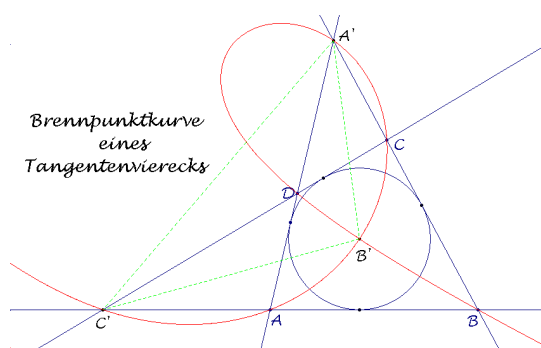


Die Brennpunktkurve eines Tangentenvierecks

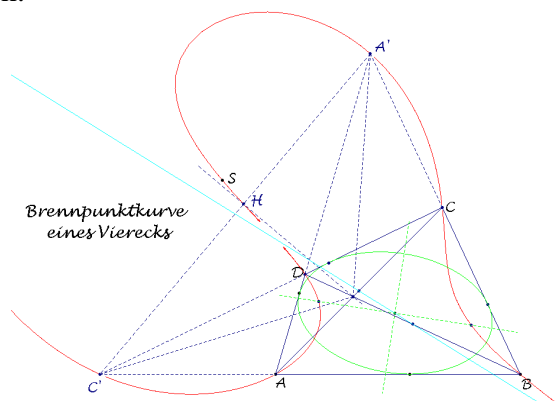
Eckart Schmidt

Die Brennpunkte einbeschriebener Kegelschnitte eines Vierecks liegen auf einer Kurve dritter Ordnung [Gib.4.1.2]. Diese Kurve wird hier für Tangentenvierecke als Strophoide nachgewiesen. Die Geometrie dieser Kurve speziell für Sehnen-Tangentenvierecke ist Gegenstand dieser Ausarbeitung. – Gearbeitet wird in baryzentrischen Koordinaten spezieller Bezugsdreiecke.



Die Brennpunktkurve

Für Dreiecke liegen die Brennpunkte einbeschriebener Kegelschnitte isogonal. Ein einbeschriebener Kegelschnitt eines Vierecks $ABCD$ ist auch jedem der vier Teildreiseite ABA' , BCC' , CDA' , DAC' einbeschrieben, dabei seien A' und C' die Gegenseitenschnitte des Vierecks. Die Brennpunkte einbeschriebener Kegelschnitte eines Vierecks liegen somit isogonal bzgl. der vier Teildreiseite. Damit lässt sich die Gleichung der Brennpunktkurve – kurz BP -Kurve – bestimmen.



Wählt man eines der Teildreiseite als Bezugsdreieck für baryzentrische Koordinaten (Seitenlängen a, b, c) und beschreibt

die vierte Seite als Tripolare eines Punktes $P(u : v : w)$, so erhält die BP -Kurve die Gleichung [Gib.4.1.2]

$$2(uS_A + vS_B + wS_C) + \sum_{zykl} ux(c^2y^2 + b^2z^2) = 0 .$$

Benutzt werden die Conway-Abkürzungen mit

$$2S_A = -a^2 + b^2 + c^2, \quad 2S_B = a^2 - b^2 + c^2, \quad 2S_C = a^2 + b^2 - c^2,$$

$$\text{ sowie } S = \sqrt{S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A} .$$

Einige Eigenschaften der BP -Kurve seien hier angemerkt: Die Zentren einbeschriebener Kegelschnitte eines Vierecks sind bekanntlich Punkte der Newton-Geraden, der Verbindungsgeraden der Diagonalenmitten. Die Asymptote der BP -Kurve ist parallel zur Newton-Geraden [Ehr.7.1]. Die Ecken des Vierecks liegen ebenso auf der BP -Kurve wie die Gegenseitenschnitte A' und C' ; der dritte Kurvenschnitt von $A'C'$ ist Höhenfußpunkt H des Diagonaldreiecks. Die BP -Kurve enthält weiterhin den Miquel-Punkt S (auch Steiner-Punkt) des Vierecks als Brennpunkt der Berührparabel des Vierecks [Ehr.7.4].

Das Tangentenviereck

Für eine baryzentrische Behandlung von Tangentenvierecken sei – wie in der ersten Abbildung angedeutet – ein spezielles Bezugsdreieck gewählt, das aus den Gegenseitenschnitten A' und C' sowie der Inkreismitte B' besteht (Seitenlängen a, b, c). Gibt man dem Inkreis den Radius r , so hat dieser die Gleichung

$$c^2x^2 + 2S_Bxz + a^2z^2 - r^2(x + y + z)^2 = 0 .$$

Die Seitengeraden des Vierecks sind dann die Tangenten von A' und C' an den Inkreis; die Berührpunkte sind:

$$P_{a,c} \left(-a^2 : S_C \pm \frac{S\sqrt{a^2 - r^2}}{r} : S_B \pm \frac{rS}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right),$$

$$P_{b,d} \left(S_B \pm \frac{rS}{\sqrt{c^2 - r^2}} : S_A \pm \frac{S\sqrt{c^2 - r^2}}{r} : -c^2 \right).$$

