Tangentenvierecke
zu Umkegelschnitten eines Vierecks

Eckart Schmidt

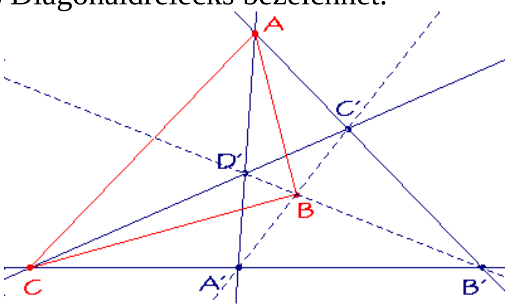
Zu einem Viereck werden umbeschriebene Kegelschnitte betrachtet und die geometrischen Eigenschaften der zugehörigen Tangentenvierecke untersucht. Es wird nachgewiesen, dass die Steiner-Punkte dieser Tangentenvierecke auf dem Neun-Punkte-Kreis des Diagonaldreiecks des vorgegebenen Vierecks liegen. – Gearbeitet wird in baryzentrischen Koordinaten bezüglich des Diagonaldreiecks.

1. Umkegelschnitte

Zu einem Viereck *A´B´C´D´*, dessen Gegenseiten bzw. Diagonalen nicht parallel sind, wird das Diagonaldreieck *ABC* betrachtet. Die Bezeichnungsweise sei so gewählt, dass *D´* innerhalb des Diagonaldreiecks liegt und *A´B´C´* das zugehörige Anti-Ceva-Dreieck von *D´* bezüglich *ABC* ist. Wählt man das Diagonaldreieck *ABC* als Bezugsdreieck für baryzentrische Koordinaten, so ist folgende Koordinatenwahl möglich:

$$A'(-u:v:w)\,,\; B'(u:-v:w)\,,\; C'(u:v:-w)\,,\; D'(u:v:w)\,.$$

Der Diagonalenschnitt ist *B*; *BA* und *BC* seien als Schenkel, *AC* als Basis des Diagonaldreiecks bezeichnet.



Da sich die Koordinaten der Punkte *A´*, *B´*, *C´*, *D´* nur in einer Vorzeichensystematik unterscheiden, gilt für die Gleichungen der Umkegelschnitte

$$px^2+ry^2+qz^2 = pu^2+rv^2+qw^2=0$$

$$\text{bzw. } pv^2x^2-(pu^2+qw^2)y^2+qv^2z^2=0\,.$$

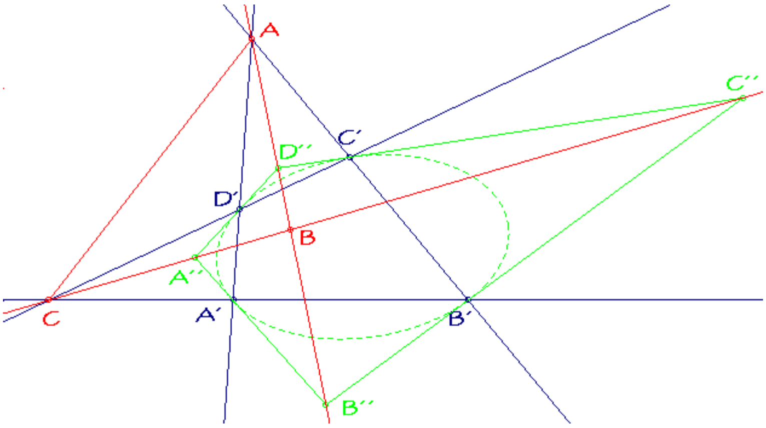
Dabei sind p und q beliebig wählbare reelle Zahlen. Für $p=0$ oder $q=0$ entarten die Kegelschnitte zu den Geradenpaaren der Gegenseiten und für $pu^2+qw^2=0$ erhält man das Diagonalenpaar. Diese Sonderfälle werden vor dem Hintergrund der zu betrachteten Tangentenvierecke ausgeklammert. Für $p=q$ erhält man einen Umkegelschnitt, der die Schenkel des Diagonaldreiecks im gleichen Verhältnis $\sqrt{\dfrac{v^2}{u^2+w^2}}$ teilt.

