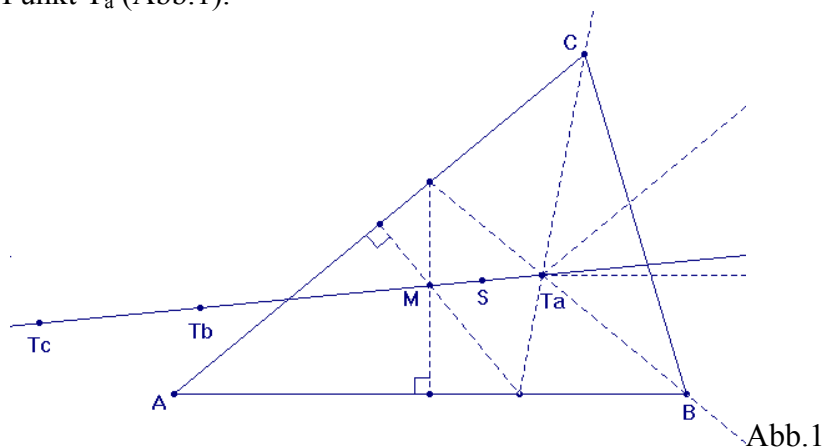


## Geometrie der Triplex-Punkte

### Anmerkungen zu K.Mütz: Die Triplex-Punkte und die Eulersche Gerade eines Dreiecks (PM 2/45. Jg. 2003)

Eckart Schmidt

In einem Dreieck  $ABC$  lässt sich zu jedem Innenwinkel z.B.  $\alpha$  ein Triplex-Punkt  $T_a$  betrachten, von dem man die Gegenseite  $BC$  unter einem Winkel von  $3\alpha$  sieht, wobei die Parallelen zu  $AB$  und  $AC$  durch  $T_a$  diesen Blickwinkel dritteln (Winkel orientiert und modulo  $180^\circ$ ). Die Triplex-Punkte lassen sich wie folgt konstruieren [1]: Verbindet man den Schnittpunkt der Seitengeraden  $AC$  und der Mittelsenkrechten von  $AB$  mit der Ecke  $B$  und entsprechend den Schnittpunkt der Seitengeraden  $AB$  und der Mittelsenkrechten von  $AC$  mit der Ecke  $C$ , so liegt im Schnittpunkt der beiden Verbindungsgeraden der Triplex-Punkt  $T_a$  (Abb.1).



K.Mütz weist nach, dass die drei Triplex-Punkte eines Dreiecks auf der Euler-Geraden liegen; weitere geometrische Eigenschaften werden nicht angesprochen. In der "Encyclopedia of Triangle Centers" [2] werden die Triplex-Punkte nicht geführt. Aber ihre Lage auf der Euler-Geraden lässt weitere geometrische Zusammenhänge vermuten.

Die Vorgehensweise bei dieser geometrischen Untersuchung bestand in entdeckendem Konstruieren mit CABRI und programminterner Überprüfung der Ergebnisse oder analytischer Berechnung anhand von MATHEMATICA-Prozeduren. Ergebnisse wurden in baryzentrischen Koordinaten erarbeitet, wobei auf eine Diskussion entartender Sonderfälle verzichtet wurde.

Baryzentrische Koordinaten eines Punktes  $P ( x : y : z )$  sind dreiecksbezogene homogene Koordinaten, die den orientierten Flächeninhalten der Dreiecke  $ABP$ ,  $BCP$ ,  $CAP$  entsprechen. So hat z.B. der Triplex-Punkt  $T_a$  die Darstellung

$$T_a \left( (a^2-b^2)(a^2-c^2) : b^2(a^2-b^2) : c^2(a^2-c^2) \right),$$

wobei a, b, c die Seitenlängen des Dreiecks sind.

**(1)** Für die gegenseitigen Abstände der Triplex-Punkte gelten die folgenden Verhältnisse

$$T_a T_b : T_b T_c : T_c T_a$$

$$= \sin(\alpha-\beta) \sin(3\gamma) : \sin(\beta-\gamma) \sin(3\alpha) : \sin(\gamma-\alpha) \sin(3\beta).$$

Diese Verhältnisse gelten auch für die Spiegelpunkte in (6) und die Lotfußpunkte in (8).

