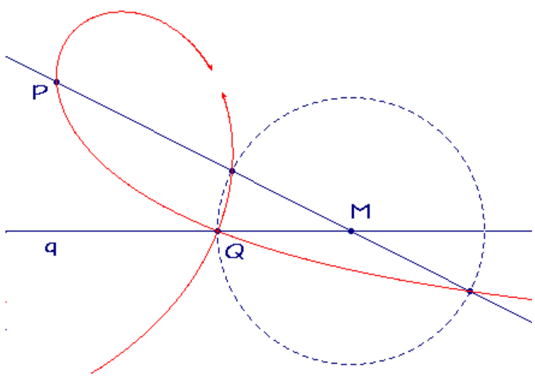
Strophoiden

Eckart Schmidt

Strophoiden sind als anallagmatische Kurven invariant gegenüber einer Kreisspiegelung; sie sind weiterhin das Inverse einer gleichseitigen Hyperbel, die Fußpunktkurve einer Parabel und die Hüllkurve einer Kreisschar. Diese bekannten Eigenschaften werden hier für Strophoiden einer Geraden in baryzentrischen Koordinaten untersucht. Dazu wird die Strophoide als isogonales Bild des Apollonius-Kreises über der Basis eines rechtwinkligen Bezugsdreiecks dargestellt.



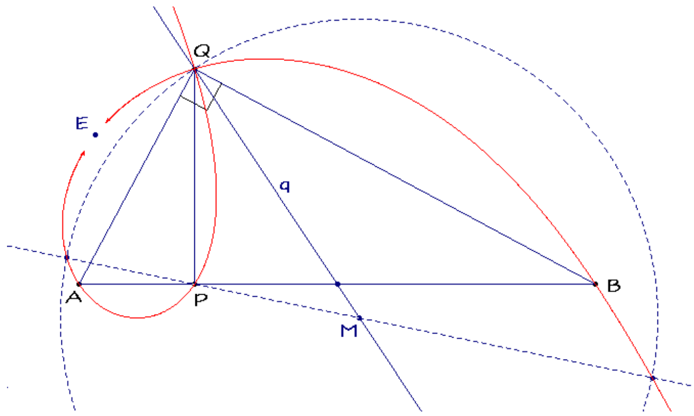
Die Gleichung der Strophoiden

Eine Strophoide lässt sich auf vielfältige Weise erzeugen. Bei H. Schmidt [1] werden 17 Möglichkeiten für die symmetrische Strophoide dargestellt. Wir greifen hier auf die Definition bei E.H. Lockwood [2] zurück.

Eine Strophoide besteht aus den Schnittpunkten eines Geradenbüschels und einer Kreisschar. Das Geradenbüschel ist festgelegt durch den Pol *P*, die Kreisschar durch eine Gerade *q* für die Mittelpunkte *M* der Kreise durch einen gemeinsamen Punkt, den Knoten *Q*, auf dieser Geraden. Die Schnittpunkte der Geraden *PM* mit dem Kreis um *M* durch *Q* ergeben die Strophoide der erzeugenden Geraden *q*.

Ist der Knoten Q Fußpunkt des Lotes vom Pol P auf die erzeugende Gerade q, so erhält man eine symmetrische Strophoide. Auf diesen Spezialfall sei hier nicht weiter eingegangen, sondern auf die ausführliche Behandlung bei H. Schmidt [1] verwiesen.

Für eine Darstellung der Zusammenhänge in baryzentrischen Koordinaten ist ein geeignetes Bezugsdreieck zu finden. Zeichnet man im Pol P eine Senkrechte zu PQ, so liefern die Schnittpunkte A, B mit der Strophoiden ein rechtwinkliges Dreieck ABQ, das als Bezugsdreieck geeignet ist. Der Knoten Q ist Scheitel des rechten Winkels, der Pol P der Höhenfußpunkt und die erzeugende Gerade q ist die Seitenhalbierende der Basis. Eine Strophoide in dieser Darstellung sei als ABQ-Strophoide angesprochen.



Mit diesem Bezugsdreieck erhält man

$A(1:0:0)$, $B(0:1:0)$, $Q(0:0:1)$, $P(a^2:b^2:0)$, $q:\ y=x$.

