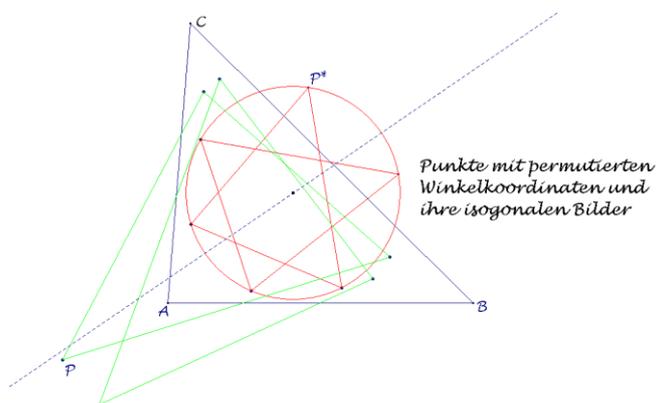


## Permutierte Winkelkoordinaten

Eckart Schmidt

*Permutiert man die Winkelkoordinaten eines Punktes bzgl. eines Dreiecks, so erhält man sechs Punkte, deren isogonale Bilder auf einem Kreis liegen, dessen Mitte ein Punkt der Brocard-Achse ist [Stä]. Dieser Zusammenhang wird hier verallgemeinert. – Gearbeitet wird eingangs in Winkelkoordinaten, dann in baryzentrischen Koordinaten.*



### Winkelkoordinaten

Die Winkelkoordinaten eines Punktes  $P$  bzgl. eines Dreiecks  $ABC$  sind die folgenden orientierten Winkel modulo  $180^\circ$ :

$$\varphi_1 = \angle BPC, \quad \varphi_2 = \angle CPA, \quad \varphi_3 = \angle APB .$$

Einige Beispiele:

Fermat-Punkt  $(120^\circ, 120^\circ, 120^\circ),$

Höhenschnitt  $H(-\alpha, -\beta, -\gamma),$

Umkreismitte  $O(2\alpha, 2\beta, 2\gamma),$

Inkreismitte  $I(90^\circ + \frac{\alpha}{2}, 90^\circ + \frac{\beta}{2}, 90^\circ + \frac{\gamma}{2}),$

Brocard-Punkte  $\Omega(-\gamma, -\alpha, -\beta)$  und  $\Omega'(-\beta, -\gamma, -\alpha),$

isodynamische Punkte  $(\alpha \pm 60^\circ, \beta \pm 60^\circ, \gamma \pm 60^\circ).$

Auch einige Abbildungen lassen sich einfach mit Winkelkoordinaten beschreiben:

Isogonale Konjugation

$$P(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \rightarrow P^*(\alpha - \varphi_1, \beta - \varphi_2, \gamma - \varphi_3),$$

Spiegelung am Umkreis

$$P(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \rightarrow P^\circ(2\alpha - \varphi_1, 2\beta - \varphi_2, 2\gamma - \varphi_3),$$

Spiegelungen an den Apollonius-Kreisen

$$P(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \rightarrow P^\alpha(\varphi_1, \beta - \gamma + \varphi_3, \gamma - \beta + \varphi_2),$$

$$P(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \rightarrow P^\beta(\alpha - \gamma + \varphi_3, \varphi_2, \gamma - \alpha + \varphi_1),$$

$$P(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \rightarrow P^\gamma(\alpha - \beta + \varphi_2, \beta - \alpha + \varphi_1, \varphi_3).$$

Die Winkelkoordinaten eines Punktes  $P$  haben einen einfachen Bezug zu den Innenwinkeln  $\alpha', \beta', \gamma'$  des Fußpunktdreiecks:

$$\alpha' = \varphi_1 - \alpha, \quad \beta' = \varphi_2 - \beta, \quad \gamma' = \varphi_3 - \gamma \pmod{180^\circ}.$$

Dies sind die negativen Winkelkoordinaten des isogonalen Bildpunktes  $P^*$ .

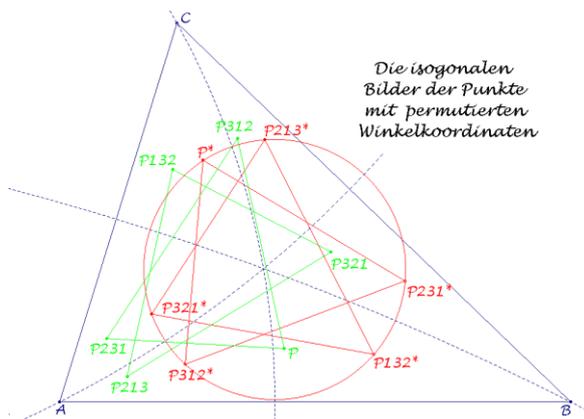
Zu einem Punkt  $P(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  seien nun die zugehörigen Punkte

$P_{ijk}(\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k)$  mit permutierten Winkelkoordinaten betrachtet:

Die folgende Abbildungskette

$$\begin{aligned} P(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) &\rightarrow P^*(\alpha - \varphi_1, \beta - \varphi_2, \gamma - \varphi_3) \\ &\rightarrow P^{*\alpha}(\alpha - \varphi_1, \beta - \varphi_3, \gamma - \varphi_2) \\ &\rightarrow P^{*\alpha*}(\varphi_1, \varphi_3, \varphi_2) = P_{132} \end{aligned}$$

liefert z.B. einen Punkt mit permutierten Winkelkoordinaten.



