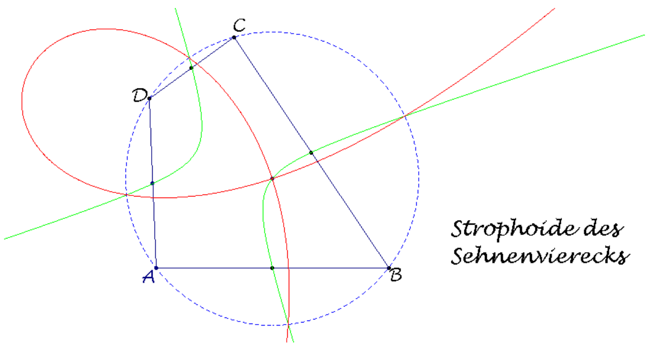
Die Strophoide als
„non-pivotal isogonal circular cubic".

Eckart Schmidt

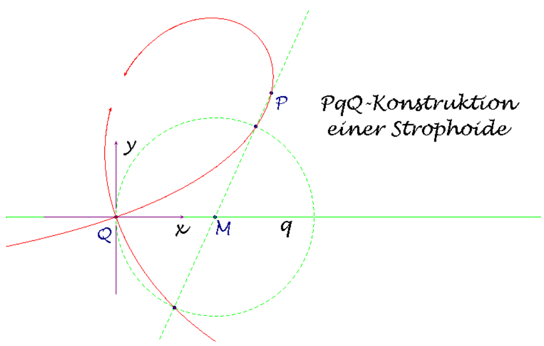
Ausgehend von einer Konstruktionsmöglichkeit wird die Strophoide als Inverses einer gleichseitigen Hyperbel angesprochen und in kartesischen sowie vorläufigen baryzentrischen Koordinaten behandelt. Abschließend wird die Strophoide zu einem Sehnenviereck durch Spiegelung des Mittenkegelschnitts am Umkreis erzeugt und als „non-pivotal isogonal circular cubic"[1] bzgl. des Steiner-Dreiecks des Sehnenvierecks dargestellt.



Konstruktion einer Strophoiden

Betrachtet werden Strophoiden einer erzeugenden Geraden q bzgl. eines Pols $P \notin q$ und eines festen Punktes $Q \in q$ [2].

***PqQ*-Konstruktion einer Strophoide: Zeichnet man um Punkte *M* auf der erzeugenden Geraden *q* einen Kreis durch den festen Punkt $Q \in q$ und von *M* die Verbindungsgerade zum Pol $P \notin q$, dann sind die Schnitte Punkte der Strophoide.**



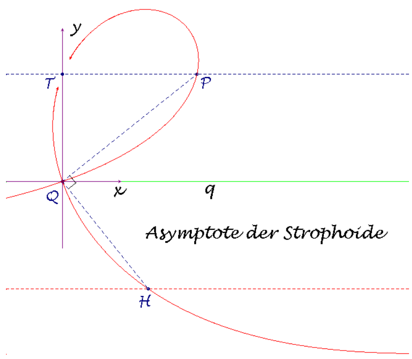
Ist Q der Fußpunkt des Lotes von P auf q, so erhält man die bekannte Form der rechtwinkligen Strophoide.
Für eine erste analytische Behandlung sei der feste Punkt Q der Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems mit der erzeugenden Geraden q als x-Achse; der Pol P habe die Koordinaten $P(u;v)$. Folgt man der PqQ-Konstruktion in diesem Koordinatensystem analytisch, so erhält die Strophoide die Gleichung

$$(v+y)x^2-(v-y)y^2-2uxy=0$$

bzw. in Polarkoordinaten

$$r=\frac{u\sin(2\varphi)-v\cos(2\varphi)}{\sin\varphi}\ .$$

Der feste Punkt Q ist ein Doppelpunkt der Kurve mit orthogonalem Schnitt. Eine Parallele durch P und eine Senkrechte in Q zur erzeugenden Geraden q schneiden sich auf der Strophoide im Punkt $T(0;v)$. Spiegelt man die Parallele an der erzeugenden Geraden, erhält man die Asymptote, die die Strophoide auf einer Senkrechten zu PQ in Q im Punkt $H(\frac{v^2}{u};-v)$ schneidet.