Wählt man für die Kreismitten die Parameterdarstellung $M(\mu:\mu:1)$, so ergeben sich für die Kreise die Gleichungen

$$a^2y(2\mu(x+z)-y)+b^2x(2\mu(y+z)-x)=0,$$

und für die Verbindungsgeraden PM erhält man

$$a^2(y-z\mu)-b^2(x-z\mu)=0.$$

Eliminiert man den Parameter, so hat die Strophoide die einfache Gleichung

$$\boxed{a^2y^2(2x+z)-b^2x^2(2y+z)=0}.$$

Ein spezieller Punkt der Strophoiden liegt im Schnitt

$$E(a^2(a^2-b^2):-b^2(a^2-b^2):4a^2b^2)$$

der Senkrechten in Q und der Parallelen in P zur erzeugenden Geraden q.

Für computer-gestützte Berechnungen bietet sich z.B. folgende Parameterdarstellung für einen Strophoidenpunkt K an, der nicht auf AQ liegt:

$$K(1:\kappa:\frac{-2\kappa(b^2-a^2\kappa)}{b^2-a^2\kappa^2}).$$

Die Tangente in diesem Punkt hat dann die Gleichung:

$$a^2\kappa^2(a^2\kappa^2-2b^2\kappa+b^2)x$$
$$+2b^2(a^2\kappa^2-2a^2\kappa+b^2)y-(a^2\kappa^2-b^2)^2z=0.$$

Z. B. erhält man für $\kappa=0$ den Punkt B und die Tangente in B erweist sich als Parallele zur erzeugenden Geraden q.

Strophoide als isogonales Bild

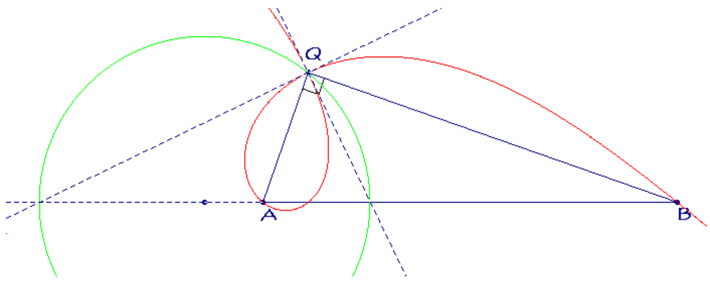
Betrachtet man die Isogonalität bzgl. des gewählten Bezugsdreiecks *ABQ*

$$(x:y:z) \quad \to \quad (a^2yz : b^2zx : (a^2+b^2)xy),$$

so erweist sich das isogonale Bild der Strophoide als Kreis, als Apollonius-Kreis über der Basis, mit der Gleichung

$$a^4y^2 - b^4x^2 - a^2b^2(x-y)(x+y+2z) = 0\,.$$

Die *ABQ*-Strophoide ist das isogonale Bild des Apollonius-Kreises über der Basis *AB*.



Die Winkelhalbierenden des rechten Winkels sind Tangenten der Strophoide und schneiden die Basisgerade in den Punkten $(a:b:0)$ und $(a:-b:0)$, deren Mitte $(a^2:-b^2:0)$ Mittelpunkt des Apollonius-Kreises ist.
Weiterhin gilt verallgemeinernd für beliebige Bezugsdreiecke:

Das isogonale Bild eines Apollonius-Kreises des Bezugsdreiecks ist eine Strophoide.

Wählt man den Apollonius-Kreis über *AB* eines Bezugsdreiecks *ABC,* so erhält die Strophoide die Gleichung

$$\boxed{2xy(S_Ax - S_By) - z(a^2y^2 - b^2x^2) = 0}.$$

Benutzt werden die Conway-Abkürzungen

$$2S_A = -a^2+b^2+c^2,\ 2S_B = a^2-b^2+c^2,\ 2S_C = a^2+b^2-c^2.$$

Die erzeugende Gerade ist wieder die Seitenhalbierende von *AB* und der Knoten ist *C*. Der Pol liegt hier nicht im Höhenfußpunkt sondern in dem Punkt $P(a^2:b^2:2S_C)$, dem isogonalen Bild des Schnitts $(2S_C:2S_C:c^2)$ von Seitenhalbierender und Apollonius-Kreis.

