

Fermat-Punkte und deren Trisektrix

Eckart Schmidt

Teilt man die Seiten AB , BC , CA eines Dreiecks ABC im gleichen Verhältnis t und betrachtet das Dreieck $U_tV_tW_t$ der Teilpunkte – kurz TV-Dreieck genannt –, so stellt sich die Frage nach den Ortslinien merkwürdiger Punkte der TV-Dreiecke, wenn man das Teilverhältnis variiert. Für den Schwerpunkt ist die Fragestellung uninteressant, da alle TV-Dreiecke eines Dreiecks den gleichen Schwerpunkt haben [1]. Hier werden speziell die Ortslinien der beiden Fermat-Punkte der TV-Dreiecke untersucht, da sie sich durch Symmetrie auszeichnen (Abb.1).

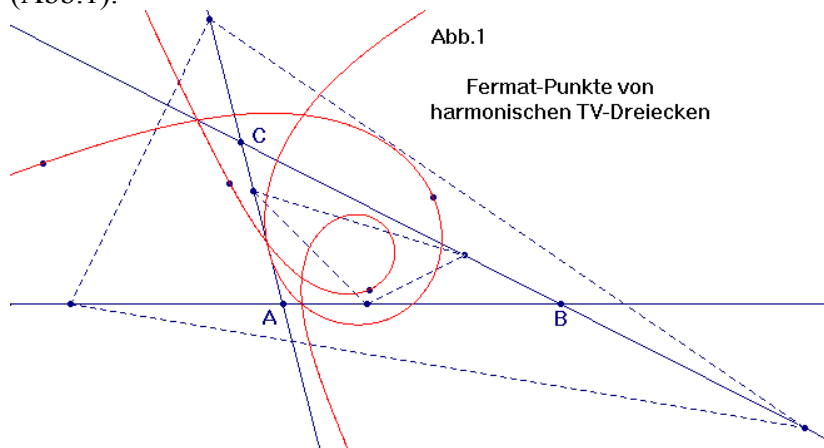


Abb.1
Fermat-Punkte von
harmonischen TV-Dreiecken

Von den geometrischen Eigenschaften der Fermat-Punkte eines Dreiecks werden hier nur zwei aufgegriffen. Für die Konstruktion (benutzt wird das Geometrie-Programm CABRI): Die Ecktransversalen der Spitzen gleichseitiger Aufsatzdreiecke über/unter den Seiten sind kopunktal. Für Berechnungen (gearbeitet wird mit MATHEMATICA): Die Ecktransversalen der Fermat-Punkte schneiden sich unter $+120^\circ$ bzw. -120° (Schnittwinkel orientiert und modulo 180°).

1. Ortslinie des ersten Fermat-Punktes

Betrachtet wird vorerst nur der erste Fermat-Punkt (first isogonic center), für den die gleichseitigen Aufsatzdreiecke außen liegen. Arbeitet man in baryzentrischen Koordinaten, so ergibt sich für diesen Fermat-Punkt F des Dreiecks ABC

$$F_1 = \left(\frac{1}{S + \sqrt{3}S_A} : \frac{1}{S + \sqrt{3}S_B} : \frac{1}{S + \sqrt{3}S_C} \right).$$

Dabei werden die Abkürzungen von Conway [2] benutzt (A Fläche des Dreiecks, ω Brocard-Winkel):

$$S_A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2} = 2A \cot \alpha, \quad S_B = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2} = 2A \cot \beta,$$

$$S_C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = 2A \cot \gamma,$$

$$S_\omega = S_A + S_B + S_C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = 2A \cot \omega,$$