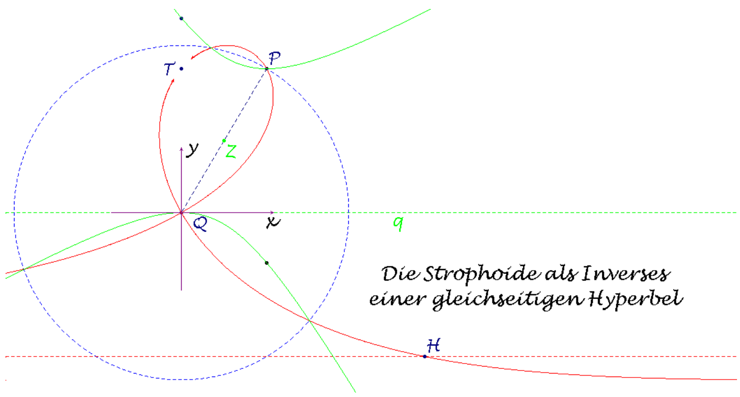
Spiegelt man die Strophoide an einem Kreis um Q, so erhält man eine gleichseitige Hyperbel durch Q. Wählt man einen Inversionskreis durch den Pol P, so erhält die gleichseitige Hyperbel die Gleichung

$$v(x^2-y^2)+(u^2+v^2-2ux)y=0\ .$$

Neben dem festen Punkt Q ist dann auch der Pol P der Strophoide Punkt der gleichseitigen Hyperbel; der Mittelpunkt von P und Q ist das Hyperbelzentrum Z. Die erzeugende Gerade q wird Tangente im festen Punkt Q. Die Strophoidenpunkte T und H ergeben die zentrumsymmetrischen Hyperbelpunkte

$$T'(0;\frac{u^2+v^2}{v}) \quad und \quad H'(u;-\frac{u^2}{v})\ .$$

Satz 1: Eine Strophoide ist das Inverse einer gleichseitigen Hyperbel.

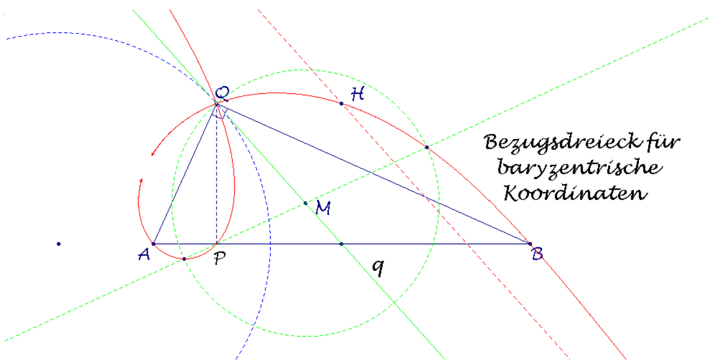


Es sei auf zwei weitere Punkte der Strophoide aufmerksam gemacht: Die Senkrechte zu PQ in P schneidet die Strophoide in

$$A(\frac{r(r-v)}{u};r) \quad und \quad B(\frac{r(r+v)}{u};-r) \quad mit \quad r=\sqrt{u^2+v^2} \ .$$

Der Mittelpunkt dieser beiden Punkte liegt auf der erzeugenden Geraden. Die Strophoide ist als anallagmatische Kurve invariant unter Inversionen an Kreisen um A bzw. B durch Q. Weiterhin sei angemerkt, dass die Strophoide Fußpunktkurve einer Parabel ist, die ihren Brennpunkt im Spiegelpunkt von Q an P hat mit der erzeugenden Geraden q als Leitlinie [3].