In folgenden Schnittpunkten der Tangenten liegen dann die Ecken des Tangentenvierecks:

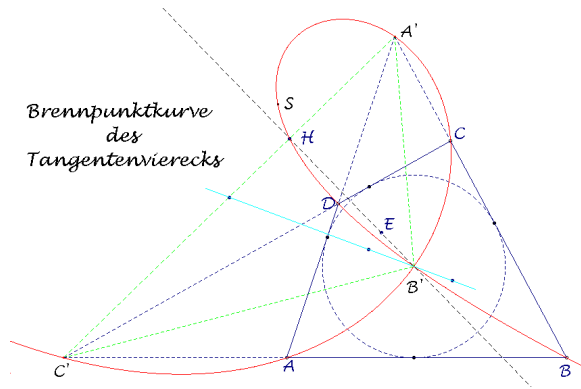
$$A, C \left(\frac{ra^2}{rS_C \pm S\sqrt{a^2 - r^2}} : -1 : \frac{rc^2}{rS_A \pm S\sqrt{c^2 - r^2}} \right),$$

$$B, D \left(\frac{ra^2}{rS_C \pm S\sqrt{a^2 - r^2}} : -1 : \frac{rc^2}{rS_A \pm S\sqrt{c^2 - r^2}} \right).$$

Das Tangentenviereck $ABCD$ – kurz T-Viereck – und sein Berührsehnenviereck $P_aP_bP_cP_d$ – kurz BS-Viereck – haben den gleichen Diagonalschnitt

$$E(r^2S_C : S^2 - r^2b^2 : r^2S_A),$$

und das Diagonaldreieck $A'EC'$ ist selbstpolar bzgl. des Inkreises.



Für Punkte der *BP*-Kurve müssen die isogonalen Bilder bzgl. der Teildreiseite des Vierecks übereinstimmen. Die Auswertung dieser Isogonalitätsgleichheit erweist sich als unangenehm. Die isogonalen Bilder eines Punktes $X(x:y:z)$ bzgl. der Teildreiseite ABA' und CDA'

$$(a^2r(c^2y + 2S_Az)(rS_C \pm S\sqrt{a^2 - r^2})x - a^4(r^2b^2 - S^2)z^2):$$

$$(((r^2 - a^2)S^2 - r^2S_C^2)x - r^2a^2S_Cy \mp rS\sqrt{a^2 - r^2}(a^2y + 2S_Cx))(c^2y + 2S_Az):$$

$$c^2(S^2a^2 - r^2(S^2 - S_C^2)x + r^2a^2S_Cy \pm rS\sqrt{a^2 - r^2}(a^2y + 2S_Cx))z)$$

stimmen überein, wenn die Punkte auf einer Kurve mit der einfachen Gleichung

$$\boxed{y(c^2x^2 - a^2z^2) + 2xz(S_Ax - S_Cz) = 0}$$

liegen. Eine entsprechende Auswertung bzgl. der Teildreiseite BCC' und DAC' führt zu der gleichen Ortslinie. Damit erhält die *BP*-Kurve eine sehr überschaubare Form. Sie enthält die Ecken A, B, C, D des *T*-Vierecks als auch die Gegenseitenschnitte A' und C' sowie die Inkreismitte B' . Weiterhin ist – wie schon erwähnt – der Höhenfußpunkt des Diagonaldreiecks

$$H(S_C : 0 : S_A)$$

ein Kurvenpunkt, ebenso wie der Miquel-Punkt

$$S(a^2 : 2S_B : c^2)$$

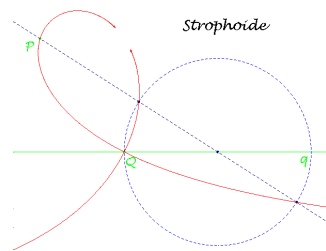
des Vierecks im Schnitt der Umkreise der Teildreiseite ABA' , BCC' , CDA' , DAC' . Die Newton-Gerade ist Seitenhalbierende des Bezugsdreiecks mit dem Fernpunkt $F(1:-2:1)$, der auch Fernpunkt der *BP*-Kurve ist. Damit ist die Asymptote eine Parallele zur Newton-Geraden.

Die Isogonalitäten bzgl. der Teildreiseite vertauschen auf der Kurve die Brennpunkte der einbeschriebenen Kegelschnitte. So wird z.B. dem Miquel-Punkt S der Fernpunkt F der *BP*-Kurve zugeordnet und dem Punkt H als zweiter Brennpunkt $(a^2S_A : -2S_AS_C : c^2S_C)$.

Die Brennpunktkurve als Strophoide

Die Strophoide einer Geraden – der erzeugenden Geraden q – ist festgelegt durch einen festen Punkt Q auf der erzeugenden Geraden q und einen Pol P , der nicht auf der erzeugenden Geraden liegt [Loc.16]. Betrachtet man zu Punkten der erzeugenden Geraden q Kreise durch den festen Punkt Q und

Geraden durch den Pol P , so ergeben die Schnitte die Strophoide.