Untersucht man die Existenz von Fernpunkten für die Umkegelschnitte, so ergeben sich Hyperbeln oder Ellipsen, je nachdem $p^2u^2 + pq(u^2 - v^2 + w^2) + q^2w^2$ größer oder kleiner als Null ist. Für

$$\frac{q}{p} = \frac{-u^2 + v^2 - w^2 \pm \sqrt{(u^2 - v^2 + w^2)^2 - 4u^2w^2}}{2w^2}$$

ergeben sich die beiden Umparabeln des Vierecks.

2. Tangentenvierecke



Die Tangenten in den Punkten $A´, B´, C´, D´$

$$t_a(-pv^2u : -v(pu^2 + qw^2) : qv^2w)\,,$$
$$t_b(pv^2u : v(pu^2 + qw^2) : qv^2w)\,,$$
$$t_c(pv^2u : -v(pu^2 + qw^2) : -qv^2w)\,,$$
$$t_d(pv^2u : -v(pu^2 + qw^2) : qv^2w)$$

liefern die Schnittpunkte

$$t_d \cap t_a : \quad A''(0 : qvw : pu^2 + qw^2)$$
$$t_a \cap t_b : \quad B''(pu^2 + qw^2 : -puv : 0)$$
$$t_b \cap t_c : \quad C''(0 : -qvw : pu^2 + qw^2)$$
$$t_c \cap t_d : \quad D''(pu^2 + qw^2 : puv : 0)\,.$$

Die Ecken des Tangentenvierecks $A´´B´´C´´D´´$ liegen auf den Diagonalen des Vierecks $A´B´C´D´$, so dass die Diagonalenschnittpunkte übereinstimmen. Gegenecken teilen die Schenkel des Diagonaldreiecks harmonisch. Die Gegenseitenschnitte

$$A''B'' \cap C''D'' : \quad F''(qw : 0 : pu)$$
$$B''C'' \cap D''A'' : \quad G''(qw : 0 : -pu)$$

liegen auf der Basisgeraden und teilen die Basis harmonisch.

3. Steiner-Punkte

Der Steiner-Punkt eines Vierseits ist bekanntlich der gemeinsame Punkt der Umkreise der Teildreiseite. Den Steiner-Punkt St des Vierseits $t_at_bt_ct_d$ findet man also z.B., indem man den Punkt $G´´$ an der Verbindungsgeraden der Umkreismitten der Dreiecke $A''B''G''$ und $C''D''G''$ spiegelt. Folgt man dieser Konstruktion analytisch, so erhält man

$$St((R^2-q^2v^2w^2)(b^2R^2-v^2(b^2p^2u^2-c^2p^2u^2+c^2q^2w^2))$$
$$:v^2(p^2u^2-q^2w^2)((c^2-a^2)R^2+v^2(a^2p^2u^2-c^2q^2w^2))$$
$$:(R^2-p^2u^2v^2)(b^2R^2-v^2(a^2p^2u^2-a^2q^2w^2+b^2q^2w^2)))$$
$$\text{mit } R=pu^2+qw^2 .$$