$$S = \sqrt{S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)} = 2A$$

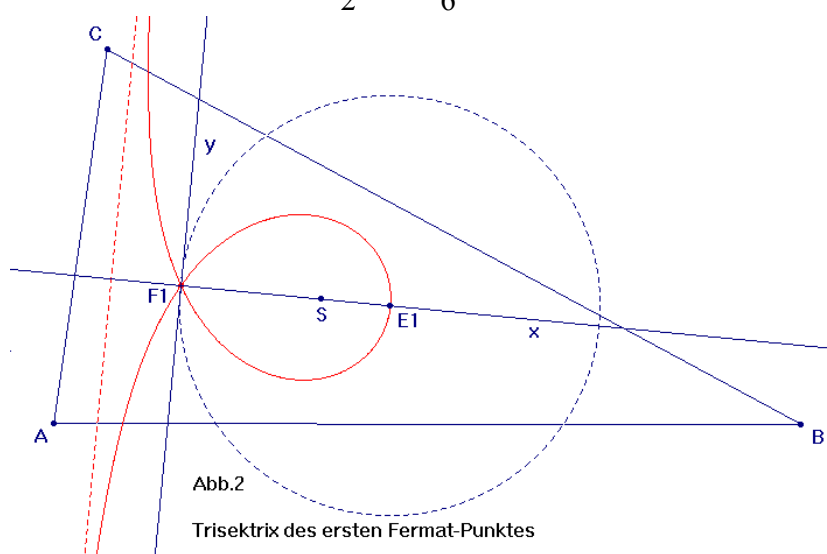
Die Ortslinie des ersten Fermat-Punktes der TV-Dreiecke ergibt eine Trisektrix (Abb.2) mit einem Knotenpunkt im Fermat-Punkt F_1 des Dreiecks ABC und einem Scheitelpunkt

$$E_1 = ((\sqrt{3}S_A + S)[(\sqrt{3}S_B + S) + (\sqrt{3}S_C + S)] : \dots)$$

im ersten Fermat-Punkt des Seitenmitten-Dreiecks von ABC . Der Schwerpunkt S des Dreiecks ABC teilt die Strecke $F_1 E_1$ im Verhältnis 2 : 1. Legt man den Ursprung eines Koordinatensystems in den Fermat-Punkt F_1 sowie die x -Achse durch den Schwerpunkt S des Dreiecks ABC , so hat die Trisektrix die Gleichung

$$y^2(k_1 + x) = x^2(3k_1 - x)$$

$$\text{mit } k_1 = \frac{1}{2} F_1 S = \frac{1}{6} \sqrt{S_\omega - \sqrt{3}S}.$$



Zur Herleitung der Gleichung und zur analytischen Bestätigung späterer Ergebnisse arbeitet man am besten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem, dessen Ursprung im Fermat-Punkt liegt und dessen x -Achse vorerst z.B. durch den am weitesten entfernten Eckpunkt A geht, mit den Koordinatendarstellungen

$$A(r_a; 0), B\left(-\frac{r_b}{2}; \frac{r_b}{2}\sqrt{3}\right), C\left(-\frac{r_c}{2}; -\frac{r_c}{2}\sqrt{3}\right),$$

wobei r_a, r_b, r_c die gerichteten Abstände der Ecken A, B, C zum Fermat-Punkt F_1 bezeichnen. Abschließend berücksichtigt man eine Drehung des Koordinatensystems um den Winkel

$$\varphi = \arctan \frac{\sqrt{3}(r_b - r_c)}{2r_a - r_b - r_c} \quad (\varphi < 180^\circ),$$

damit die x -Achse wie oben beschrieben durch den Schwerpunkt geht. Mit diesem Ansatz ergibt sich

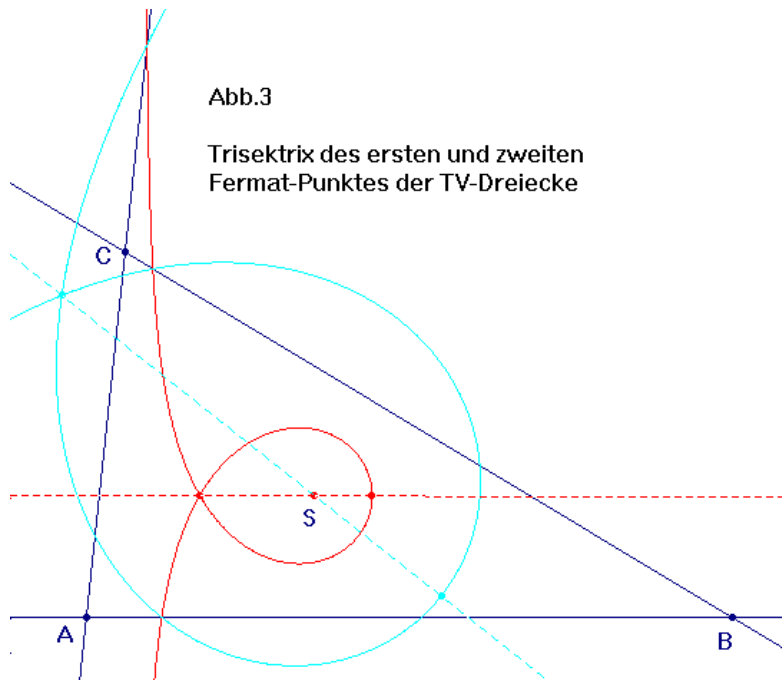
$$k_1 = \frac{1}{2} F_1 S = \frac{1}{6} \sqrt{r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 - r_a r_b - r_b r_c - r_c r_a}.$$

