac{\cos \xi \cos \zeta}{\sin \varphi}\right)$$

und der Schwerpunkt

$$S(-R \cos \varphi \sin \xi \sin \zeta; R \sin \varphi \cos \xi \cos \zeta).$$

Wählt man jetzt einen Umkreispunkt

$$P(R \cdot \cos \kappa; R \cdot \sin \kappa),$$

so ergeben sich die Fußpunkte auf den Seitengeraden zu

$$\begin{aligned} A' &(R(\cos \zeta \cos(\zeta + \kappa) - \sin \zeta \sin(\xi - \varphi)); \\ &\quad - R(\sin \zeta \cos(\zeta + \kappa) + \cos \zeta \sin(\xi - \varphi))), \\ B' &(R(\cos \xi \cos(\xi + \kappa) - \sin \xi \sin(\zeta - \varphi)); \\ &\quad - R(\sin \xi \cos(\xi + \kappa) + \cos \xi \sin(\zeta - \varphi))), \\ C' &(R(\cos \zeta \cos(\zeta - \kappa) - \sin \zeta \sin(\xi + \varphi)); \\ &\quad R(\sin \zeta \cos(\zeta - \kappa) + \cos \zeta \sin(\xi + \varphi))), \\ D' &(R(\cos \xi \cos(\xi - \kappa) - \sin \xi \sin(\zeta + \varphi)); \\ &\quad R(\sin \xi \cos(\xi - \kappa) + \cos \xi \sin(\zeta + \varphi))). \end{aligned}$$

In Ergänzung zu Satz 5 seien auch die Schnittwinkel der Seitengeraden des Fußpunktvierecks angegeben:

$$\begin{aligned} \angle(a', d') &= +\xi + \varphi - 90^\circ; \angle(b', a') = -\zeta - \varphi + 90^\circ; \\ \angle(c', b') &= -\xi + \varphi - 90^\circ; \angle(d', c') = +\zeta - \varphi + 90^\circ. \end{aligned}$$

Für das zweite Fußpunktviereck erhält man z.B.

$$\begin{aligned} A'' &\left(\frac{R}{2}(2 \cos \kappa - (\cos(\xi - \zeta) + \cos(\kappa + \varphi)))(\cos \varphi - \cos(\kappa + \xi + \zeta)); \right. \\ &\quad \left. \frac{R}{2}(2 \sin \kappa + (\cos(\xi - \zeta) + \cos(\kappa + \varphi))(\sin \varphi - \sin(\kappa + \xi + \zeta))) \right) \end{aligned}$$

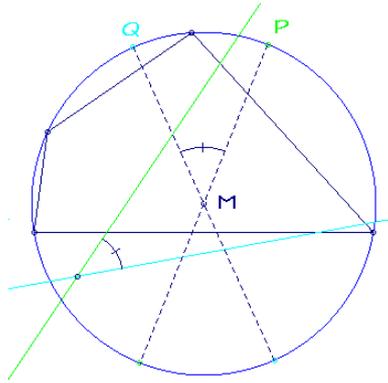
sowie durch Vorzeichenwechsel bei ζ und Ersetzen von φ durch $180^\circ - \varphi$ den Punkt B'' . Diese Punkte bestimmen die Simson-Gerade mit der Gleichung:

$$y = \cot \kappa \cdot x$$

$$- \frac{R}{2 \sin \kappa} (2 \cos 2\kappa + (\cos(\xi + \zeta) - \cos(\kappa - \varphi))(\cos(\xi - \zeta) + \cos(\kappa + \varphi))).$$

Damit ergibt sich für einen Umkreispunkt mit dem Argument κ eine Simson-Gerade mit dem Anstiegswinkel $90^\circ - \kappa$. Unabhängig vom Koordinatensystem gilt also:

Satz 7. Zu zwei Umkreispunkten eines Kreisvierecks ist der Schnittwinkel ihrer Simson-Geraden der negative Mittelpunktswinkel. Diametrale Umkreispunkte haben daher parallele Simson-Geraden.