Diese Steiner-Punkte der Tangentenvierecke haben vom Mittelpunkt N des Neun-Punkte-Kreises des Dreiecks ABC

$$N(S^2+S_BS_C:S^2+S_CS_A:S^2+S_AS_B),$$

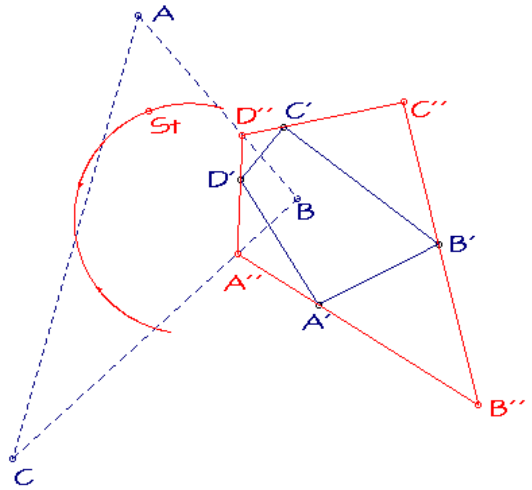
benutzt werden die Conway-Abkürzungen S_A, S_B, S_C mit

$$2S_A=(-a^2+b^2+c^2),\, 2S_B=(a^2-b^2+c^2),\, 2S_C=(a^2+b^2-c^2)$$
$$\text{und } S=\sqrt{S_AS_B+S_BS_C+S_CS_A}=2\Delta,$$

den Abstand

$$\frac{\sqrt{(S_A+S_B)(S_B+S_C)(S_C+S_A)}}{4S}.$$

Da dies der halbe Umkreisradius ist, liegen die Steiner-Punkte auf dem Neun-Punkte-Kreis des Dreiecks *ABC.*



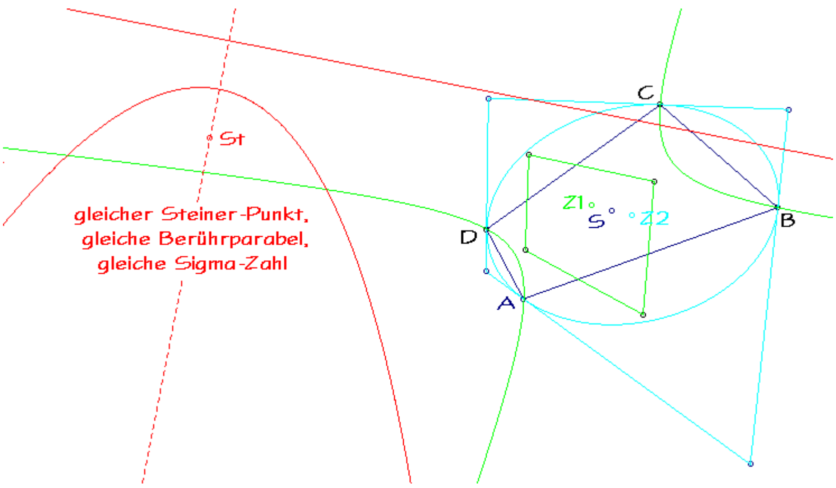
Satz 1: **Die Steiner-Punkte der Tangentenvierecke eines Vierecks liegen auf dem Neun-Punkte-Kreis des Diagonaldreiecks des Vierecks.**

4. Gleiche Steiner-Punkte

Der Neun-Punkte-Kreis wird von den Steiner-Punkten der Tangentenvierecke nicht vollständig belegt; der Bogen zwischen den Steiner-Punkten zu den Tangentenvierecken der Umparabeln wird zweifach durchlaufen. Für zwei Umkegelschnitte mit den kennzeichnenden Koeffizientenpaaren *(p,q)* und *(p´,q´)* fallen die Steiner-Punkte der Tangentenvierecke zusammen, wenn

$$(u^2-v^2+w^2)(pq'+p'q)+2(pp'u^2+qq'w^2)=0.$$

Es liegt nahe zu hinterfragen, welche Gemeinsamkeiten die zugehörigen Tangentenvierecke bzw. Umkegelschnitte haben.