In dem oben benutzten Bezugsdreieck $A'B'C'$ sei die erzeugende Gerade die Seitenhalbierende, d.h. die Newton-Gerade des T -Vierecks; der feste Punkt liege in der Inkreismitte B' und der Pol im Miquel-Punkt S . Wählt man jetzt Punkte $M(m:1:m)$ auf der erzeugenden Geraden mit Kreisen

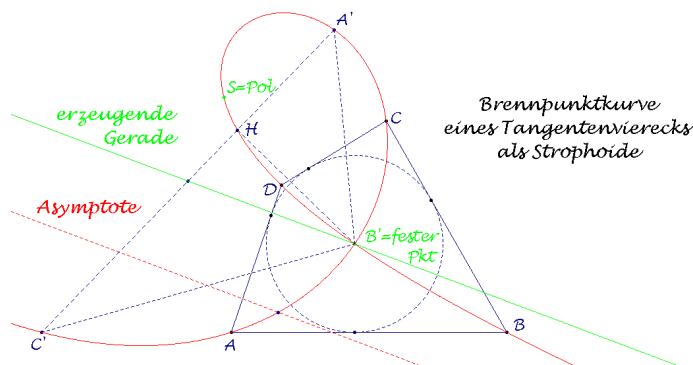
$$k: c^2x^2 + 2S_Bxz + a^2z^2$$

$$-2m(S_Bx^2 + (c^2 + S_B)xy + (a^2 + c^2)zx + (a^2 + S_B)yz + S_Bz^2) = 0$$

durch den festen Punkt B' und Geraden

$$g: (c^2 - 2mS_B)x + m(a^2 - c^2)y - (a^2 - 2mS_B)z = 0$$

durch den Miquel-Punkt als Pol und eliminiert für die Schnittpunkte den Parameter m dann ergibt sich als Gleichung der Strophoide die Gleichung der BP -Kurve.



Satz 1. Die Brennpunktkurve eines Tangentenvierecks ist eine Strophoide mit der Newton-Geraden als erzeugender Geraden, der Inkreismitte als festem Punkt und dem Miquel-Punkt als Pol.

Streckt man die erzeugende Gerade vom Pol mit dem Faktor 2, so erhält man die Asymptote; sie schneidet die Strophoide im Punkt

$$\left(\frac{-a^2}{a^2 + S_B} : 2 \frac{a^2 + c^2}{a^2 - c^2} : \frac{c^2}{c^2 + S_B} \right).$$

Das Bezugsdreieck $A'B'C'$ zeichnet sich auch dadurch aus, dass die Brennpunktkurve das isogonale Bild des Apollonius-Kreises über $A'C'$ ist; seine Gleichung lautet

$$b^2c^2x^2 + 2c^2S_Cxy - 2a^2S_Ayz - a^2b^2z^2 = 0.$$

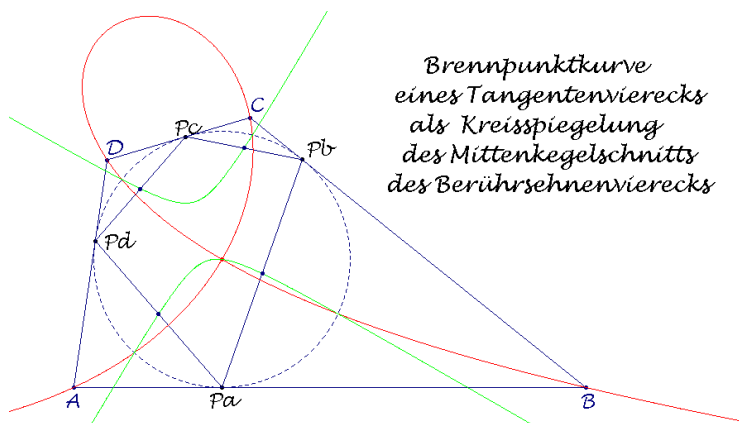
Satz 2. Die Brennpunktkurve eines Tangentenvierecks ist das isogonale Bild des Apollonius-Kreises über der Basis des Dreiecks aus den Gegenseitenschnitten und der Inkreismitte.

Spiegelt man eine Strophoide an einem Kreis um den Knotenpunkt – hier die Inkreismitte – so ergibt sich bekanntlich eine gleichseitige Hyperbel. Wählt man dazu hier den Inkreis, so erhält man eine gleichseitige Hyperbel mit der Gleichung

$$c^2x^2 - a^2z^2 - r^2(x - z)(x + y + z) = 0$$

und den Fernpunkten $(a : -a \pm c : \mathbf{m})$. Die Asymptoten verlaufen parallel zu den Tangenten im Knoten der Strophoide. Diese gleichseitige Hyperbel erweist sich als Mittenkegelschnitt des BS -Vierecks $P_aP_bP_cP_d$.