**(2)** Zur Lage der Triplex-Punkte auf der Euler-Geraden bzgl. Schwerpunkt S und Umkreismitte M gilt

$$\frac{a^2 MT_a}{ST_a} = \frac{b^2 MT_b}{ST_b} = \frac{c^2 MT_c}{ST_c} = 3 r^2,$$

wobei r den Umkreisradius bezeichnet. Damit teilt z.B.  $T_a$  die Strecke SM im Verhältnis

$$-\frac{a^2}{3 r^2} = -\frac{4 \sin^2 \alpha}{3}.$$

**(3)** Die Ecktransversalen  $AT_a$ ,  $BT_b$ ,  $CT_c$  teilen die Gegenseiten BC, CA, AB in den Punkten U, V, W in den Verhältnissen

$$\frac{(a^2-c^2)c^2}{(a^2-b^2)b^2}, \quad \frac{(b^2-a^2)a^2}{(b^2-c^2)c^2}, \quad \frac{(c^2-b^2)b^2}{(c^2-a^2)a^2}.$$

Da das Produkt der Teilverhältnisse  $-1$  ist, sind die Teilpunkte U, V, W kollinear. Sie liegen mit der Umkreismitte M und dem Lemoine-Punkt auf der Brocard-Achse (Abb.2).

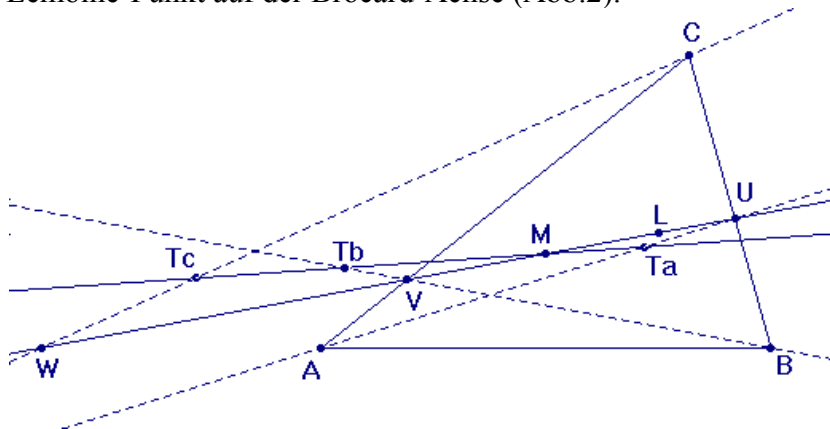


Abb.2

**(4)** Die Ecktransversalen  $AT_b$ ,  $BT_a$  und entsprechend  $BT_c$ ,  $CT_b$  und  $CT_a$ ,  $AT_c$  schneiden sich auf dem Umkreis des Dreiecks ABC (Abb.3) in den Punkten  $C^\circ(b^2-a^2 : a^2-b^2 : c^2)$ ,  $A^\circ(a^2 : c^2-b^2 : b^2-c^2)$ ,  $B^\circ(c^2-a^2 : b^2 : a^2-c^2)$ .

Daher bilden die Punkte A,  $B^\circ$ , C,  $A^\circ$ , B,  $C^\circ$  eine Pappus-Konfiguration, aus der erneut die Kollinearität der Triplex-Punkte folgt.

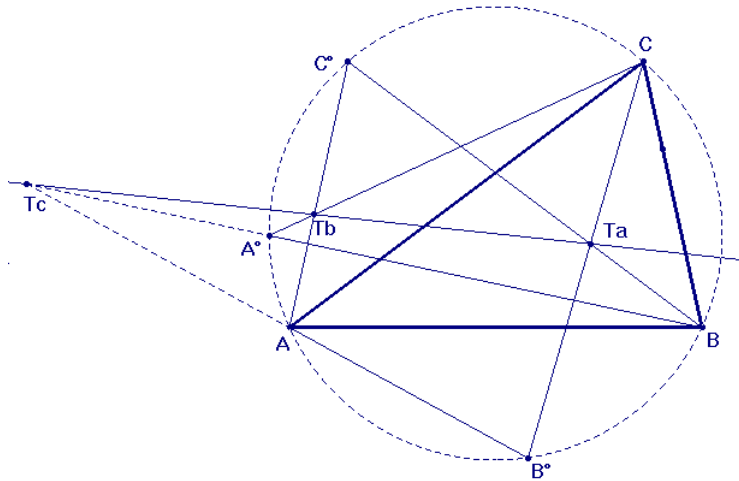


Abb.3

Die Lage von  $A^\circ$ ,  $B^\circ$ ,  $C^\circ$  auf dem Umkreis ergibt sich aufgrund der Winkelgleichheit an Parallelen und dem Satz vom Umfangswinkel unmittelbar aus Abb.4: die Vierecke  $ABCC^\circ$ ,  $BCAA^\circ$ ,  $CABB^\circ$  erweisen sich als gleichschenklige Trapeze.