Satz 2. **Tangentenvierecke zu Umkegelschnitten, deren Zentren punktsymmetrisch zum Schwerpunkt des Bezugsvierecks liegen, haben den gleichen Steiner-Punkt, die gleiche Berührparabel und die gleiche Sigma-Zahl.**

Betrachtet man einen Umkegelschnitt zum Koeffizientenpaar *(p,q)*, so ist das Zentrum

$$Z(qR : -pqv^2 : pR) \text{ mit } R = pu^2 + qw^2 .$$

Spiegelt man das Zentrum am Schwerpunkt

$$S(u^2U : v^2V : w^2W)$$

mit $U = -u^2 + v^2 + w^2$, $V = u^2 - v^2 + w^2$, $W = u^2 + v^2 - w^2$,

so erhält man

$$Z'((2pu^2 + qV)(pu^2U - qw^2W)$$
$$: v^2(2qw^2 + pV)(2pu^2 + qV)$$
$$: -(2qw^2 + pV)(pu^2U - qw^2W))$$

Zu einem Zentrum $Z(x_Z : y_Z : z_Z)$ liefert ein Koeffizientenpaar *(p,q)* mit $px_Z = qz_Z$ einen entsprechenden Umkegelschnitt. Daher lässt sich der Umkegelschnitt zum Zentrum *Z´* mit den Koeffizienten

$$p' = -(2qw^2 + pV) \text{ und } q' = 2pu^2 + qV$$

beschreiben, die offensichtlich der obigen Bedingung für das Zusammenfallen der Steiner-Punkte genügen.

Der Steiner-Punkt ist der Brennpunkt der Berührparabel eines Vierseits, die Höhenschnitte der Teildreiseite sind kollinear und bestimmen die Leitgerade der Berührparabel [3]. Diese „orthocentric line" hat die Darstellung

$$(b^2R^2 - v^2((b^2 - c^2)p^2u^2 + c^2q^2w^2)$$
$$: (a^2 - c^2)R^2 - v^2(a^2p^2u^2 - c^2q^2w^2)$$
$$: -b^2R^2 + v^2(a^2p^2u^2 + (b^2 - a^2)q^2w^2))$$
$$\text{mit } R = pu^2 + qw^2 .$$

Ersetzt man *p* und *q* durch *p´* und *q´*, so erhält man die gleiche Darstellung.

Die Sigma-Zahl eines Vierecks *ABCD* wird von Stärck [1] als geometrisch relevante Viereckszahl in vielerlei Bezug behandelt. Sind U_A, U_B, U_C, U_D die Umkreismitten der Teildreiecke *BCD, CDA, DAB, ABC,* so ist das Flächenverhältnis der Dreiecke $U_XU_YU_Z$ und *XYZ* unabhängig von der Wahl *X, Y, Z.* Dieses Verhältnis orientierter Flächeninhalte wird als Sigma-Zahl des Vierecks definiert. Folgt man dieser Definition analytisch, so erhält man für die Sigma-Zahl eines Tangentenvierecks

$$\sigma = -\frac{((a^2-c^2)R^2 - v^2(a^2p^2u^2 - c^2q^2w^2))^2}{4S^2(R^2-p^2u^2v^2)(R^2-q^2v^2w^2)} \text{ mit}$$

$$R = pu^2 + qw^2 .$$

Ersetzt man *p* und *q* durch *p´* und *q´*, so erhält man die gleiche Sigma-Zahl.

5. Kreisvierecke

Auf die speziellen Zusammenhänge beim Kreisviereck wurde ich von Herrn Stärck hingewiesen [2]; es war der Anlass für diese Ausarbeitung.