Satz 3. Spiegelt man die Brennpunktkurve eines Tangentenvierecks am Inkreis, so erhält man den Mittenkegelschnitt des Berührsehnenvierecks.



Die Spiegelung am Inkreis überführt die Ecken des T -Vierecks in die Seitenmitten seines BS -Vierecks und die Gegenseitenschnitte in die Diagonalenmitten.

Steiner-Dreiecke

Die Miquel-Punkte der Vierecke $ABDC$, $ABCD$, $ADBC$ werden auch als Steiner-Punkte angesprochen; sie seien hier mit S_a , S , S_c bezeichnet und bilden das Steiner-Dreieck S_aSS_c eines Vierecks $ABCD$.

Definition: Die Steiner-Inversion eines Vierecks besteht aus der Spiegelung an einer Geraden durch den Miquel-Punkt und einer Spiegelung an einem Kreis um den Miquel-Punkt, so dass die Gegenecken des Vierecks vertauscht werden.

Die Steiner-Inversion vertauscht nicht nur die Gegenecken eines Vierecks, sondern auch die Gegenseitenschnitte und die Steiner-Punkte S_a und S_c .

Für T -Vierecke ist die Inkreismitte B' Fixpunkt der Steiner-Inversion mit der Zuordnung

$$(x : y : z) \rightarrow (a^2(c^2xy - z(a^2x - b^2x + a^2z)) : 2b^2S_Bxz + y(c^2(c^2 - b^2)x - a^2c^2y + a^2(a^2 - b^2)z) : c^2(a^2yz - x(c^2x - b^2z + c^2z))) .$$

Sie vertauscht auf der BP -Kurve eines T -Vierecks auch die Brennpunkte einbeschriebener Kegelschnitte.

Satz 4. Die Steiner-Inversion eines Tangentenvierecks bildet die Brennpunktkurve unter Vertauschung der Brennpunkte auf sich ab.

Es lohnt sich, auch das Steiner-Dreieck H_aHH_c des BS -Vierecks zu betrachten, bestehend aus den Miquel-Punkten der Vierecke $P_aP_bP_dP_c$, $P_aP_bP_cP_d$, $P_aP_dP_bP_c$. Für Sehnenvierecke erhält man den Miquel-Punkt durch Spiegelung des Diagonalschnitts am Umkreis. So lassen sich hier neben $H(S_C : 0 : S_A)$ auch die Steiner-Punkte H_a und H_c leicht berechnen:

$$H_{a,c} \left(1 \pm \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{\sqrt{c^2 - r^2}} : \frac{2(S_B - r^2 \pm \sqrt{(a^2 - r^2)(c^2 - r^2)})}{r^2} : 1 \pm \frac{\sqrt{c^2 - r^2}}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right) .$$

Die Ecken des BS -Steiner-Dreiecks liegen auf der Brennpunktkurve des zugehörigen T -Vierecks. Dabei erweist sich der Diagonalschnitt E als Inkreismitte und der Doppelpunkt der Strophoide als Ankreismitte. Der Steiner-Punkt S des T -Vierecks liegt auf dem Umkreis des BS -Steiner-Dreiecks. Seine Simson-Gerade ist ebenso eine Senkrechte zur erzeugenden Geraden wie die Gerade der Fußpunkte vom Steiner-Punkt S auf die Seiten des T -Vierecks. Vor diesem Hintergrund lässt sich die Strophoide auch bzgl. des BS -Steiner-Dreiecks betrachten.

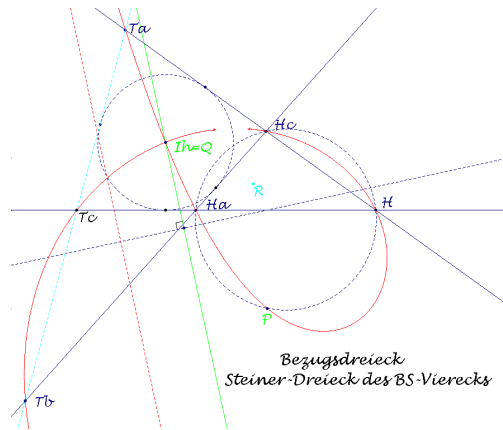
Das BS -Steiner-Dreieck als Bezugsdreieck

In diesem Abschnitt sei das Steiner-Dreieck H_aHH_c Bezugsdreieck (Seitenlängen $a=HH_c$, $b=H_aH_c$, $c=HH_a$). Dann lässt sich die Brennpunktkurve als Strophoide wie folgt ansprechen: Der Pol P ist ein Punkt des Umkreises; der feste Punkt Q ist die Ankreismitte $I_h(a : -b : c)$ und die erzeugende Gerade ist eine Senkrechte zur Simson-Geraden des Pols P durch den festen Punkt Q . Gibt man der erzeugenden Geraden die Gleichung

$$Ix + \frac{Ia + c}{b}y + z = 0 \quad (\text{Parameter } I) ,$$

dann gehört dazu der Pol

$$P \left(\frac{a^2(I - 1)}{-Ia + b - c} : b : \frac{c^2(I - 1)}{Ia - Ib + c} \right) .$$