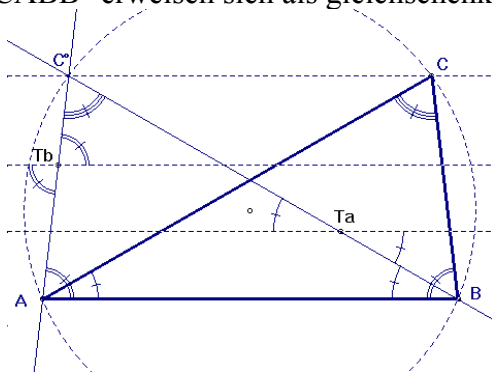


Abb.4

Der gemeinsame Umkreis von Dreieck  $ABC$  und Dreieck  $A^\circ B^\circ C^\circ$  ist der Neun-Punkte-Kreis des antikomplementären Dreiecks  $S_a S_b S_c$  von  $ABC$  (Abb.5), dessen Seitenmittendreieck  $ABC$  und dessen Höhenfußpunktdreieck  $A^\circ B^\circ C^\circ$  ist. Oder anders formuliert: Betrachtet man zu einem Dreieck das Seitenmittendreieck  $M_a M_b M_c$  und das Höhenfußpunktdreieck  $H_a H_b H_c$ , so schneiden sich z.B. die Verbindungsgeraden  $M_b H_c$  und  $M_c H_b$  im Triplex-Punkt  $T_a'$  des Seitenmittendreiecks.

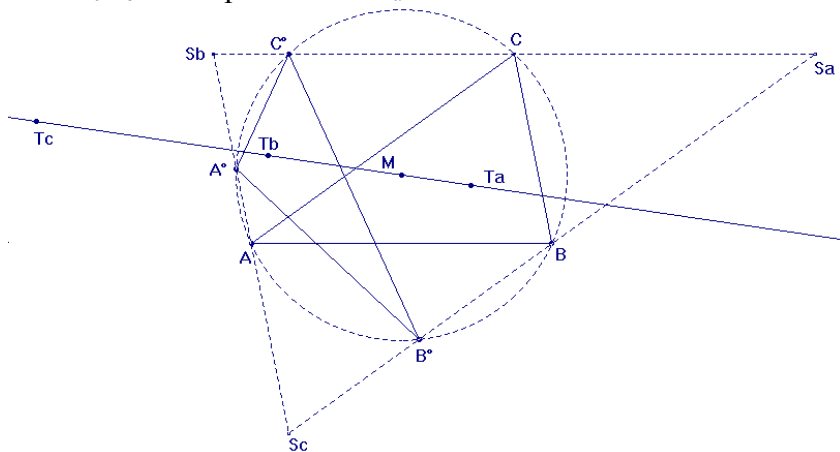


Abb.5

**(5)** Spiegelt man die Euler-Gerade an den Seiten des Dreiecks, so erhält man kopunktale Geraden, die sich in einem Punkt E auf dem Umkreis des Dreiecks schneiden (Abb.6):

$$E \left( a^2(a^2-b^2)(a^2-c^2) : b^2(b^2-a^2)(b^2-c^2) : c^2(c^2-a^2)(c^2-b^2) \right).$$

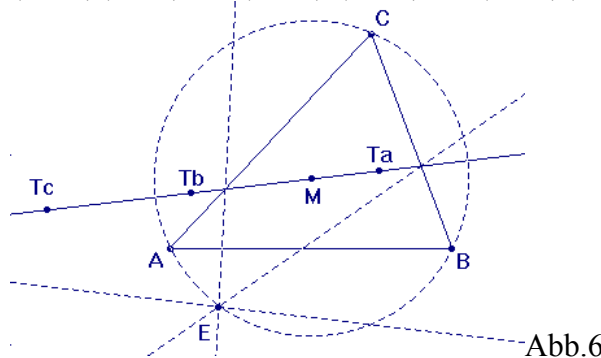


Abb.6

Dieser Umkreispunkt mit dem ETC-Index X110 wird auch als Euler-Punkt des Dreiecks bezeichnet. Man erhält ihn, wenn man den Fernpunkt der Euler-Geraden isogonal-konjugiert abbildet und am Umkreismittelpunkt spiegelt. Seine Simson-Gerade verläuft parallel zur Euler-Geraden, seine Tripolare ist die Brocard-Achse. Mit den Triplex-Punkten hat er nur indirekt zu tun.

**(6)** Mit der Euler-Geraden werden auch die Triplex-Punkte gespiegelt: Spiegelt man  $T_a$  an BC,  $T_b$  an AC,  $T_c$  an AB, so erhält man drei kollineare Punkte  $T_{aa}$ ,  $T_{bb}$ ,  $T_{cc}$  (Abb.7).