Das Bezugsviereck ist ein Kreisviereck, wenn

$$S_Au^2 + S_Bv^2 + S_Cw^2 = 0 .$$

Der Umkreis hat dann die Gleichung

$$S_Ax^2 + S_By^2 + S_Cz^2 = 0$$

und wird durch $p = S_A$ und $q = S_C$ als Umkegelschnitt beschrieben. Für ein Kreisviereck liegt der Mittelpunkt M des Umkreises im Höhenschnitt des Diagonaldreiecks:

$$M(S_BS_C : S_AS_C : S_AS_B) .$$

Der Steiner-Punkt des zugehörigen Tangentenvierecks kann in der folgenden Form angegeben werden:

$$\begin{aligned} St(&S_BS_C(S_B{}^2v^2 - S_C{}^2w^2)(c^2v^2 - b^2w^2) \\ &: S_CS_A(S_C{}^2w^2 - S_A{}^2u^2)(a^2w^2 - c^2u^2) \\ &: S_AS_B(S_A{}^2u^2 - S_B{}^2v^2)(b^2u^2 - a^2v^2)) \end{aligned}$$

und die Berührparabel hat eine Darstellung:

$$\begin{aligned} &((b^2-c^2)S_A{}^2u^2 - b^2S_B{}^2v^2 + c^2S_C{}^2w^2 \\ &: a^2S_A{}^2u^2 + (c^2-a^2)S_B{}^2v^2 - c^2S_C{}^2w^2 \\ &: -a^2S_A{}^2u^2 + b^2S_B{}^2v^2 + (a^2-b^2)S_C{}^2w^2) \end{aligned}$$

Die Sigma-Zahl ergibt sich zu

$$\sigma = -\frac{(a^2(S_A{}^2u^2 - S_B{}^2v^2) - c^2(S_C{}^2w^2 - S_B{}^2v^2))^2}{4S^2(S_A{}^2u^2 - S_B{}^2v^2)(S_C{}^2w^2 - S_B{}^2v^2)} .$$

Geometrisch von Interesse ist nun der Umkegelschnitt, dessen Tangentenviereck den gleichen Steiner-Punkt, die gleiche Berührparabel und die gleiche Sigma-Zahl hat.

Sein Zentrum

$$M'((a^2v^2-b^2u^2)(a^2w^2-c^2u^2)$$
$$:(b^2u^2-a^2v^2)(b^2w^2-c^2v^2)$$
$$:(c^2u^2-a^2w^2)(c^2v^2-b^2w^2))$$

ist die am Schwerpunkt gespiegelte Umkreismitte M. Die Gleichung dieses Kegelschnitts

$$(c^2v^2-b^2w^2)x^2+(a^2w^2-c^2u^2)y^2+(b^2u^2-a^2v^2)z^2=0$$

liefert zwei Fernpunkte $F(1:f:-1-f)$ für

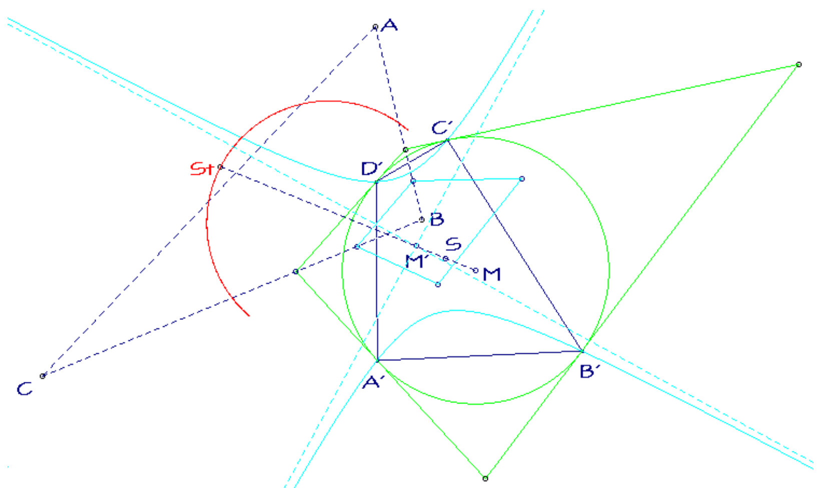
$$f_{1,2}=\frac{a^2v^2-b^2u^2\pm S\sqrt{-(u+v+w)(-u+v+w)(u-v+w)(u+v-w)}}{a^2(v^2-w^2)-u^2(b^2-c^2)}.$$

Zwei Fernpunkte in der obigen Darstellung kennzeichnen orthogonale Richtungen, wenn

$$a^2f_1f_2+b^2+S_C(f_1+f_2)=0.$$

Dies ist für obige Werte der Fall. Damit handelt es sich bei dem Partner-Kegelschnitt des Umkreises um die rechtwinklige Umhyperbel des Kreisvierecks.