Benutzt man weiterhin die Zusammenhänge

$$r_a = \frac{3S_A + \sqrt{3}S}{3\sqrt{S_\omega + \sqrt{3}S}}, r_b = \frac{3S_B + \sqrt{3}S}{3\sqrt{S_\omega + \sqrt{3}S}}, r_c = \frac{3S_C + \sqrt{3}S}{3\sqrt{S_\omega + \sqrt{3}S}},$$

so erhält man die obigen Ergebnisse.

2. Ortslinie des zweiten Fermat-Punktes



Für den zweiten Fermat-Punkt erhält man entsprechende Ergebnisse. In den auftretenden Termen ist nur bei $\sqrt{3}$ das Vorzeichen zu ändern:

$$F_2 = \left(\frac{1}{S - \sqrt{3}S_A} : \frac{1}{S - \sqrt{3}S_B} : \frac{1}{S - \sqrt{3}S_C} \right),$$

$$k_2 = \frac{1}{2} F_2 S = \frac{1}{6} \sqrt{S_\omega - \sqrt{3}S}$$

$$\text{bzw. } \frac{1}{6} \sqrt{\rho_a^2 + \rho_b^2 + \rho_c^2 - \rho_a \rho_b - \rho_b \rho_c - \rho_c \rho_a},$$

wobei ρ_a, ρ_b, ρ_c die entsprechend gerichteten Abstände der Ecken vom zweiten Fermat-Punkt F_2 sind.

Das Verhältnis

$$\kappa = \frac{k_1}{k_2} = \sqrt{\frac{S_\omega - \sqrt{3}S}{S_\omega + \sqrt{3}S}} = \sqrt{\frac{\cot \omega - \sqrt{3}}{\cot \omega + \sqrt{3}}}$$

wird später wieder auftreten.

Die Symmetrieachsen der beiden Kurven schneiden sich im Schwerpunkt unter dem Winkel

$$\psi = \arccos\left(-\frac{(S_\omega - 3S_A)(S_\omega - 3S_B)(S_\omega - 3S_C)}{2(S_\omega^2 - 3S^2)^{3/2}}\right)$$

3. Geometrie der Trisektrix

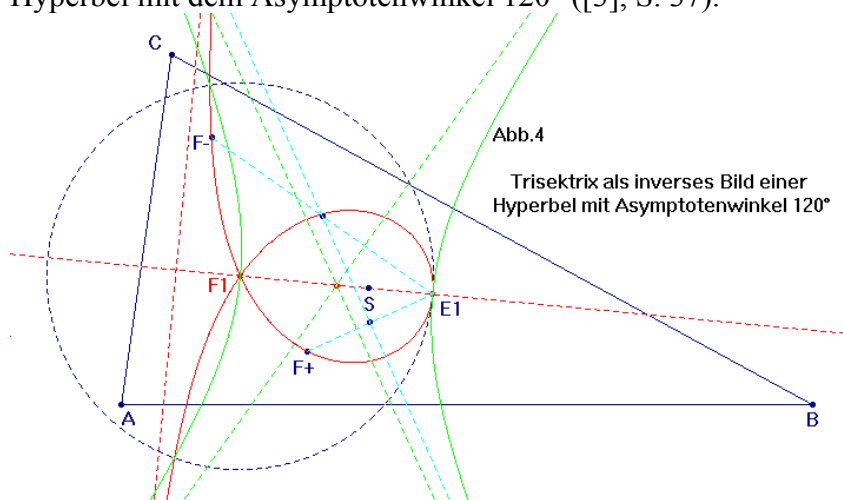
Eine Trisektrix hat zahlreiche geometrische Eigenschaften [3]; hier stellt sich die Frage nach dem geometrischen Bezug zu der erzeugenden Konstruktion durch Fermat-Punkte von TV-Dreiecken eines Bezugsdreiecks. Da die Ergebnisse für die erste und die zweite Trisektrix entsprechend ausfallen, wird auf eine unterscheidende Indizierung verzichtet.

(a) Eine Trisektrix ist als anallagmatische Kurve invariant gegenüber einer Inversion am Kreis um den Scheitel E durch den Knotenpunkt F (Abb.2). Dabei gehören Punkt und Bildpunkt zu TV-Dreiecken, für die das Produkt der Teilverhältnisse den Wert -1 hat.