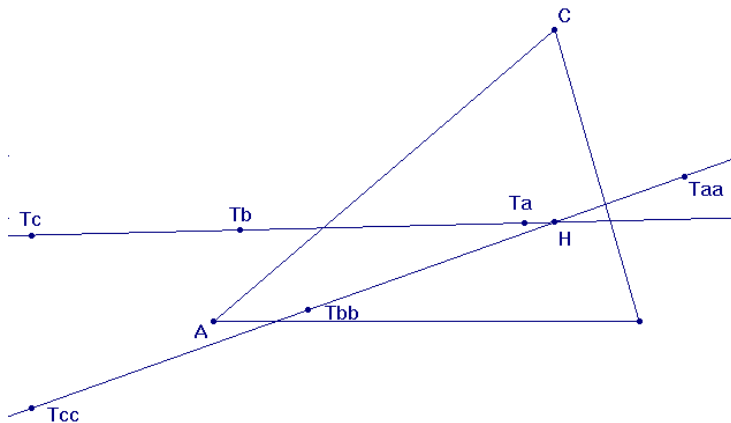


Abb.7

Dabei hat z.B.  $T_{aa}$  die Darstellung

$$T_{aa} \left( a^2(a^2-b^2)(a^2-c^2) : (a^2-b^2)(a^2-c^2+bc)(a^2-c^2-bc) : (a^2-c^2)(a^2-b^2+bc)(a^2-b^2-bc) \right).$$

Die Kollinearität folgt aus der verschwindenden Determinante der Koordinatenmatrix der drei Punkte.

**(7)** Spiegelt man andererseits  $T_a$  an AC und  $T_b$  an BC, so sind die Bildpunkte  $T_{ab}$  und  $T_{ba}$  mit Punkt C kollinear und die Verbindungsgerade ist eine Parallele zu AB durch C (Abb.8). Damit sind die Verbindungsgeraden  $T_{ab}T_{ba}$ ,  $T_{bc}T_{cb}$ ,  $T_{ac}T_{ca}$  die

Seitengeraden des antikomplementären Dreiecks, dessen Mittendreieck ABC ist.

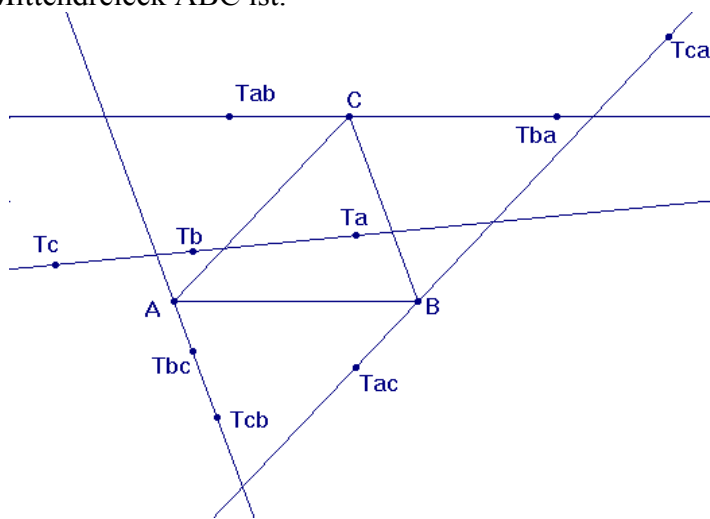


Abb.8

**(8)** Lotet man von den Triplex-Punkten  $T_a, T_b, T_c$  auf die Seitengeraden BC, AC, AB, so erhält man kollineare Lotfußpunkte  $T_{af}, T_{bf}, T_{cf}$  (Abb.9). Dabei gilt z.B.

$$T_{af} \left( 0 : (a^2-b^2)(a^4-a^2b^2-2a^2c^2-b^2c^2+c^4) : (a^2-c^2)(a^4-a^2c^2-2a^2b^2-b^2c^2+b^4) \right).$$

Die Verbindungsgerade dieser Lotfußpunkte ist die Euler-Gerade des Höhenfußpunktdreiecks und schneidet die Euler-Gerade des Ausgangsdreiecks im Mittelpunkt F des Neun-Punkte-Kreises des Dreiecks ABC.

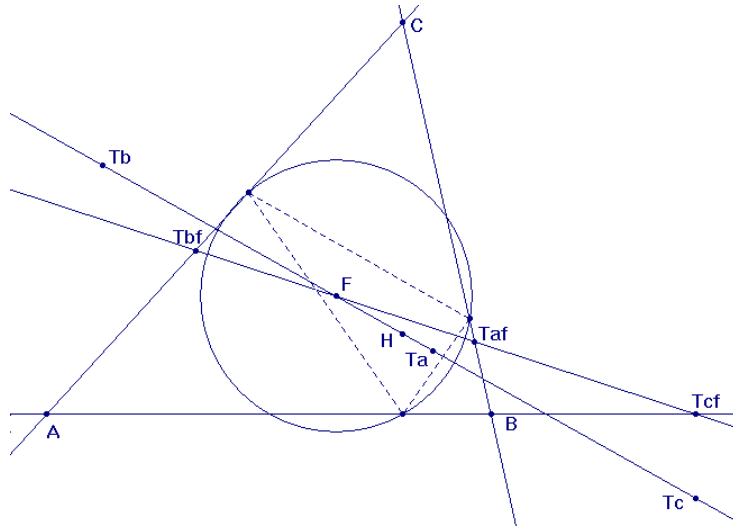


Abb.9

**(9)** Die Verbindungsgerade der Spiegelpunkte  $T_{aa}, T_{bb}, T_{cc}$  und die Verbindungsgerade der Lotfußpunkte  $T_{af}, T_{bf}, T_{cf}$  schneiden sich in einem Punkt