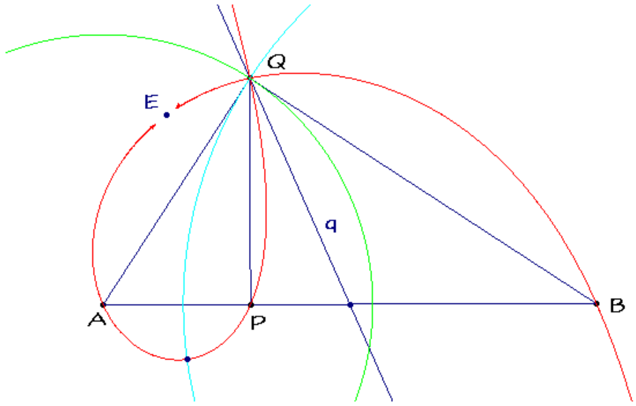
Die Strophoide als anallagmatische Kurve

Man bezeichnet eine Kurve als anallagmatisch, wenn sie durch eine Kreisspiegelung auf sich abgebildet wird. Hier erweisen sich die Inversionen an den Kreisen um *A* und *B* durch den Knoten *Q* als geeignete Spiegelungen:

$$(x:y:z)$$

$$\to (a^2y^2 - b^2x(y+z) : b^2y(x+y+z) : b^2z(x+y+z))$$
bzw.
$$\to (a^2x(x+y+z) : b^2x^2 - a^2y(x+z) : a^2z(x+y+z)) .$$
Dabei wird der Pol P auf B bzw. A abgebildet. Damit ist die Basis des gewählten rechtwinkligen Bezugsdreiecks die Strecke zwischen den Inversionszentren.

Die ABQ-Strophoide ist invariant gegenüber Spiegelungen an Kreisen um A und B durch den Knoten Q.



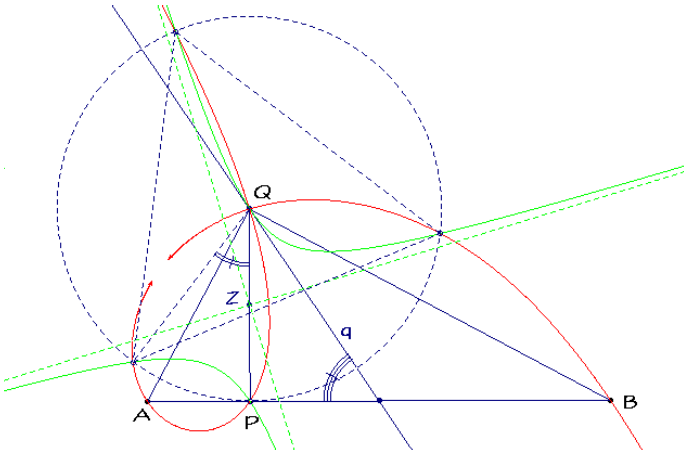
Für $a > b$ schneidet der Inversionskreis um B die Strophoide neben Q noch in den Punkten
$$(a(\pm\sqrt{a^2-b^2} - a) : -b^2 : b^2),$$
die durch Spiegelung am Inversionskreis um A aufeinander abgebildet werden und deren Mitte auf der erzeugenden Geraden q liegt. Diese Punkte sind die Berührpunkte der Tangenten von B an die Strophoide.

Die Strophoide als Inversion einer gleichseitigen Hyperbel

Spiegelt man eine Strophoide an einem Kreis um den Knoten Q, so erhält man eine gleichseitige Hyperbel. Wir wählen hier einen Inversionskreis um Q durch den Pol P. Diese Spiegelung
$$(x : y : z) \quad \to \quad (a^2b^2x(x+y+z) : a^2b^2y(x+y+z)$$
$$: a^4y^2 + b^4x^2 - a^2b^2(2xy + xz + yz))$$
überführt die Strophoide in die gleichseitige Hyperbel mit der Gleichung

$$\boxed{a^4y^2 - b^4x^2 + a^2b^2z(x-y) = 0}.$$

Das Zentrum $Z(a^2 : b^2 : a^2 + b^2)$ liegt im Lemoine-Punkt des rechtwinkligen Dreiecks, d.h. im Mittelpunkt der Höhe PQ. Die Asymptoten mit den Fernpunkten $(\pm a : b : \mp a - b)$ verlaufen parallel zu den Winkelhalbierenden bei Q. Die erzeugende Gerade q ist Tangente der Hyperbel in Q.