Vorläufige baryzentrische Koordinaten



Als vorläufiges Bezugsdreieck für baryzentrische Koordinaten sei das rechtwinklige Dreieck ABQ gewählt mit den Katheten

$$a=BQ \quad und \quad b=AQ \ .$$

Pol der Strophoide ist der Höhenfußpunkt $P(a^2:b^2:0)$, erzeugende Gerade ist die Seitenhalbierende der Hypotenuse mit der Gleichung $x=y$ und dem festen Punkt $Q(0:0:1)$.

Folgt man der PqQ-Konstruktion in baryzentrischen Koordinaten, so erhält die Strophoide die Gleichung

$$a^2y^2(2x+z)-b^2x^2(2y+z)=0 \ .$$

Die Asymptote mit der Gleichung

$$2a^2x-2b^2y+a^2-b^2=0$$

ist eine Parallele zur erzeugenden Geraden im gleichen Abstand wie der Pol. Sie schneidet die Strophoide im Punkt

$$H(a^2-b^2:-a^2+b^2:-2(a^2+b^2)) \ ,$$

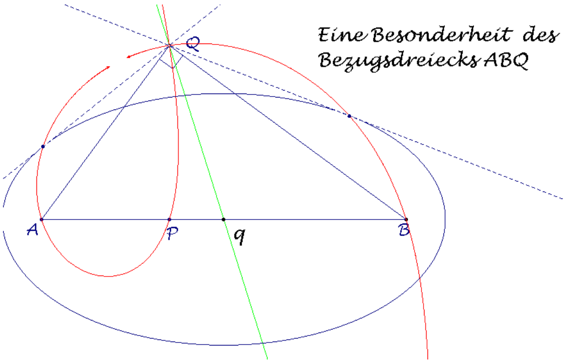
der Spiegelung des Pols an der Mitte der Seitenhalbierenden der Hypotenuse.
Die Isogonalität bzgl. des gewählten Bezugsdreiecks *ABQ*

$$(x:y:z) \quad \to \quad (a^2yz : b^2zx : (a^2+b^2)xy)$$

überführt die Strophoide in den Apollonius-Kreis über der Basis mit der Gleichung

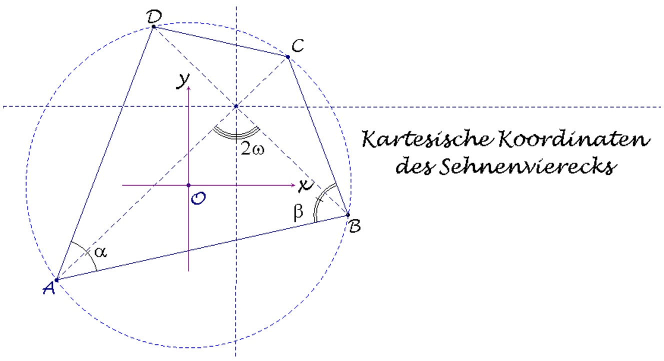
$$(a^2+b^2)(b^2x^2-a^2y^2)+2a^2b^2(x-y)z=0 \ .$$

Erwähnt sei eine weitere Besonderheit des gewählten Bezugsdreiecks *ABQ*. Legt man vom Punkt *Q* Tangenten an Kegelschnitte mit den Brennpunkten *A* und *B*, so liegen die Berührpunkte auf der Strophoide [4].



Die Strophoide eines Sehnenvierecks

Der Rückgriff auf ein Sehnenviereck erscheint etwas unvermutet, aber der Mittenkegelschnitt eines Sehnenvierecks erweist sich als eine gleichseitige Hyperbel durch die Umkreismitte und ergibt nach Spiegelung am Umkreis eine Strophoide. Diese Zusammenhänge seien vorerst kartesisch untersucht.
Will man einem Sehnenviereck ein kartesisches Koordinatensystem anpassen, liegt es nahe, den Ursprung in die Umkreismitte *O* zu legen. Als Achsen seien Parallelen zu den orthogonalen Winkelhalbierenden der Diagonalen des Sehnenvierecks gewählt.