$$Q \left( a^2(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2)(b^4-a^2b^2-2b^2c^2-a^2c^2+c^4) : b^2(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2)(a^4-a^2b^2-2a^2c^2-b^2c^2+c^4) : c^2(a^4+b^4+c^4-2a^2c^2-2b^2c^2)(a^4-a^2c^2-2a^2b^2-b^2c^2+b^4) \right),$$

der sich als Höhenschnittpunkt des Höhenfußpunktdreiecks erweist (ETC-Index 52). Er liegt mit der Umkreismitte und dem Lemoine-Punkt auf der Brocard-Achse des Dreiecks (Abb.10).

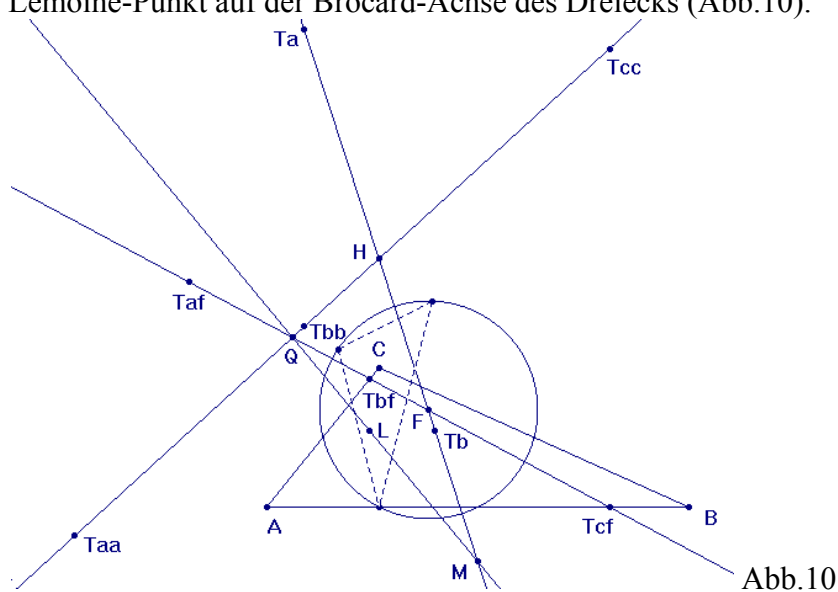


Abb.10

**(10)** Das isogonal-konjugierte Bild der Euler-Geraden ergibt die sogenannte Jerabek-Hyperbel, eine gleichseitige Umhyperbel des Dreiecks durch die Umkreismitte  $M$  und den Höhenschnittpunkt  $H$ . Jede Gerade durch die Umkreismitte  $M$  hat als isogonal-konjugiertes Bild eine gleichseitige Umhyperbel durch den Höhenschnittpunkt  $H$  mit dem Zentrum auf dem Neun-Punkte-Kreis des Dreiecks.

Betrachtet man die Mittelsenkrechten eines Dreiecks, so erhält man auf diese Weise gleichseitige Umhyperbeln durch die Triplex-Punkte. Genauer: Für die Mittelsenkrechte  $m_b$  ergibt das isogonal-konjugierte Bild eine gleichseitige Umhyperbel durch den Triplex-Punkt  $T_b$  des Dreiecks; das Zentrum fällt in die Seitenmitte von  $AC$  und die Asymptoten verlaufen durch die Inkreismitte  $I^\circ$  und die Ankreismitten  $I_a^\circ, I_b^\circ, I_c^\circ$  des Seitenmittendreiecks (Abb.11). Für die anderen Mittelsenkrechten ergeben sich entsprechende Ergebnisse.