Folgt man jetzt der Strophoidenkonstruktion analytisch, so ergibt sich die Gleichung

$$(1a + b + c)(c^2y^2 + b^2z^2)x + b(1 + l)(c^2x^2 + a^2z^2)y + (1a + lb + c)(b^2x^2 + a^2y^2)z + 2b(1a^2 + lab + bc + c^2)xyz = 0 .$$

Diese Gleichung weist die Strophoide als „non-pivotal isogonal circular cubic“ aus [Gib;4.1.2] zu einem Punkt

$$R(1a + b + c : (1 + l)b : 1a + lb + c) ,$$

der als „the root“ bezeichnet wird. Die Tripolare dieses Punktes mit der Gleichung

$$\frac{b}{1a + b + c}x + \frac{1}{1 + l}y + \frac{b}{1a + lb + c}z = 0$$

verbindet die Schnitte $T_{a,b,c}$ der Kurve mit den Seitengeraden des Bezugsdreiecks; sie ist eine Tangente an den Ankreis.

Satz 5. Die Brennpunktkurve eines Tangenten-Vierecks ist eine „non-pivotal isogonal circular cubic“ des Steiner-Dreiecks des Berührsehnenvierecks.

Ohne weitere Begründung sei angemerkt, dass die Isogonalität bzgl. des BS -Steiner-Dreiecks auch die Brennpunkte vertauscht. Das Vierseit aus den Seiten des Steiner-Dreiecks und der Tripolaren des R -Punktes ist ebenfalls ein T -Viereck, dessen Brennpunktkurve mit der des Ausgangs- T -Vierecks übereinstimmt. Auch auf dieser Brennpunktkurve liegen die Brennpunkte isogonal bzgl. des BS -Steiner-Dreiecks. Diese Zusammenhänge werden im letzten Abschnitt für Sehnen-Tangentenvierecke analytisch nachvollziehbar dargestellt.

Das Sehnen-Tangentenviereck

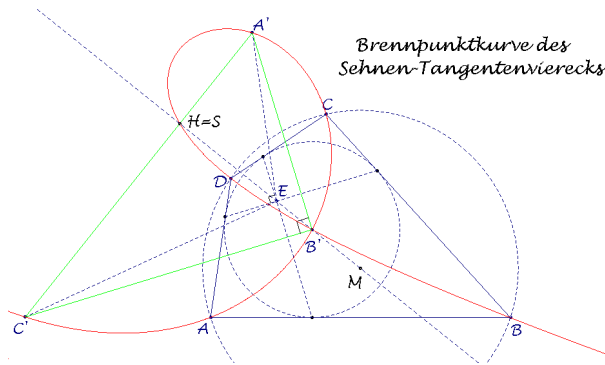
Das Bezugsdreieck sei wieder das eingangs benutzte Dreieck $A'B'C'$. Ein T -Viereck wird bekanntlich zum Sehnen-Tangentenviereck – kurz ST -Viereck –, wenn die Berührdiagonalen

$$P_aP_c : (r^2 - S_B)x + r^2y + (r^2 - a^2)z = 0 ,$$

$$P_bP_d : (r^2 - c^2)x + r^2y + (r^2 - S_B)z = 0$$

orthogonal sind. Dies ist der Fall, wenn

$$S_B = 0, \text{ d.h. } b^2 = a^2 + c^2, S_A = c^2, S_C = a^2, S^2 = S_A S_C = a^2 c^2.$$



Damit ist das Bezugsdreieck $A'B'C'$ im Punkt B' , der Inkreismitte des ST -Vierecks rechtwinklig; die Katheten verlaufen parallel zu den Berührdiagonalen. Diesbezüglich sind die Berechnungen zum T -Viereck zu überarbeiten. Dabei kann man sich auf eine Kennzeichnung durch die Katheten a und c des Bezugsdreiecks beschränken. So ergeben sich die Ecken des BS -Vierecks und des ST -Vierecks zu:

$$P_{a,c}(\mathbf{mar} : \pm ar + c\sqrt{a^2 - r^2} : \frac{cr^2}{\sqrt{a^2 - r^2}}),$$

$$P_{b,d}(\frac{ar^2}{\sqrt{c^2 - r^2}} : \pm cr + a\sqrt{c^2 - r^2} : \mathbf{mcr}),$$

$$A, C(\frac{ra}{ra \pm c\sqrt{a^2 - r^2}} : -1 : \frac{rc}{rc \mathbf{ma}\sqrt{c^2 - r^2}}),$$

$$B, D(\frac{ra}{ra \pm c\sqrt{a^2 - r^2}} : -1 : \frac{rc}{rc \pm a\sqrt{c^2 - r^2}}).$$

Die Umkreismitte

$$M(a^2 r^2 : -a^2 c^2 : c^2 r^2)$$

liegt mit der Inkreismitte $B'(0:1:0)$ und dem gemeinsamen Diagonalenschnitt

$$E(a^2 r^2 : -a^2 r^2 + a^2 c^2 - c^2 r^2 : c^2 r^2)$$

von ST - und BS -Viereck auf der Höhe des Bezugsdreiecks. Der Höhenschnitt $H(a^2:0:c^2)$ ist jetzt gemeinsamer Miquel-Punkt von ST - und BS -Viereck.