Für ein konvexes, dem Einheitskreis einbeschriebenes Sehnenviereck, das durch die Innenwinkel a, b ($a \le b \le 90°$) und den Diagonalenschnittwinkel $2w$ beschrieben sei, ist dann folgende Koordinatendarstellung der Ecken möglich:

$$A(-\cos(b-w);-\sin(b-w)),\quad B(\cos(a-w);-\sin(a-w)),$$
$$C(-\cos(b+w);\sin(b+w)),\quad B(\cos(a+w);\sin(a+w)).$$

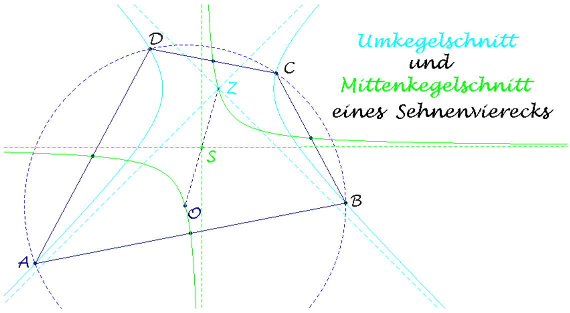
Mit diesen Koordinaten ergibt sich z.B. der Schwerpunkt zu

$$S(x_s;y_s)=S(\frac{1}{2}(\cos a-\cos b)\cos w;\frac{1}{2}(\cos a+\cos b)\sin w)$$

und die gleichseitige Umhyperbel des Sehnenvierecks erhält die Gleichung

$$x^2-y^2-4x_s x+4y_s y-2\cos a\,\cos b\,\cos(2w)=0.$$

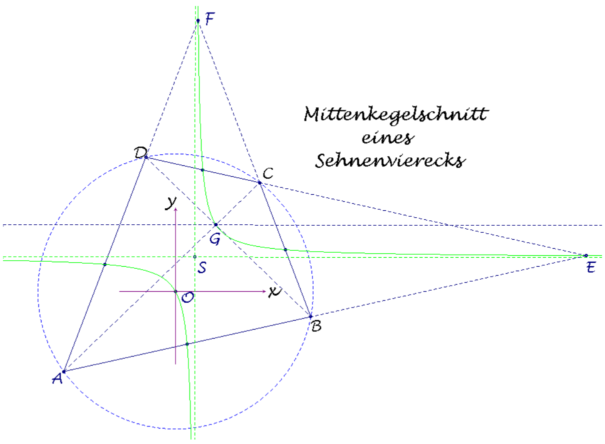
Das Zentrum dieser gleichseitigen Umhyperbel liegt in der Spiegelung der Umkreismitte O am Schwerpunkt S und die Achsen des Kegelschnitts sind Parallelen zu den Koordinatenachsen.



Der Mittenkegelschnitt des Sehnenvierecks als Ortslinie der Zentren aller Umkegelschnitte ist ebenfalls eine gleichseitige Hyperbel mit der einfachen Gleichung

$$y_s x+x_s y-xy=0.$$

Das Zentrum des Mittenkegelschnitts liegt somit im Schwerpunkt S und die Asymptoten verlaufen parallel zu den Koordinatenachsen.



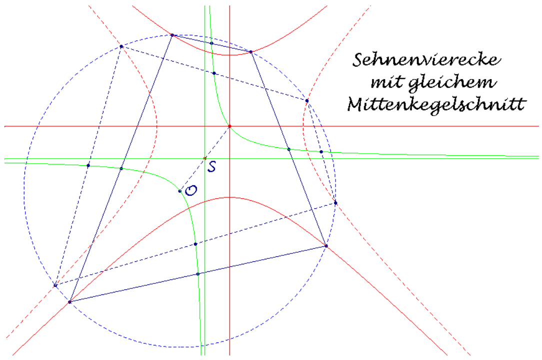
Der Mittenkegelschnitt geht nicht nur durch die Umkreismitte O, sondern auch durch den Diagonalenschnitt