Für zwei Paare diametraler Umkreispunkte fallen die parallelen Simson-Geraden zusammen. Dazu müssen die absoluten Glieder der obigen Geradengleichung für κ und $\kappa+180^\circ$ übereinstimmen. Dies ist der Fall für

$$\cos 2\kappa = k \quad \text{mit } k = \frac{1}{3}(\cos 2\varphi - \cos 2\xi - \cos 2\zeta).$$

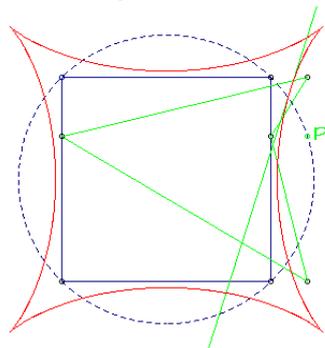
Die zugehörigen Simson-Geraden schneiden sich im Schwerpunkt und haben die Steigungen

$$\pm \frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{1-k}}.$$

Die Besonderheit dieser beiden Simson-Geraden durch den Schwerpunkt liegt geometrisch darin, dass sie aus den anderen Simson-Geraden Strecken konstanter Länge ausschneiden. Damit erweist sich die Einhüllende der Simson-Geraden als eine Astroiden-Variante.

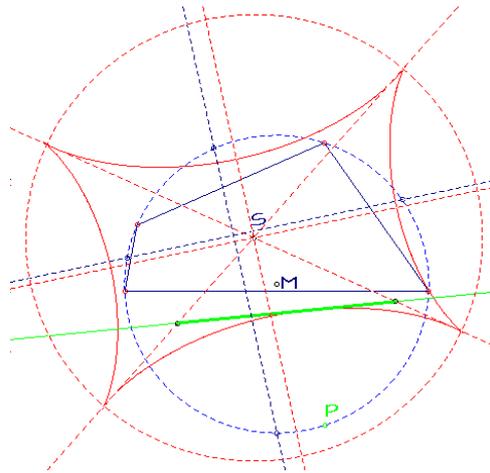
Satz 8. Die Simson-Geraden durch den Schwerpunkt eines Kreisvierecks schneiden aus den anderen Simson-Geraden gleichlange Strecken aus der Länge

$$\frac{3R}{2}\sqrt{1-k^2} \quad \text{mit } k = \frac{1}{3}(\cos 2\varphi - \cos 2\xi - \cos 2\zeta).$$



Für ein Quadrat gilt $k = 0$. Die Fußpunktvierecke von Umkreispunkten sind orthozentrisch. Strecken der Länge $\frac{3}{2}R$ zwischen den Quadratdiagonalen hüllen eine Astroide ein. Der feste äußere Kreis hat einen Radius von $\frac{3}{2}R$ und der Rollkreis einen Radius von $\frac{3}{8}R$. Diese Astroide ist die Einhüllende der Simson-Geraden eines Quadrats.

Allgemein erhält man als Einhüllende der Simson-Geraden eine Astroiden-Variante, punktsymmetrisch zum Schwerpunkt. Symmetrieachsen verlaufen parallel zu den Bogenmittendiagonalen des Kreisvierecks. Die Spitzen liegen auf einem Kreis um den Schwerpunkt mit dem Radius $\frac{3}{2}R$ und die Scheitelabstände vom Schwerpunkt ergänzen sich ebenfalls zu $\frac{3}{2}R$.