(b) Mit einem TV-Dreieck zum Teilverhältnis t lässt sich immer ein „harmonisches“ TV-Dreieck zum Teilverhältnis $-t$ betrachten (Abb.1). Untersucht man z.B. die zugehörigen Fermat-Punkte, so hüllen die Mittelparallelens zum Scheitel E den Ast einer Hyperbel ein mit der Gleichung

$$12\left(x - \frac{3k}{2}\right)^2 - 4y^2 = 3,$$

den Scheitelpunkten F und E und einem Asymptotenwinkel von 120° (Abb.4). Spiegelt man diese Hyperbel am Kreis um den Knotenpunkt F durch den Scheitel E , so erhält man die Trisektrix. Bekanntlich ist jede Trisektrix das Inverse einer Hyperbel mit dem Asymptotenwinkel 120° ([3], S. 37).



c) Betrachtet man in Punkten X einer Trisektrix Senkrechten zur Verbindungsgeraden zum Knotenpunkt F (Abb.5), so hüllen diese eine Parabel mit der Gleichung $y^2 = 4(x - 3k)$ ein. Jede Trisektrix ist bekanntlich Fußpunktcurve einer Parabel ([3], S.35).

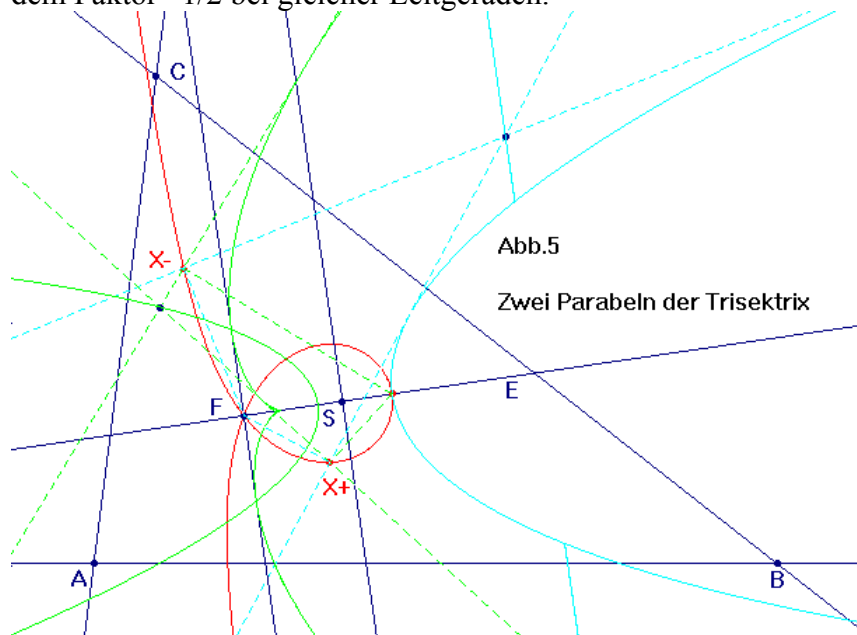
Für Kurvenpunkte X^+ und X^- zu „harmonischen“ TV-Dreiecken schneiden sich diese Parabeltangente auf einer Geraden mit der Gleichung $x = 6k$; dies ist die am Brennpunkt gespiegelte Leitgerade.

Betrachtet man in Punkten X einer Trisektrix Senkrechten zur Verbindungsgeraden zum Scheitelpunkt E (Abb.5), so sind diese Tangenten einer Kurve mit der Gleichung

$$y^2(18k^2 + 60kx - 4x^2 - 3y^2) = k(3k - 4x)^3.$$

Für Kurvenpunkte X^+ und X^- zu „harmonischen“ TV-Dreiecken schneiden sich diese Kurventangenten auf einer Parabel mit der Gleichung $y^2 = -2(x - \frac{3}{2}k)$. Diese zweite Parabel entsteht aus

der erstgenannten durch eine Streckung vom Schwerpunkt S mit dem Faktor $-1/2$ bei gleicher Leitgeraden.



4. Schnittgerade der beiden Ortslinien

Betrachtet man Abbildung 3 näher, so liegt die Vermutung nahe, dass sich die beiden Ortslinien auf den Dreiecksseiten schneiden.