$$G(\frac{x_s}{\cos^2 w};\frac{y_s}{\sin^2 w})$$

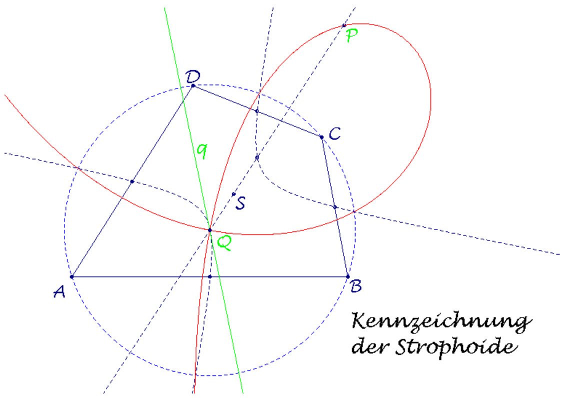
und die Gegenseitenschnitte

$$E\left(-\frac{\sin a+\sin b}{\sin(a-b)}\cos w;\frac{\sin a-\sin b}{\sin(a-b)}\sin w\right)\ ,$$
$$F\left(-\frac{\sin a-\sin b}{\sin(a+b)}\cos w;\frac{\sin a+\sin b}{\sin(a+b)}\sin w\right)\ .$$
Höhenschnitt dieses Diagonaldreiecks *EFG* ist übrigens die Umkreismitte *O*.
Zusammenfassend gilt der folgende Satz:

Satz 2. Der Mittenkegelschnitt eines Sehnenvierecks ist eine gleichseitige Hyperbel durch die Umkreismitte und die Ecken des Diagonaldreiecks mit Zentrum im Schwerpunkt und Asymptoten parallel zu den Winkelhalbierenden der Diagonalen.
Gleichseitige Hyperbeln mit gleichen Asymptoten erzeugen bei vier Schnitten mit einem festen Kreis Sehnenvierecke mit gleichem Mittenkegelschnitt.



Spiegelt man diesen Mittenkegelschnitt als gleichseitige Hyperbel durch die Umkreismitte am Umkreis des Sehnenvierecks, so erhält man eine Strophoide, die wie folgt festgelegt ist: Der feste Punkt *Q* liegt in der Umkreismitte *O*, die erzeugende Gerade *q* ist die Tangente an den Mittenkegelschnitt in der Umkreismitte *O*=*Q* mit der Gleichung $y_s x + x_s y = 0$.



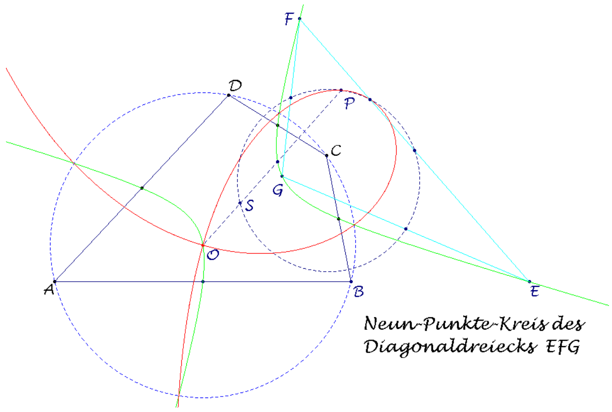
Den Pol *P* der Strophoide erhält man durch Spiegelung der Umkreismitte am Schwerpunkt *S* mit anschließender Spiegelung am Umkreis:

$$P\left(\frac{(\cos a - \cos b)\cos j}{\cos^2 a + \cos^2 b - 2\cos a \cos b \cos(2j)};\right.$$
$$\left.\frac{(\cos a + \cos b)\sin j}{\cos^2 a + \cos^2 b - 2\cos a \cos b \cos(2j)}\right)\ .$$

Der Schwerpunkt *S* liegt als Zentrum einer gleichseitigen Umhyperbel des Diagonaldreiecks *EFG* auf dem Neun-Punkte-Kreis dieses Dreiecks mit der Gleichung

$$2(x^2+y^2) - \frac{x_s^2 + (1-\cos a \cos b)\cos^4 j}{x_s \cos^2 j}\,x$$
$$-\frac{y_s^2 + (1+\cos a \cos b)\sin^4 j}{y_s \sin^2 j}\,y + 1 = 0\ .$$

Dieser Neun-Punkte-Kreis enthält neben dem Schwerpunkt *S* auch den Pol *P* der Strophoide kollinear mit der Umkreismitte *O*=*Q*.