6. Sigma-Zahl und Tangentialpunkte der Fußpunktvierecke

Die Sigma-Zahl wird von Stärk [6] als geometrisch relevante merkwürdige Zahl des Vierecks in vielerlei Bezug behandelt. Sind U_A, U_B, U_C, U_D die Umkreismitten der Teildreiecke BCD, CDA, DAB, ABC, so ist das Flächenverhältnis der Dreiecke $U_X U_Y U_Z$ und XYZ unabhängig von der Wahl X, Y, Z . Dieses Verhältnis orientierter Flächeninhalte wird als Sigma-Zahl des Vierecks definiert. Die Sigma-Zahl eines Vierecks ist nur von den Schnittwinkeln der Seitengeraden des Vierecks abhängig:

$$\sigma = \frac{1}{4}(\cot A + \cot C)(\cot B + \cot D) .$$

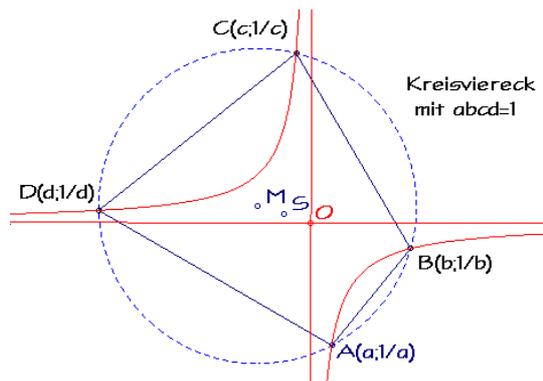
Für ein Kreisviereck ist die Sigma-Zahl Null. Nach Satz 5 sind aber alle Fußpunktvierecke von Umkreispunkten in den Schnittwinkeln entsprechender Seitengeraden gleich und haben somit die gleiche Sigma-Zahl. Diese lässt sich durch die Schnittwinkel der Gegenseitengeraden und der Diagonalen des Kreisvierecks sehr übersichtlich darstellen.

Satz 8. Fußpunktvierecke zu Umkreispunkten haben die gleiche Sigma-Zahl

$$\sigma = -\frac{\sin^2(2\varphi)}{(\cos 2\varphi + \cos 2\zeta) \cdot (\cos 2\varphi + \cos 2\xi)} .$$

Stärk arbeitet in einem anderen Koordinatensystem: Zu einem nicht entarteten Viereck gibt es immer eine rechtwinklige Umhyperbel, die für nicht-orthozentrische Vierecke eindeutig bestimmt ist. Wählt man die Asymptoten dieser Hyperbel als Achsen eines kartesischen Koordinatensystems, so ist bei nicht orthogonalen Diagonalen folgende Koordinatendarstellung möglich:

$$A(a; \frac{1}{a}), B(b; \frac{1}{b}), C(c; \frac{1}{c}), D(d; \frac{1}{d}).$$



Für ein Kreisviereck liegt der Ursprung in der am Schwerpunkt $S(x_s; y_s)$ gespiegelten Umkreismitte $M(2x_s; 2y_s)$. Die Koordinatenachsen sind parallel zu den Symmetrieachsen der Bogenmittendiagonalen. Der Vorteil dieses Koordinatensystems liegt darin, dass sich die Eigenschaft eines Kreisvierecks leicht in der Form

$$abcd = 1$$

berücksichtigen lässt. Der Umkreis hat die Gleichung

$$(x - 2x_s)^2 + (y - 2y_s)^2 = R^2$$

$$\text{mit } R = \frac{1}{2} \sqrt{(ab + cd)(bc + da)(ac + bd)}.$$

Für einen Umkreispunkt $P(u; v)$ ergeben sich die Ecken des Fußpunktvierecks zu

$$A' \left(\frac{a + b + a^2 b^2 u - abv}{1 + a^2 b^2}; \frac{a^2 b + ab^2 - abu + v}{1 + a^2 b^2} \right)$$

sowie B', C', D' durch zyklische Vertauschung. Die Ecken des zweiten Fußpunktvierecks haben recht aufwendige Koordinaten, die aber dennoch eine überschaubare Gleichung für die Simson-Gerade liefern:

$$2x(v - 2y_s) + 2y(u - 2x_s) + 4uy_s + 4vx_s - 3uv = 1.$$

Auch die Sigma-Zahl der Fußpunktvierecke von Umkreispunkten lässt sich noch übersichtlich darstellen:

$$\sigma = - \frac{(ab + cd)(bc + da)(ac - bd)^2}{4(a - b)(b - c)(c - d)(d - a)}.$$