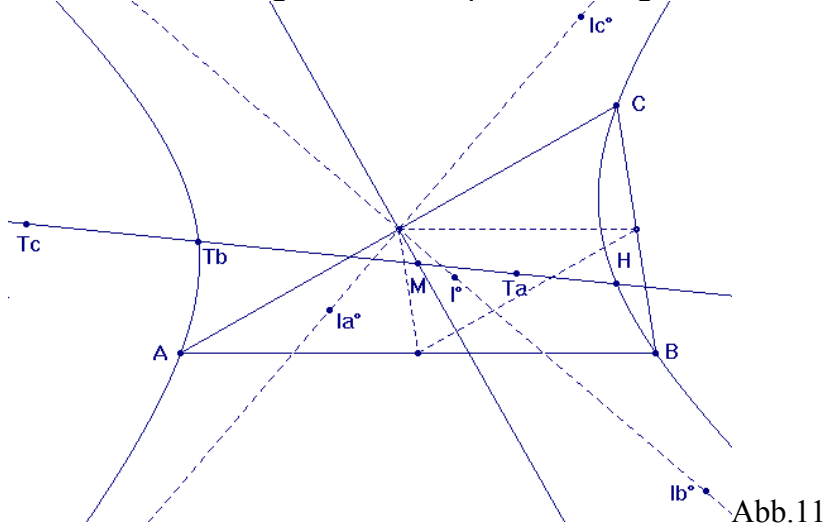


Abb.11

**(11)** Eine Diskussion der Triplex-Punkte sollte nicht ausklingen, ohne auf den Dreifach-Winkel-Punkt  $W_3$  einzugehen, unter dem K.Mütz den Punkt versteht, von dem man jede Seite des Dreiecks unter dem Dreifachen des Gegenwinkels dieser Seite sieht [1].  $W_3$  liegt im Schnittpunkt der Umkreise der Dreiecke  $ABT_c$ ,  $BCT_a$ ,  $CAT_b$ . K.Mütz zeigt, dass auch der Dreifach-Winkel-Punkt auf der Euler-Geraden liegt (Abb.12).

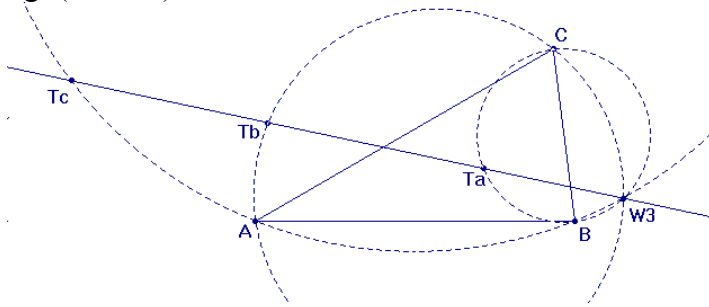


Abb.12

Bestimmt man die baryzentrischen Koordinaten des Dreifach-Winkel-Punkts

$$W_3 \left( \frac{\sin 3\alpha}{\cos \alpha} : \frac{\sin 3\beta}{\cos \beta} : \frac{\sin 3\gamma}{\cos \gamma} \right),$$

so lässt sich für die Abstände zu den Ecken zeigen

$$AW_3 : BW_3 : CW_3 = |\cos \alpha| : |\cos \beta| : |\cos \gamma|.$$

**(12)** Der Dreifach-Winkel-Punkt teilt auf der Euler-Geraden die Verbindungsstrecke HM im Verhältnis

$$V(HW_3M) = -8 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

Andererseits wird der Durchmesser des Umkreises auf der Euler-Geraden durch H und  $W_3$  harmonisch geteilt, d.h. der Dreifach-Winkel-Punkt  $W_3$  ist der am Umkreis gespiegelte Höhenschnittpunkt H (Abb.13).  $W_3$  wird in der "Encyclopedia of Triangle Centers" unter dem Index X186 geführt.

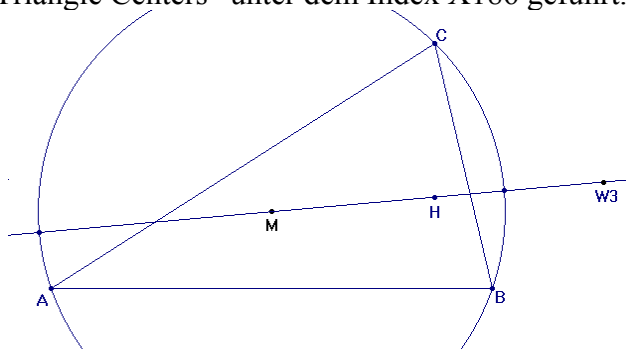


Abb.13

**(13)** Das isogonal-konjugierte Bild  $W_3^*$  (ETC-Index X265) des Dreifach-Winkel-Punktes liegt auf der schon angesprochenen Jerabek-Hyperbel. Spiegelt man die Umkreismitte M am Zentrum Z der Jerabek-Hyperbel, so erhält man  $W_3^*$  (Abb.14). Damit ist das isogonal-konjugierte Bild der

Geraden MZ eine gleichseitige Umhyperbel des Dreiecks durch den Dreifach-Winkel-Punkt  $W_3$ . – Außerdem schneidet die Verbindungsgerade der Fermat-Punkte die Jerabek-Hyperbel in  $W_3^*$  und dem Lemoine-Punkt.