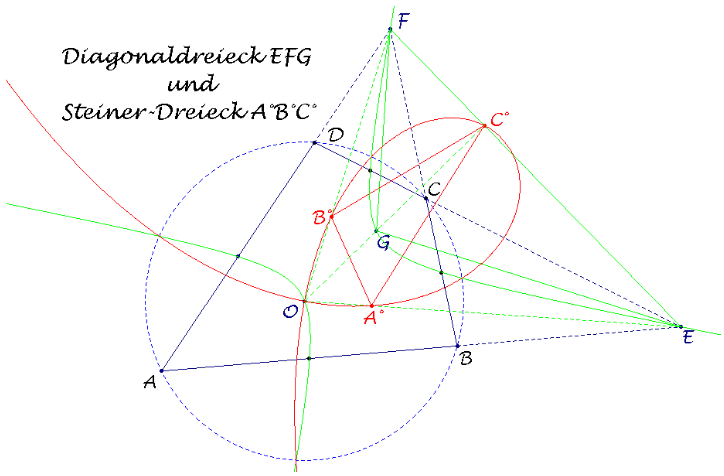
Die bisherigen Zusammenhänge haben Aussagekraft für die Strophoide, die man durch Spiegelung des Mittenkegelschnitts am Umkreis des Sehnenvierecks erhält; sie hat die einfache Gleichung

$$(x^2+y^2)(x_s y + y_s x) - xy = 0\ .$$

Die Ecken des Diagonaldreiecks *EFG* liefern die folgenden Strophoidenpunkte

$$E \to A°\left(\frac{2x_s(1+\cos(a-b))}{const}, \frac{2y_s(1-\cos(a-b))}{const}\right)\ ,$$
$$F \to B°\left(\frac{2x_s(1+\cos(a+b))}{const}, \frac{2y_s(1-\cos(a+b))}{const}\right)\ ,$$
$$G \to C°\left(\frac{x_s \sec^2 j}{x_s^2 \sec^4 j + y_s^2 \csc^4 j}, \frac{y_s \csc^2 j}{x_s^2 \sec^4 j + y_s^2 \csc^4 j}\right)$$
$$\text{mit}\quad const = \sin^2 a + \sin^2 b - 2\sin a \sin b \cos 2j\ .$$

Für ein Sehnenviereck ist der Spiegelpunkt des Diagonalenschnitts am Umkreis der Steiner-Punkt des zugehörigen Vierseits [5]. Dabei bezeichnet der Steiner-Punkt – auch Miquel-Punkt – den gemeinsamen Punkt der Umkreise der Teildreiseite *ABF*, *BCE*, *CDF*, *DAE* des Sehnenvierecks *ABCD*.
Das Dreieck *A°B°C°* lässt sich somit als Steiner-Dreieck des Sehnenvierecks ansprechen, bestehend aus den Steiner-Punkten der Vierecke *ADBC*, *ABDC*, *ABCD*.



Für ein Sehnenviereck lässt sich die gegenseitige Lage von Diagonaldreieck und Steiner-Dreieck präzisieren: Das Steiner-Dreieck ist das Ceva-Dreieck der Umkreismitte bzgl. des Diagonaldreiecks, und da die Umkreismitte der Höhenschnitt des Diagonaldreiecks ist, kann das Steiner-Dreieck als Höhenfußpunktdreieck des Diagonaldreiecks angesprochen werden. Dabei ist der Neun-Punkte-Kreis des Diagonaldreiecks der Umkreis des Steiner-Dreiecks und enthält neben dem Schwerpunkt auch den Pol der Strophoide.