Ebenfalls bei Stärk [5] findet sich der Tangentialpunkt als merkwürdiger Viereckspunkt. Die Bezeichnung wird erst vor dem Hintergrund einer Zirkularkurve des Vierecks verständlich. Eine konstruktive Kennzeichnung wurde schon angesprochen:

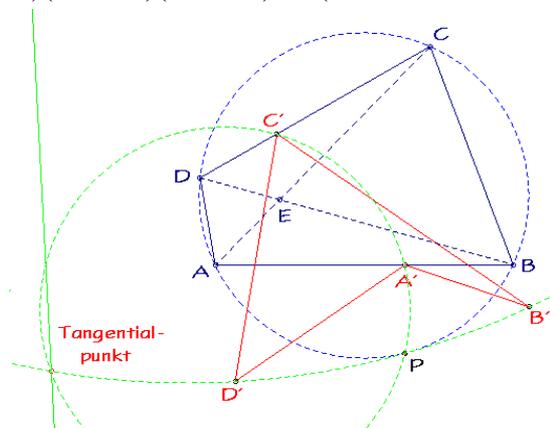
Der Tangentialpunkt ist der zweite Schnittpunkt der Kreise durch den Steiner-Punkt und zwei Gegenecken des Vierecks. In dem von Stärk gewählten Koordinatensystem hat der Tangentialpunkt T eines Vierecks ABCD eine einfache Darstellung:

$$T\left(\frac{4x_s}{1+abcd}; \frac{4abcd y_s}{1+abcd}\right).$$

Für ein Kreisviereck fällt der Tangentialpunkt in die Umkreismitte, für ein orthozentrisches Viereck existiert er nicht. Der Tangentialpunkt des Fußpunktvierecks eines Umkreispunktes errechnet sich zu

$$T'\left(\frac{1}{s}(q^2u - pqv + 2pr); \frac{1}{s}(-pqu + p^2v + 2qr)\right)$$

mit $p = a - b + c - d$, $q = abc - bcd + cda - dab$, $r = ac - bd$,
 $s = (ab + cd)(bc + da)(ac + bd) - 4(ab + bc + cd + da - ac - bd)$.



Der rechnerische Aufwand lohnt sich, um nachzuweisen, dass die Tangentialpunkte der Fußpunktvierecke auf einer Geraden liegen mit der Gleichung

$$px + qy - 2r = 0.$$

Satz 9. Die Tangentialpunkte der Fußpunktvierecke von Umkreispunkten liegen auf der Polaren des Diagonalschnitts des Kreisvierecks.

Beweis: Die Gleichung der Polaren des Diagonalschnitts

$E(x_e; y_e) = E\left(\frac{q}{r}; \frac{p}{r}\right)$ bzgl. des Umkreises lautet

$$(x_e - 2x_s)(x - 2x_s) + (y_e - 2y_s)(y - 2y_s) = R^2$$

und ist offensichtlich mit der obigen Gleichung äquivalent. Die Polare des Diagonalschnitts ist die Verbindungsgerade der Schnittpunkte der Gegenseitenpaare.

6. Weitere Ortslinien

Neben den Tangentialpunkten lohnt auch eine Untersuchung der Schwerpunkte der Fußpunktvierecke von Umkreispunkten. Die

Berechnungen erfolgen wieder im winkelbezogenen Koordinatensystem.

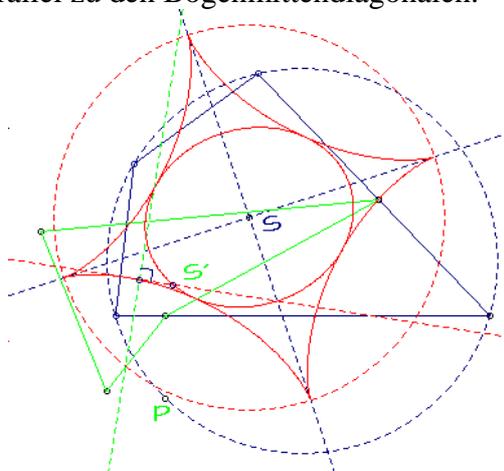
Die Schwerpunkte

$$S' \left(\frac{R}{2} (\cos \kappa (\cos^2 \xi + \cos^2 \zeta) - 2 \cos \varphi \sin \xi \sin \zeta), \right. \\ \left. \frac{R}{2} (\sin \kappa (\sin^2 \xi + \sin^2 \zeta) + 2 \sin \varphi \cos \xi \cos \zeta) \right)$$