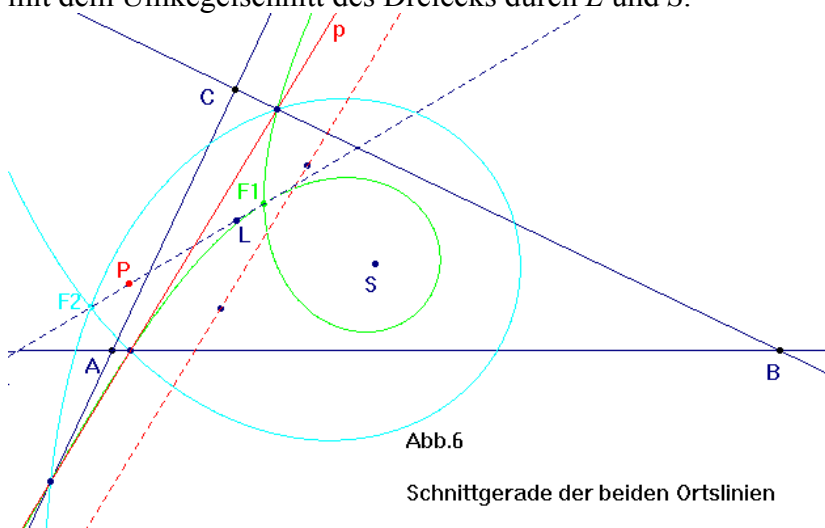
Zur ersten Ortslinie: Für die Teilverhältnisse

$$t_a = -\frac{r_c}{r_b}, \quad t_b = -\frac{r_a}{r_c}, \quad t_c = -\frac{r_b}{r_a}$$

wobei r_a, r_b, r_c die gerichteten Abstände der Ecken vom Fermat-Punkt F bezeichnen, erhält man Fermat-Punkte F_{ta}, F_{tb}, F_{tc} der TV-Dreiecke auf den Seitengeraden BC, CA, AB , die die Seiten in den Verhältnissen

$$-\frac{r_b(r_b^2 - r_c r_a)}{r_c(r_c^2 - r_a r_b)}, \quad -\frac{r_c(r_c^2 - r_a r_b)}{r_a(r_a^2 - r_b r_c)}, \quad -\frac{r_a(r_a^2 - r_b r_c)}{r_b(r_b^2 - r_c r_a)}$$

teilen. Da das Produkt der Teilverhältnisse -1 ergibt, liegen diese Schnittpunkte F_{1a}, F_{1b}, F_{1c} auf einer Geraden. Es lässt sich zeigen (Abb.6), dass diese Schnittgerade p eine Parallele zur Verbindungsgeraden der beiden Brocard-Punkte ist. Oder anders: Die Schnittgerade p ist Tripolare eines Punktes P auf der Verbindungsgeraden der beiden Fermat-Punkte F_1 und F_2 , und zwar neben dem Lemoine-Punkt L der zweite Schnittpunkt mit dem Umkegelschnitt des Dreiecks durch L und S .



Zur zweiten Ortslinie: Hier gelten entsprechende Aussagen, wenn man die gerichteten Abstände ρ_a, ρ_b, ρ_c der Ecken vom zweiten Fermat-Punkt F_2 betrachtet. Es bleibt noch zu zeigen, dass die Teilverhältnisse der Seiten übereinstimmen. Da sich die Quotienten

$$-\frac{r_a^3 - r_a r_b r_c}{\rho_a^3 - \rho_a \rho_b \rho_c} = -\frac{r_b^3 - r_a r_b r_c}{\rho_b^3 - \rho_a \rho_b \rho_c} = -\frac{r_c^3 - r_a r_b r_c}{\rho_c^3 - \rho_a \rho_b \rho_c} = \kappa$$

als schon bekannte Dreieckskonstante (vgl. 2) erweisen, ergibt sich unmittelbar

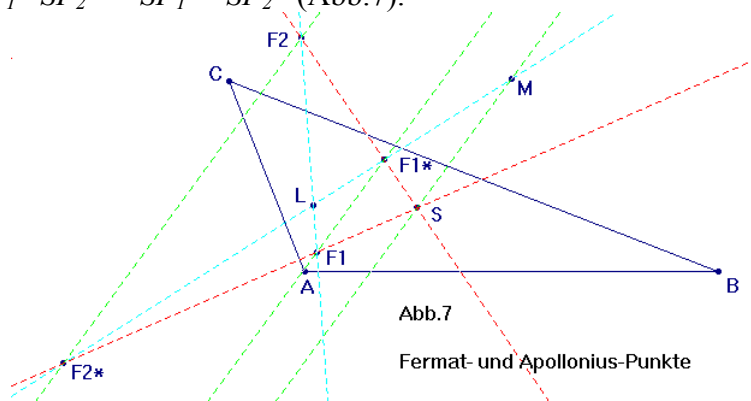
$$\text{z.B. für die Seite } AB \quad -\frac{r_a^3 - r_a r_b r_c}{r_b^3 - r_a r_b r_c} = -\frac{\rho_a^3 - \rho_a \rho_b \rho_c}{\rho_b^3 - \rho_a \rho_b \rho_c},$$

d.h. die erste und die zweite Trisektrix schneiden sich auf den Seitengeraden des Dreiecks.