Nach Satz 1 ist die BP -Kurve eines ST -Vierecks eine Strophoide, jetzt mit dem Pol im Höhenfußpunkt H und der einfachen Gleichung

$$\boxed{a^2(2x+y)z^2 - c^2(z+y)x^2 = 0}.$$

Erzeugende Gerade ist die Newton-Gerade und fester Punkt die Inkreismitte. Die Asymptote mit der Gleichung

$$2a^2 x + (a^2 - c^2)y - 2c^2 z = 0$$

schneidet die Strophoide im Punkt

$$(-a^2 + c^2 : 2(a^2 + c^2) : a^2 - c^2).$$

Nach Satz 2 ist die BP -Kurve eines ST -Vierecks das isogonale Bild des Apollonius-Kreises über der Basis des Bezugsdreiecks.

Nach Satz 3 erhält man die BP -Kurve eines ST -Vierecks, indem man den Mittenkegelschnitt des BS -Vierecks an seinem

Umkreis, dem Inkreis des ST -Vierecks, spiegelt. Zentrum dieses Mittenkegelschnitts ist der Mittelpunkt von Inkreismitte B' und Diagonalschnitt E ; die Achsen dieser gleichseitigen Hyperbel sind Parallelen der Berührdiagonalen des ST -Vierecks.

Weiterhin ertweit sich die BP -Kurve eines ST -Vierecks als invariant unter Spiegelungen an Kreisen um die Gegenseitenschnitte A' und C' durch die Inkreismitte B' :

$$(x : y : z) \rightarrow \left(\frac{a^2 z^2 - c^2 (y + z)x}{c^2 (x + y + z)} : y : z \right),$$

$$(x : y : z) \rightarrow \left(x : y : \frac{c^2 x^2 - a^2 (x + y)z}{a^2 (x + y + z)} \right).$$

Satz 6. Die Brennpunktkurve eines Sehnen-Tangentenvierecks ist invariant unter Spiegelungen an Kreisen um die Gegenseitenschnitte durch die Inkreismitte.

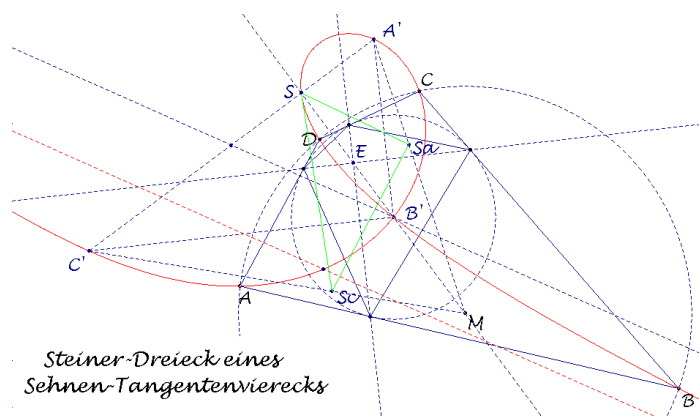
Für ST -Vierecke können neben $S = H(a^2 : 0 : c^2)$ auch die Steiner-Punkte S_a und S_c überschaubar angegeben werden:

$$S_a \left(\frac{a^4 r^2}{r^2 b^2 - a^2 c^2} : -a^2 : r^2 \right) \quad \text{und} \quad S_c \left(r^2 : -c^2 : \frac{c^4 r^2}{r^2 b^2 - a^2 c^2} \right).$$

Sie sind die Bildpunkte der Gegenseitenschnitte A' und C' bei Spiegelung am Umkreis des ST -Vierecks und liegen in den Schnitten der Thales-Kreise über $A'C'$ und EM . Die Steiner-Inversion, die die Brennpunkte vertauscht, ordnet einem Punkt $X(x : y : z)$ jetzt einfacher folgenden Bildpunkt zu:

$$(a^2(a^2 z^2 - c^2 x(y + z)) : a^2 c^2 y(x + y + z) : c^2(c^2 x^2 - a^2 z(x + y))).$$

Der Diagonalschnitt E ist Inkreismitte des Steiner-Dreiecks und die Umkreismitte M eine Ankreismitte des Steiner-Dreiecks. Die weiteren Ankreismitten des Steiner-Dreiecks sind die Gegenseitenschnitte A' und C' des ST -Vierecks.