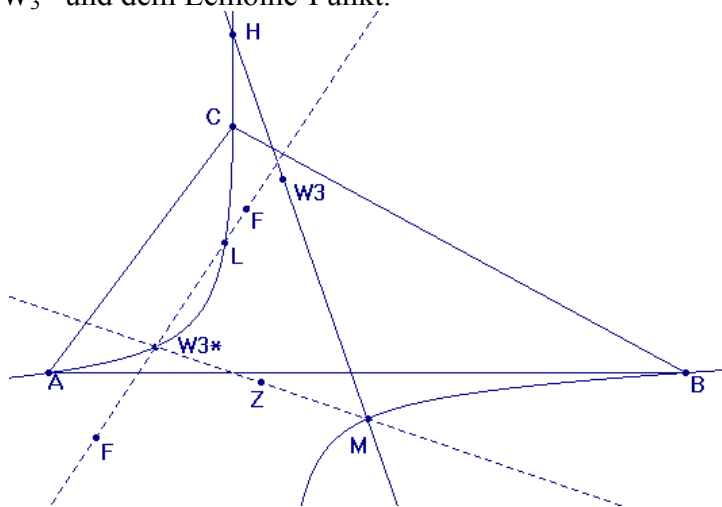


Abb.14

**(14)** Vom Umkreismittelpunkt M sieht man die Seiten unter dem Doppelten des Gegenwinkels; man kann vom Zweifach-Winkel-Punkt  $W_2 = M$  sprechen. Von den Mittelpunkten  $M_a, M_b, M_c$  der Umkreise der Dreiecke BCM, CAM, ABM sieht man die Seiten unter dem Vierfachen des Gegenwinkels; die Umkreise der letztgenannten Dreiecke schneiden sich im Vierfach-Winkel-Punkt  $W_4$  des Dreiecks, der nicht mehr auf der Euler-Geraden liegen muss (Abb.15).

Die baryzentrischen Koordinaten errechnen sich zu

$$W_4 \left( \frac{\sin\alpha \sin 4\alpha}{\sin 3\alpha} : \frac{\sin\beta \sin 4\beta}{\sin 3\beta} : \frac{\sin\gamma \sin 4\gamma}{\sin 3\gamma} \right).$$

In der ‘‘Encyclopedia of Triangle Centers’’ wird der Vierfach-Winkel-Punkt nicht geföhrt.

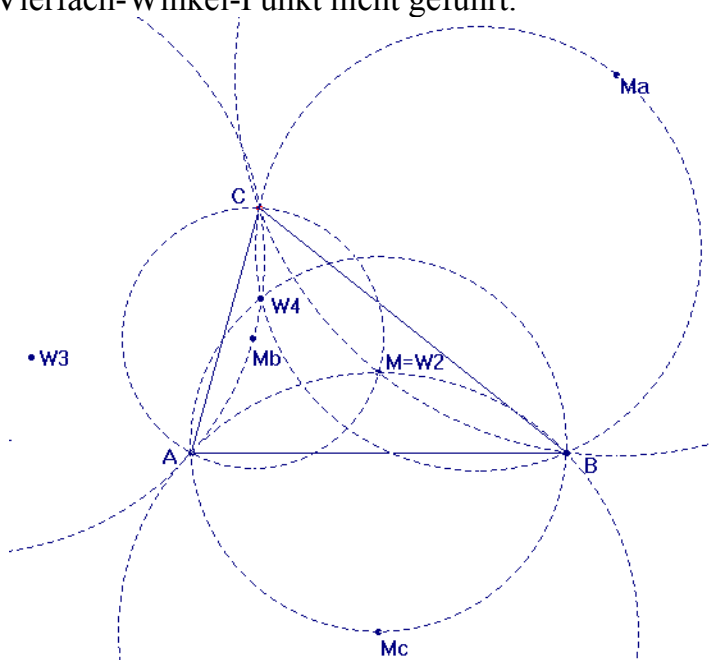


Abb.15



**(15)** Es gibt eine verhältnismäßig einfache Möglichkeit, zu einem Vielfach-Winkel-Punkt  $W_n$  den Vielfach-Winkel-Punkt  $W_{n+1}$  zu konstruieren. Dies gelingt mit Hilfe des sogenannten Tangentialpunktes T zu vier vorgegebenen Punkten (Abb.16).