Die *ABQ*-Strophoide wird durch Inversion an einem Kreis um den Knoten *Q* zu einer gleichseitigen Hyperbel. Wählt man einen Inversionskreis durch den Pol *P*, so liegt das Zentrum der gleichseitigen Hyperbel in der Höhenmitte und die Asymptoten sind Parallelen zu den Winkelhalbierenden bei *Q*.

Die Inversionskreise um A und B werden bei dieser Inversion Parallelen zu den Katheten durch Z. Die gleichseitige Hyperbel schneidet die Strophoide neben P in drei weiteren Punkten D auf dem Inversionskreis, die ein gleichseitiges Dreieck bilden. Bezeichnet man den Schnittwinkel der erzeugenden Geraden q mit der Basis mit φ, so gilt

$$\angle DQP = -\frac{2}{3}\varphi \quad bzw. \quad -\frac{2}{3}(\varphi \pm \pi).$$

Darüber hinaus ist die Strophoide isogonal invariant bzgl. dieses gleichseitigen Dreiecks.

Die Strophoide als Fußpunktkurve einer Parabel

Verbindet man den Knoten Q mit einem Strophoidenpunkt K und zeichnet in K die Senkrechte zu QK, so hüllen diese Senkrechten eine Parabel ein. Wählt man für K die eingangs angebotene Parameterdarstellung, so haben diese Senkrechten die Gleichungen

$$\kappa(b^2 - a^2\kappa)x + (b^2 - a^2\kappa)y + (b^2 - a^2\kappa^2)z = 0,$$

deren Einhüllende durch die Gleichung

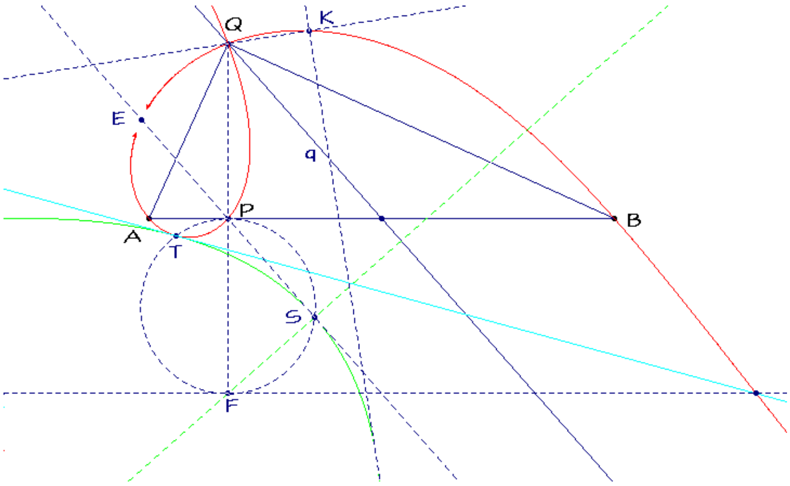
$$\boxed{(a^2y + b^2x)^2 + 4a^2b^2z(x + y + z) = 0}$$

beschrieben wird. Der Brennpunkt

$$F(-2a^2 : -2b^2 : a^2 + b^2)$$

dieser Parabel ist die Spiegelung des Knotens Q am Pol P und die Leitlinie ist die erzeugende Gerade q.

Die *ABQ*-Strophoide ist Fußpunktkurve einer Parabel mit dem Brennpunkt im Spiegelpunkt von *Q* an *P* und der erzeugenden Geraden *q* als Leitlinie.



Die Scheiteltangente ist eine Parallele zu q durch den Pol P und der Scheitelpunkt

$$S(a^2(a^2+3b^2):b^2(3a^2+b^2):-4a^2b^2)$$

ist der an P gespiegelte Punkt E. Die Winkelhalbierenden des rechten Winkels sind Tangenten der Parabel mit den Berührungspunkten $(\pm 2a:2b:\mp a-b)$.