Satz 3. **Für ein Kreisviereck haben die Tangentenvierecke zum Umkreis und zur gleichseitigen Umhyperbel den gleichen Steiner-Punkt, die gleiche Berührparabel und die gleiche Sigma-Zahl.**



Darüber hinaus weist Stärck darauf hin, dass der gemeinsame Steiner-Punkt das am Umkreis gespiegelte Zentrum der gleichseitigen Umhyperbel ist.
Weiterhin durchlaufen die Steiner-Punkte genau einen Halbkreis.

6. Ein Spezialfall

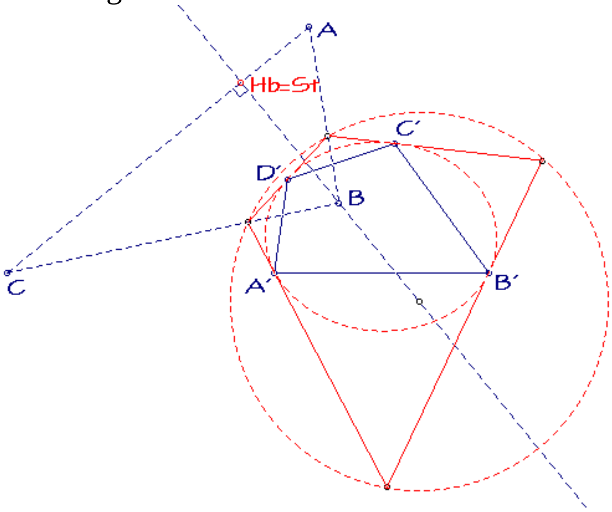
Die Steiner-Punkte der Tangentenvierecke eines Vierecks liegen nach Satz 1 auf dem Neun-Punkte-Kreis des Diagonaldreiecks. Ein spezieller Punkt dieses Kreises ist der Höhenfußpunkt H_b auf der Basis AC:

$$H_b(S_C:0:S_A).$$

Dieser Punkt ist Steiner-Punkt unter der Bedingung

$$(a^2 - c^2)(pu^2 + qw^2)^2 - v^2(a^2 p^2 u^2 - c^2 q^2 w^2) = 0\,,$$

die die Sigma-Zahl des Tangentenvierecks Null werden lässt. Damit ist das Tangentenviereck ein Kreisviereck.



Satz 4. **Tangentenvierecke zu Umkegelschnitten eines Vierecks sind Kreisvierecke, wenn ihr Steiner-Punkt in den Höhenfußpunkt auf der Basis des Diagonaldreiecks fällt.**

Es kann ergänzt werden, dass die Mittelpunkte zu den Kreisvierecken unter den Tangentenvierecken auf der Höhengeraden zur Basis des Diagonaldreiecks liegen.
Für ein Kreisviereck liegt der Steiner-Punkt im Höhenfußpunkt auf der Basis des Diagonaldreiecks. Daher gilt für Kreisvierecke als Bezugsviereck: Hat ein Tangentenviereck eines Kreisvierecks den gleichen Steiner-Punkt, so ist es auch ein Kreisviereck.

Literatur

[1] R. Stärck: Eine merkwürdige Zahl des Vierecks. – PM 1/46. Jg. 2004, S. 26.

[2] R. Stärck: Brief vom 03.05.2005

[3] J.-P. Ehrmann: Steiner´s Theorems on the Complete Quadrilateral. – Forum Geometricorum, Volume 4 (2004) 35-52.

Eckart Schmidt - Hasenberg 27 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de