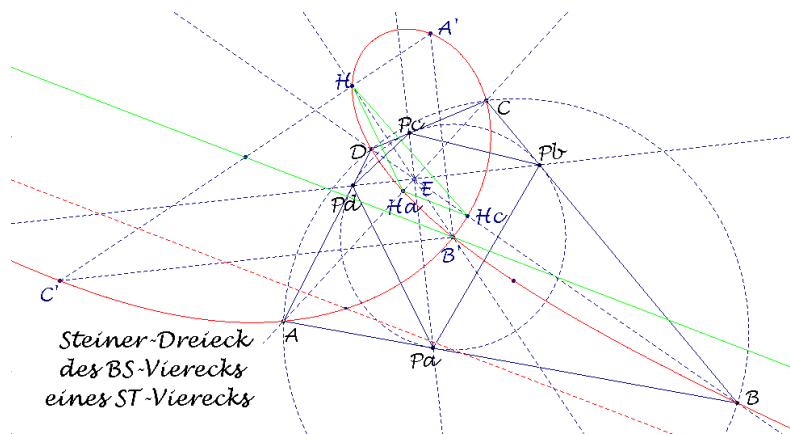


Satz 7. Das Steiner-Dreieck eines Sehnen-Tangentenvierecks ist das Höhenfußpunktdreieck des Dreiecks aus den Gegenseitenschnitten und der Umkreismitte; Höhenschnittpunkt ist der Diagonalschnittpunkt.

Das Steiner-Dreieck $H_a H H_c$ des zugehörigen BS -Vierecks $P_a P_b P_c P_d$ hat neben $H(a^2:0:c^2)=S$ die weiteren Steiner-Punkte

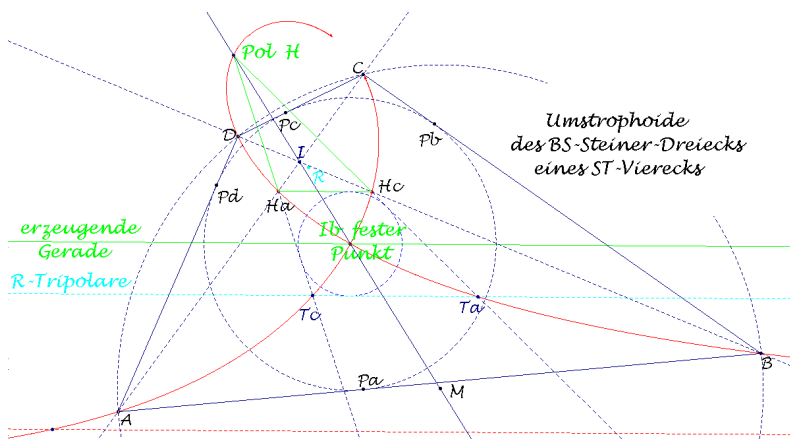
$$H_{a,c} \left(1 \pm \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{\sqrt{c^2 - r^2}} : \frac{2(\pm\sqrt{(a^2 - r^2)(c^2 - r^2)} - r^2)}{r^2} : 1 \pm \frac{\sqrt{c^2 - r^2}}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right).$$

Die Steiner-Punkte H_a und H_c des BS -Vierecks liegen ebenfalls auf der BP -Kurve im dritten Schnitt mit den Diagonalen des ST -Vierecks. Außerdem sind sie Punkte des Thales-Kreises über dem Diagonalschnitt E und der Inkreismitte B' . Bemerkenswert ist, dass ihre Verbindungsgerade parallel zur Steiner-Geraden des ST -Vierecks, d.h. parallel zur erzeugenden Geraden der Umstrophoide verläuft.



Aus der Sicht des Steiner-Dreiecks $H_a H H_c$ des BS -Vierecks lässt sich zusammenfassend der folgende Satz für ST -Vierecke festhalten:

Satz 8. Die Brennpunktkurve eines Sehnen-Tangentenvierecks ist eine Um-Strophoide des Steiner-Dreiecks des zugehörigen Berührsehnen-vierecks. Der Pol liegt in einem Eckpunkt, der feste Punkt in der zugehörigen Ankreismitte und die erzeugende Gerade ist eine Parallele zur Gegenseite durch die Ankreismitte.



Das *BS*-Steiner-Dreieck eines *ST*-Vierecks als Bezugsdreieck

Wählt man vor dem Hintergrund von Satz 8 erneut das Steiner-Dreieck H_aHH_c des *BS*-Vierecks, jetzt für ein *ST*-Viereck, als Bezugsdreieck (Seitenlängen $a=HH_2$, $b=H_1H_2$, $c=HH_1$) für baryzentrische Koordinaten, so liegt der Pol in der Ecke $H(0:1:0)$, der feste Punkt in der Ankreismitte $I_h(a:-b:c)$ und die erzeugende Gerade als Parallele zu H_aH_c durch I_h hat die Gleichung

$$x + \frac{a+c}{\sqrt{a^2+c^2}}y + z = 0.$$

Der für *T*-Vierecke eingeführte Parameter I hat für *ST*-Vierecke also den Wert eins. Damit ergibt sich die Gleichung der Umstrophoide zu

$$(c^2y^2 + b^2z^2)x + \frac{2b(c^2x^2 + a^2z^2)}{a+b+c}y + (b^2x^2 + a^2y^2)z + \frac{2b(a^2 + ab + bc + c^2)}{a+b+c}xyz = 0.$$