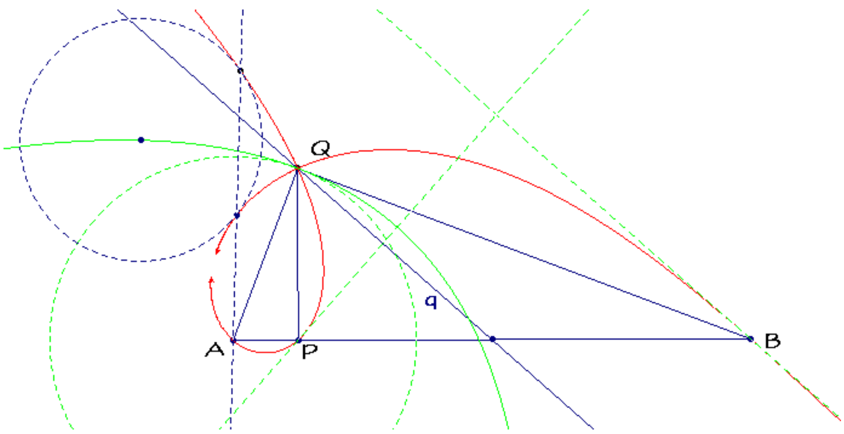
Die Parabel berührt die Strophoide im Punkt

$$T((u+v)^2(u^2-uv+v^2):(u-v)^2(u^2+uv+v^2):-(u^2-v^2)^2)$$

$$\text{mit } u=\sqrt[3]{a+b},\quad v=\sqrt[3]{a-b} \quad \text{für} \quad a>b.$$

Dieser Berührungspunkt liegt im zweiten Schnitt des Umkreises von *PFS* mit der Parabel. Hier haben die Strophoidenpunkte ein relatives Maximum für ihren Abstand vom Knoten. Die gemeinsame Tangente schneidet die Strophoide auf der Parallelen zur Basis durch den Brennpunkt.

Die Strophoide als Hüllkurve einer Kreisschar



Hüllkreise, die die Strophoide in zwei Punkten berühren, müssen offensichtlich durch eine der Inversionen der

Strophoiden auf sich abgebildet werden, d.h. sie schneiden den Inversionskreis orthogonal. Die Berührpunkte liegen damit spiegelbildlich bzgl. des Inversionskreises.
Berechnet man zu einem Strophoidenpunkt K in der eingangs angebotenen Parameterdarstellung den Spiegelpunkt – z.B. bzgl. des Inversionskreises um A – sowie die Mittelsenkrechte dieser beiden Punkte als auch die Normale im Punkt K, so liefert der Schnittpunkt den Mittelpunkt des Inversionskreises:

$$(a^2(a^2\kappa^2 - b^2) : b^2(a^2\kappa^2 - b^2)(3a^2\kappa^2 - 4a^2\kappa + b^2)$$
$$: ((a^2b\kappa^2 - 2a^2b\kappa + ab^2 + b^3)^2 - a^6\kappa^4)).$$

Eliminiert man den Parameter, so ergibt sich für die Mittelpunkte eine Parabel mit der Gleichung

$$\boxed{a^4y^2 + b^4x^2 - 2a^2b^2x(2x + y + 2z) = 0}$$

und entsprechend bzgl. des Inversionskreises um B

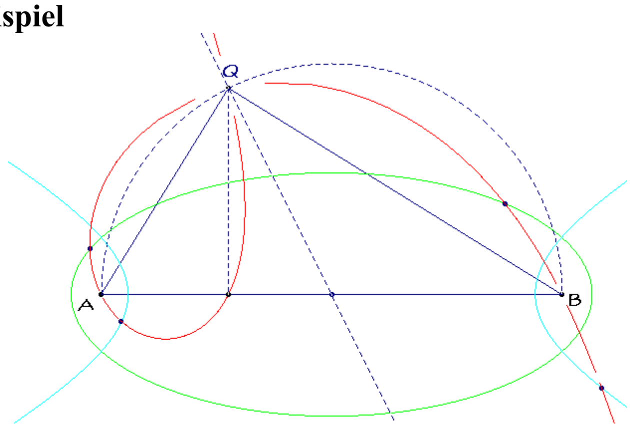
$$\boxed{a^4y^2 + b^4x^2 - 2a^2b^2y(x + 2y + 2z) = 0}.$$

Beide Parabeln haben den Pol P als Brennpunkt. Leitlinie der A-Parabel ist eine Parallele zur erzeugenden Geraden durch B und umgekehrt.