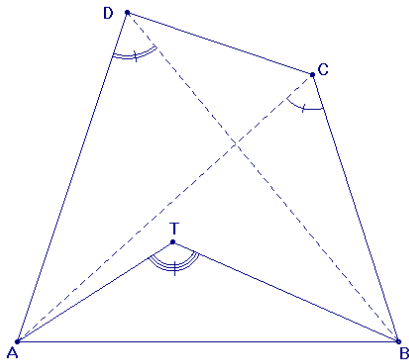


Abb.16

Dieser merkwürdige Punkt eines Vierecks wurde von R.Stärk im PM-Problem 1024 [3] – fast zugeschnitten auf die hier behandelte Thematik – vorgestellt und in einem weiteren Artikel [4] ausführlich behandelt. Vom Tangentialpunkt eines Vierecks ABCD sieht man jede Seite unter der Summe der Blickwinkel von den beiden nicht zur Seite gehörenden Ecken des Vierecks, wobei die Winkel wieder orientiert und modulo  $180^\circ$  zu betrachten sind (Abb.16).

Damit ist z.B. der Dreifach-Winkel-Punkt  $W_3$  eines Dreiecks ABC der Tangentialpunkt des Vierecks ABCM, d.h.  $W_3 = T(A,B,C,M)$ , weil z.B. Winkel  $\angle AMB$  doppelt so groß ist wie Winkel  $\angle ACB$  und somit Winkel  $\angle ATB$  dreifach so groß ist wie  $\angle ACB$ .

Allgemein gilt die Rekursion

$$W_{n+1} = T(A,B,C,W_n).$$

Man könnte die Rekursion schon mit einem Punkt auf dem Umkreis beginnen lassen, z.B. mit  $W_1$ , dem isogonal-konjugierten Bild des Fernpunktes der Euler-Geraden;  $W_1$  ist der an M gespiegelten Euler-Punkt E und wird auch als Neuberg-Punkt bezeichnet.

Der Tangentialpunkt T eines Vierecks ABCD lässt sich leicht konstruieren und berechnen: Bildet man eine Ecke isogonal-konjugiert bzgl. des Restdreiecks ab und spiegelt diesen Punkt am Umkreis des Restdreiecks, so erhält man den Tangentialpunkt des Vierecks. So ist das isogonal-konjugierte Bild des Punktes  $W_2 = M$  der Höhenschnitt H und dessen Spiegelung am Umkreis des Dreiecks ABC der Dreifach-Winkel-Punkt  $W_3$ .

**(16)** Abschließend ein kleiner Leckerbissen: Bildet man die Euler-Gerade isogonal-konjugiert ab, so erhält man die Jerabek-Hyperbel. Spiegelt man die Jerabek-Hyperbel am Umkreis, so erhält man eine schiefe Strophoide durch die Ecken des Dreiecks, auf der die ersten vier Vielfach-Winkel-Punkte  $W_1, W_2, W_3, W_4$  liegen (Abb. 17).

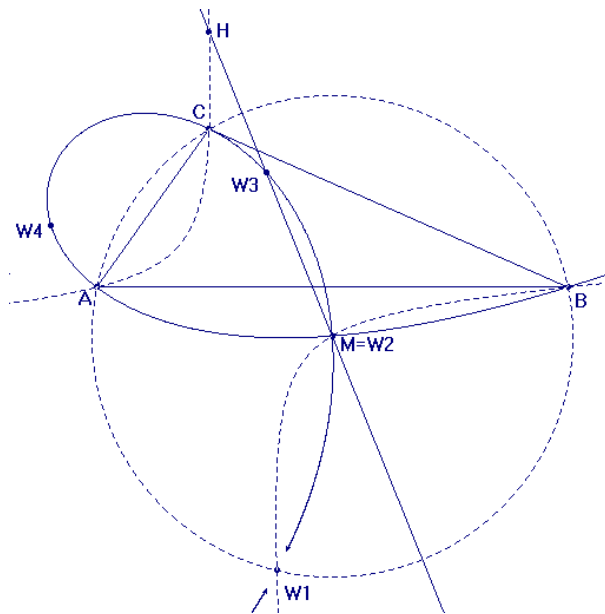


Abb.17

Die Ausführungen zeigen, dass die Triplex-Punkte und die ersten Vielfach-Winkel-Punkte eines Dreiecks durchaus ihren Stellenwert in der Dreiecksgeometrie haben und für einen Eintrag in die "Encyclopedia of Triangle Centers" geeignet wären.

## Literatur

- [1] K.Mütz: Die Triplex-Punkte und der Dreifachwinkel-Punkt eines Dreiecks. – MNU 45/4, S.220-229.
- [2] Encyclopedia of Triangle Centers. – (<http://cedar.evansville.edu/~ck6/encyclopedia>)
- [3] PM-Problem 1024. PM 6/39. Jg. 1997.
- [4] R.Stärk und D.Baumgartner: Ein merkwürdiger Punkt des Vierecks. – PM 1/44. Jg. 2002.

Eckart Schmidt - Hasenberg 27 - 24223 Raisdorf  
 Tel.: 04307/5954 - eckart\_schmidt@t-online.de