der Fußpunktvierecke erzeugen eine Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{(x - x_s)^2}{\frac{R^2}{4} (\cos^2 \xi + \cos^2 \zeta)^2} + \frac{(y - y_s)^2}{\frac{R^2}{4} (\sin^2 \xi + \sin^2 \zeta)^2} = 1.$$

Das Zentrum liegt im Schwerpunkt S von ABCD, die Achsen verlaufen parallel zu den Bogenmittendiagonalen.



Lotet man von den Schwerpunkten der Fußpunktvierecke auf die zugehörigen Simson-Geraden, erhält man die Verbindungsgeraden der Diagonalenmitten. Diese Diagonalenmitten-Geraden mit den Gleichungen

$$x \cdot \sin \kappa + y \cdot \cos \kappa$$

$$= R (\sin \kappa \cos \kappa - \sin \kappa \sin \xi \sin \zeta \cos \varphi + \cos \kappa \cos \xi \cos \zeta \sin \varphi)$$

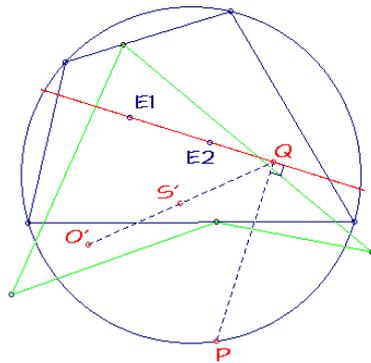
hüllen eine S-zentrierte Astroide ein mit dem Umkreisradius R. Zur Begründung: Die Achsen der Schwerpunktsellipse schneiden aus diesen Geraden immer eine Strecke der Länge R aus. Diese Astroide berührt die Schwerpunktsellipse für

$$\cos 2\kappa = \frac{1}{2} (\cos 2\xi + \cos 2\zeta).$$

Satz 10. Die Schwerpunkte der Fußpunktvierecke zu Umkreispunkten liegen auf einer Ellipse. Lotet man von den Schwerpunkten auf die zugehörigen Simson-Geraden, so hüllen die Lotgeraden eine Astroide ein, die die Schwerpunktsellipse symmetrietreu berührt.

Abschließend sei eine weitere Ortslinie zur Berechnung freigegeben: Spiegelt man im Fußpunktviereck eines Umkreispunkts das Zentrum O' der rechtwinkligen Umhyperbel am Schwerpunkt S', so liegt der Spiegelpunkt Q im Fußpunkt

des Lotes vom Umkreispunkt P auf die Diagonalenmitten-Gerade $E_1 E_2$ des Kreisvierecks.



Literatur

- [1] E. Donath: Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks. – VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976.
- [2] R. Honsberger: Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry. – The Mathematical Association of America, 1995.
- [3] H. Schmidt: Ausgewählte höhere Kurven. – Kesselringsche Verlagsbuchhandlung Wiesbaden, 1949.
- [4] J.-P. Ehrmann: Steiner's Theorems on the Complete Quadrilateral. – Forum Geometricorum, Volume 4 (2004) 35-52.
- [5] R. Stärk und D. Baumgartner: Ein merkwürdiger Punkt des Vierecks. – PM 1/44. Jg. 2002, S. 19
- [6] R. Stärk: Eine merkwürdige Zahl des Vierecks. – PM 1/46. Jg. 2004, S. 26.

Eckart Schmidt - Hasenberg 27 - D 24223 Ralsdorf
<http://eckartschmidt.de>
 eckart_schmidt@t-online.de