Die Strophoide als „non-pivotal isogonal circular cubic"

Die Strophoide soll abschließend aus der Sicht des Steiner-Dreiecks eines zugehörigen Sehnenvierecks mit baryzentrischen Koordinaten untersucht werden. Geht man von einer Strophoide aus und spiegelt sie z.B. an einem Kreis um den festen Punkt Q durch den Pol P, so erhält man eine gleichseitige Hyperbel durch Q und P mit Zentrum im Punkt S, zu der sich Sehnenvierecke im Inversionskreis betrachten lassen, die diese gleichseitige Hyperbel als Mittenkegelschnitt haben. Wählt man eines dieser Sehnenvierecke als $ABCD$ unter Berücksichtigung der obigen Indizierung aus, so ist das zugehörige Steiner-Dreieck $A°B°C°$ jetzt Bezugsdreieck. Die Seitenlängen seien

$$A°B° = c, \quad B°C° = a, \quad C°A° = b \ .$$

Die Umkreismitte des Sehnenvierecks muss nach den obigen Ausführungen in die Ankreismitte der Seite $A°B°$ fallen:

$$Q = O(a:b:-c) \ .$$

Die beiden anderen Ankreismitten sind die Gegenseitenschnitte des Sehnenvierecks:

$$E(a:-b:c), \quad F(-a:b:c) \ ,$$

und die Inkreismitte ist der Diagonalenschnitt des Sehnenvierecks:

$$G(a:b:c) \ .$$

Der Radius des Inversionskreises, der $A°$ in E, $B°$ in F und $C°$ in G überführt, ist

$$r=\sqrt{\frac{2abc}{a+b-c}}\ .$$

Das inverse Bild der Strophoide ist als Mittenkegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel durch die Ecken des Diagonaldreiecks *EFG*, deren Zentrum im Schwerpunkt *S* auf dem Neun-Punkte-Kreis des Diagonaldreiecks, dem Umkreis des Steiner-Dreiecks, liegt. Dieser Umkreis ist das isogonale Bild der Ferngeraden, so dass sich das Zentrum *S* des Mittenkegelschnitts als isogonales Bild eines Fernpunktes z.B. folgendermaßen darstellen lässt:

$$S^*(b-g:g-a:a-b)\quad mit\quad S\left(\frac{a^2}{b-g}:\frac{b^2}{g-a}:\frac{c^2}{a-b}\right).$$

Spiegelt man *Q* an *S*, so erhält man den Pol

$$P\left(\frac{a}{-c(g-a)-b(a-b)}:\frac{b}{a(a-b)+c(b-g)}:\frac{c}{b(g-b)+a(g-a)}\right)$$

und der Mittenkegelschnitt erhält die Gleichung

$$(b-g)b^2c^2x^2+(g-a)c^2a^2y^2+(a-b)a^2b^2z^2=0\ .$$

Die Tangente im Punkt *Q*=*O* ist die erzeugende Gerade der Strophoide:

$$q:\quad (b-g)bcx+(g-a)cay-(a-b)abz=0.$$

Der Fernpunkt dieser erzeugenden Geraden ist das isogonale Bild des Pols der Strophoide, der ebenfalls auf dem Umkreis des Steiner-Dreiecks liegt.

Spiegelt man den Mittenkegelschnitt nun am Inversionskreis, so erhält man die Strophoide mit der Gleichung

$$\begin{aligned}&a(-c(g-a)+b(a-b))(c^2y^2+b^2z^2)x\\&+b(a(a-b)-c(b-g))(c^2x^2+a^2z^2)y\\&+c(-b(b-g)-a(g-a))(b^2x^2+a^2y^2)z\\&+2abc(-a(b-g)-b(g-a)+c(a-b))xyz=0\,.\end{aligned}$$

Betrachtet man den Punkt

$$\begin{aligned}R(u:v:w)=R(a(-c(g-a)+b(a-b)):b(a(a-b)-c(b-g))\\:c(-b(b-g)-a(g-a)))\end{aligned}$$

und benutzt die Conway-Abkürzungen

$$2S_A=-a^2+b^2+c^2,\quad 2S_B=a^2-b^2+c^2,\quad 2S_C=a^2+b^2-c^2\ ,$$

so kann die Gleichung der Strophoiden einfacher geschrieben werden:

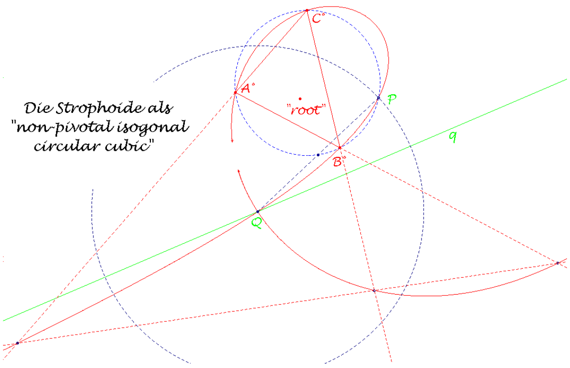
$$\begin{aligned}&u(c^2y^2+b^2z^2)x+v(a^2z^2+c^2x^2)y+w(b^2x^2+a^2y^2)z\\&+2(S_Au+S_Bv+S_Cw)xyz=0\ .\end{aligned}$$

Diese Gleichung weist die Strophoide nach J.-P. Ehrmann und Bernard Gibert [1] als „non-pivotal isogonal circular cubic“ aus. Sie wird isogonal bzgl. des Steiner-Dreiecks auf sich abgebildet. Die Verbindungsgeraden isogonaler Kurvenpunkte haben keinen gemeinsamen Punkt („pivot“); die Mittelpunkte isogonaler Kurvenpunkte liegen übrigens auf der erzeugenden Geraden. Da die Kurve die isogonalen absoluten Kreispunkte enthält, kann sie als Zirkularkurve angesprochen werden.

Über „isogonal non-pivotal isocubics“ findet sich bei den Autoren der Satz, dass diese Kurven Ortslinien von Punkten sind, deren Fußpunktkreise orthogonal zu einem festen Kreis

verlaufen. Dieser Kreis entartet für die Strophoide eines Sehnenvierecks in der erzeugenden Geraden.
Eine kennzeichnende Größe von „non-pivotal isogonal circular cubics“ ist nach obigen Autoren „the root“ im Punkt *R*, der nicht auf der Strophoide liegen muss. Die zugehörige Tripolare schneidet die Seiten des Steiner-Dreiecks auf der Strophoide. Betrachtet man das Vierseit aus dieser Tripolaren und den Seitengeraden des Steiner-Dreiecks, so liegt der Miquel-Punkt im Pol der Strophoide, und die Strophoide ist die Ortslinie der Brennpunkte von einbeschriebenen Kegelschnitten dieses Vierseits.
Eine Strophoide ist bei vorgegebenem Bezugsdreieck durch „the root“ *R* eindeutig bestimmt. Eine zugehörige Konstruktion findet sich in [1]. Auch ohne Rückgriff auf Sehnenvierecke lassen sich zu einer Strophoiden Bezugsdreiecke mit zugehörigem Punkt *R* aufzeigen, wie zusammenfassend aus den obigen Ausführungen folgt:

Satz 3. Wählt man zu einer Strophoide (*PqQ*-Konstruktion) drei weitere Schnitte eines Kreises durch Pol *P* und Mitte *PQ* als Bezugsdreieck und den Tripol der Verbindungsgeraden der Seitenschnitte mit der Strophoide als „the root“, dann ist die Strophoide die zugehörige „non-pivotal isogonal circular cubic“.



Literatur

[1] J.-P. Ehrmann and B. Gibert: Special Isocubics in the Triangle Plane. http://perso.wanadoo.fr/bernard.gibert/...
[2] E. H. Lockwood: A Book of Curves. – Cambridge, At the University Press 1961.
[3] H. Schmidt: Ausgewählte höhere Kurven. – Kesselringsche Verlagsbuchhandlung Wiesbaden,1949.
[4] E. Schmidt: Strophoiden. – http://eckartschmidt.de.
[5] E. Schmidt: Steiner-Geometrie des Sehnen-Vierecks. – http://eckartschmidt.de.

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de