5. Nachtrag

Ein geometrisch „verwandtes“ Punktepaar zu den Fermat-Punkten liefert ebenfalls Trisektrizen; es sind die Apollonius-Punkte, die gemeinsamen Punkte der drei Apollonius-Kreise eines Dreiecks. Sie sind die isogonal-konjugierten Bilder F_1^* und F_2^* der Fermat-Punkte auf der Brocard-Achse, die Verbindungsgeraden $F_1 F_1^*$ und $F_2 F_2^*$ sind Parallelen zur Euler-Geraden und die Verbindungsgeraden $F_1 F_2^*$ und $F_2 F_1^*$ schneiden sich im Schwerpunkt S . Die Strecken $F_1 F_2$ und $F_1^* F_2^*$ werden durch den Lemoine-Punkt im gleichen

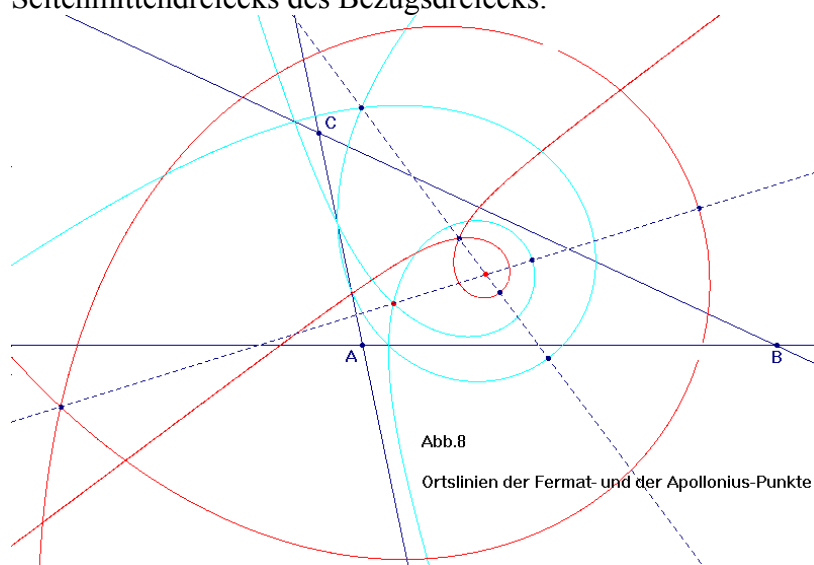
Verhältnis geteilt, und für die Abstände zum Schwerpunkt gilt $SF_1 \cdot SF_2 = SF_1^* \cdot SF_2^*$ (Abb.7).



Die Ortslinien der beiden Apollonius-Punkte der TV-Dreiecke sind Trisektrizen (Abb.8), die aus den Ortslinien des ersten und zweiten Fermat-Punktes durch Streckungen vom Schwerpunkt mit den reziproken Streckungsfaktoren

$$\frac{S_o - \sqrt{3}S}{S_o + \sqrt{3}S} = \kappa^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{S_o + \sqrt{3}S}{S_o - \sqrt{3}S} = \frac{1}{\kappa^2}$$

entstehen. Die Knoten liegen in den Apollonius-Punkten des Bezugsdreiecks und die Scheitel in den Apollonius-Punkten des Seitenmittendreiecks des Bezugsdreiecks.



Literatur

- [1] Problem Q 362; PM 5/44. Jg.2002, S.253.
- [2] F. v. LAMOEN and P. YIU: The Kiepert Pencil of Kiepert Hyperbolas. - Forum Geom., Vol. 1 (2001), S. 125.
- [3] H. SCHMIDT: Ausgewählte höhere Kurven. - Wiesbaden: Kesselringsche Buchhandlung 1949.

Eckart Schmidt - Hasenberg 27 - 24223 Raisdorf
Tel.: 04307/5954 - eckart_schmidt@t-online.de