Dies ist nach Satz 5 die Gleichung einer „*non-pivotal isogonal circular cubic*“ mit dem *R*-Punkt („the root“)

$$R\left(1: \frac{2b}{a+b+c}: 1\right).$$

Der *R*-Punkt liegt auf der Seitenhalbierenden durch H und teilt die Seitenhalbierende im Verhältnis $\frac{a+b+c}{b}$. Seine Tripolare mit der Gleichung

$$x + \frac{a+b+c}{2b}y + z = 0$$

ist eine Parallele zur Asymptote und schneidet die Strophoide in den Punkten

$$T_a(0:-2b:a+b+c), \quad T_c(a+b+c:-2b:0)$$

auf den Seitengeraden des Steiner-Dreiecks. Darüber hinaus ist die *R*-Tripolare eine Tangente an den Ankreis um I_h , parallel zur Seite H_aH_c des Steiner-Dreiecks. Das Viereck $H_aH_cT_aT_c$ aus den Seiten des *BS*-Steiner-Dreiecks und der Tripolaren des *R*-Punktes ist somit ein Tangententrapez. Inkreismitte, Miquel-Punkt und Newton-Gerade sind die gleichen wie beim *ST*-Viereck, so dass ihre Brennpunktskurven identisch sind. Die Isogonalität bzgl. des *BS*-Steiner-Dreiecks H_aHH_c als Teildreieck des Vierecks $H_aH_cT_aT_c$ vertauscht die Brennpunkte einbeschriebener Kegelschnitte dieses Vierecks. Es bleibt zu untersuchen, ob dies auch für die einbeschriebenen Kegelschnitte des *ST*-Vierecks zutrifft.

Auch das *ST*-Viereck kann aus der Sicht des *BS*-Steiner-Dreiecks analytisch erfasst werden: Die Diagonalen des *ST*-Vierecks sind IH_a und IH_b , wenn $I(a:b:c)$ die Inkreismitte des Bezugsdreiecks ist. Sie schneiden die Kurve in den Punkten

$$A, C\left(\frac{-(\sqrt{c(-a+b+c)} \pm \sqrt{(a+c)(a+b+c)})^2}{a+b+3c}: b: c\right),$$

$$B, D(a : b : \frac{-\sqrt{a(a+b-c)} \pm \sqrt{(a+c)(a+b+c)^2}}{3a+b+c}).$$

Die Umkreismitte liegt dann im Punkt

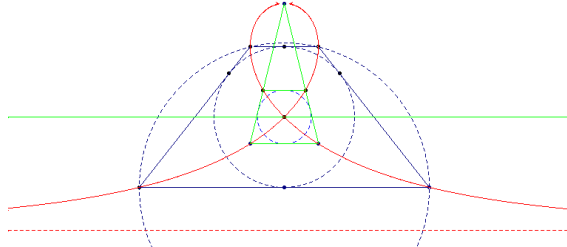
$$M(a : -\frac{b(3a-b+3c)}{a+b+c} : c).$$

Die Steiner-Inversion des ST -Vierecks, die die Brennpunkte einbeschriebener Kegelschnitte vertauscht, besteht aus einer Spiegelung an der Winkelhalbierenden durch H und einer Spiegelung an einem Kreis um H durch I_h . Der Bildpunkt eines Punktes $X(x : y : z)$ ist

$$(a^2z : \frac{-b^2(a-b+c)xz - (c^2x + a^2z)(2bx + (a+b+c)y + 2bz)}{(a+b+c)(x+y+z)} : c^2x)$$

und stimmt auf der Kurve mit dem isogonalen Bild bzgl. des BS -Steiner-Dreiecks überein. Damit kann Satz 5 für ST -Vierecke präzisiert werden:

Satz 9. Die Brennpunktkurve eines Sehnentangentenvierecks ist eine „non-pivotal isogonal circular cubic“ des Steiner-Dreiecks des Berührsehnenvierecks. „The root“ ist ein Punkt der Seitenhalbierenden durch den Miquel-Punkt, der diese im Verhältnis Umfang/Gegenseite teilt. Die Isogonalität vertauscht die Brennpunkte auf der Kurve.



Mit der Brennpunktkurve für ein Sehnentangenten-Trapez sei diese Ausarbeitung abgeschlossen.

Literatur

- [Gib] J.-P. Ehrmann and B. Gibert: Special Isocubics in the Triangle Plane. – <http://perso.wanadoo.fr/bernard.gibert>.
- [Loc] E. H. Lockwood: A Book of Curves. – Cambridge, At the University Press, 1961.
- [Ehr] J.-P. Ehrmann: Steiner's Theorems on the Complete Quadrilateral. – Forum Geometricorum, Volume 4 (2004) 35-52.

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf
<http://eckartschmidt.de>
eckart_schmidt@t-online.de