Die *ABQ*-Strophoide ist Hüllkurve von Kreisen, die einen Inversionskreis orthogonal schneiden und deren Mittelpunkte auf einer Parabel liegen: Brennpunkt ist der Pol *P* und Leitlinie eine Parallele zur erzeugenden Geraden *q* durch das andere Inversionszentrum.

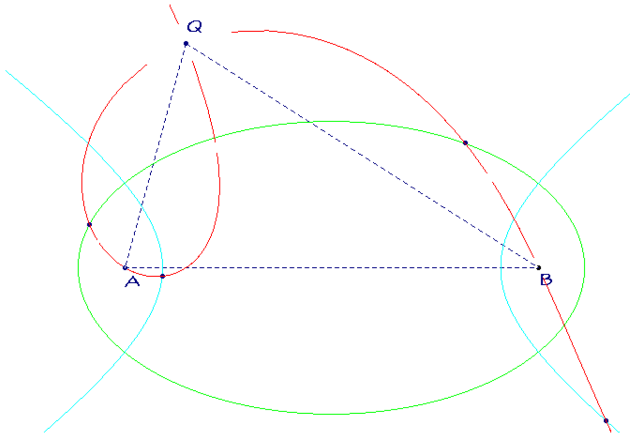
Diese Mittelpunktsparabeln berühren die Fußpunkt-Parabel auf der Geraden PQ in den Punkten $(a^2 : b^2 : -a^2)$ und $(a^2 : b^2 : -b^2)$.

Ein Beispiel



Betrachtet werden die orthogonalen Büschel von Ellipsen und Hyperbeln mit den Brennpunkten A und B sowie ein fester Punkt Q auf dem Thales-Kreis über AB. Zeichnet man von Q Tangenten an die Kegelschnitte, so liegen die Berührpunkte auf

einer Strophoiden mit dem Knoten im Punkt Q, dem Pol im Höhenfußpunkt und der Seitenhalbierenden von AB als erzeugender Geraden.
Auch wenn man die Bindung von Q an den Thales-Kreis aufhebt, erhält man eine Strophoide, auf die hier abschließend eingegangen sei.



Die Kegelschnitte mit den Brennpunkten A, B haben die Gleichungen

$$\begin{aligned}&(c^2-\kappa^2)(c^2(x-y)^2-\kappa^2(x+y)^2)\\&+z^2((a-b)^2-\kappa^2)((a+b)^2-\kappa^2)\\&+2z(c^2-\kappa^2)(x(a^2-b^2-\kappa^2)-y(a^2-b^2+\kappa^2))=0,\end{aligned}$$

wenn der Parameter κ die Summe bzw. die Differenz der Abstände zu den Brennpunkten bezeichnet. Die Polaren von Q schneiden dann diese brennpunktsgleichen Kegelschnitte auf einer Ortslinie mit der Gleichung

$$\boxed{2xy(S_Ax-S_By)-z(a^2y^2-b^2x^2)=0}.$$

Dies ist – wie oben ausgeführt – die Gleichung des isogonalen Bildes des Apollonius-Kreises über AB und somit eine Strophoide.

Legt man von einem Punkt Q Tangenten an Kegelschnitte mit den Brennpunkten A, B, so liegen die Berührpunkte auf einer Strophoiden.

Die erzeugende Gerade ist die Seitenhalbierende von AB und der Knoten ist Q. Der Pol liegt hier aber in dem Punkt $P(a^2:b^2:2S_C)$, dem isogonalen Bild des Schnitts $(2S_C:2S_C:c^2)$ von Seitenhalbierender und Apollonius-Kreis.
Übrigens erhält man diese Strophoide auch, wenn man den Punkt Q an AB spiegelt und den Spiegelpunkt isogonal abbildet bzgl. der Dreiecke ABC, wobei C ein Punkt des Apollonius-Kreises über AB im Dreieck ABQ ist.

Literatur:

[1] H. Schmidt: Ausgewählte höhere Kurven. – Kesselringsche Verlagsbuchhandlung Wiesbaden, 1949.

[2] E. H. Lockwood: A Book of Curves. – Cambridge at the University Press, 1961.

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de