**Satz 1.** Spiegelt man das isogonale Bild eines Punktes  $P$  iteriert an den Apollonius-Kreisen, so haben die isogonalen Bilder dieser Spiegelpunkte permutierte Winkelkoordinaten von  $P$ .

Genauer aufgelistet:

$$P^{*\alpha*} = P_{132}, \quad P^{*\beta*} = P_{321}, \quad P^{*\gamma*} = P_{213},$$

$$P^{*\alpha\beta*} = P^{*\beta\gamma*} = P^{*\gamma\alpha*} = P_{231}, \quad P^{*\beta\alpha*} = P^{*\alpha\gamma*} = P^{*\gamma\beta*} = P_{312}.$$

Dabei gilt für die Spiegelungen an den Apollonius-Kreisen

$$\alpha\beta\gamma = \gamma\beta\alpha = \beta, \quad \beta\gamma\alpha = \alpha\gamma\beta = \gamma, \quad \gamma\alpha\beta = \beta\alpha\gamma = \alpha,$$

so dass die isogonalen Bilder von  $P_{ijk}$  paarweise symmetrisch zu den Apollonius-Kreisen liegen:

$$P_{123}^* = P_{132}^{*\alpha} = P_{321}^{*\beta} = P_{213}^{*\gamma},$$

$$P_{231}^* = P_{132}^{*\beta} = P_{321}^{*\gamma} = P_{213}^{*\alpha},$$

$$P_{312}^* = P_{132}^{*\gamma} = P_{321}^{*\alpha} = P_{213}^{*\beta}.$$

**Satz 2. Die isogonalen Bilder von Punkten mit permutierten Winkelkoordinaten bilden zwei Dreiecke**

$\Delta^- = P_{123} * P_{231} * P_{312} *$  und  $\Delta^+ = P_{132} * P_{213} * P_{321} *$ ,  
die symmetrisch zu den Apollonius-Kreisen liegen.

### Baryzentrische Koordinaten

Für die weitere analytische Behandlung werden baryzentrische Koordinaten benutzt. Ein Punkt  $P$  mit den Winkelkoordinaten  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  hat die baryzentrischen Koordinaten

$$P\left(\frac{1}{\cot \varphi_1 - \cot \alpha} : \frac{1}{\cot \varphi_2 - \cot \beta} : \frac{1}{\cot \varphi_3 - \cot \gamma}\right)$$

$$= P\left(\frac{1}{S \cot \varphi_1 - S_A} : \frac{1}{S \cot \varphi_2 - S_B} : \frac{1}{S \cot \varphi_3 - S_C}\right).$$

Dabei bezeichnen  $\alpha, \beta, \gamma$  hier die Innenwinkel des Bezugsdreiecks  $ABC$  mit den Seitenlängen  $a, b, c$ . Weiterhin werden die Conway-Abkürzungen benutzt:

$$2S_A = -a^2 + b^2 + c^2 = 2S \cot \alpha, \dots$$

$$2S_\omega = a^2 + b^2 + c^2 = 2S \cot \omega \quad (\omega \text{ Brocard-Winkel})$$

$$\text{und } S = \sqrt{S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A} = 2\Delta.$$

Die zu  $P$  gehörigen Punkte  $P_{ijk}$  mit den permutierten Winkelkoordinaten  $\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k$  haben die isogonalen Bilder

$$P_{ijk} * (a^2(S_A - S \cot \varphi_i) : b^2(S_B - S \cot \varphi_j) : c^2(S_C - S \cot \varphi_k)).$$

Die beiden Dreiecke

$$\Delta^- = P_{123} * P_{231} * P_{312} * \quad \text{und} \quad \Delta^+ = P_{132} * P_{213} * P_{321} *$$

liegen nicht nur symmetrisch zu den Apollonius-Kreisen, sondern haben auch einen gemeinsamen Umkreis.

**Satz 3. Die isogonalen Bilder von Punkten mit permutierten Winkelkoordinaten liegen auf einem Kreis, der die Apollonius-Kreise orthogonal schneidet und seinen Mittelpunkt auf der Brocard-Achse hat (Schoute-Kreis).**

Dieser Kreis hat die Gleichung

$$(const - S_A)a^2yz + (const - S_B)b^2zx + (const - S_C)c^2xy$$

$$- b^2c^2x^2 - c^2a^2y^2 - a^2b^2z^2 = 0$$

und den Mittelpunkt

$$Z(a^2(const \cdot S_A + S^2) : b^2(const \cdot S_B + S^2) : c^2(const \cdot S_C + S^2))$$

und den Radius

$$\frac{abc\sqrt{const^2 - 3S^2}}{2S(const + S\omega)}$$

$$\text{mit } const = -(\cot \varphi_1 + \cot \varphi_2 + \cot \varphi_3)S.$$

Gibt man dem Punkt  $P$  die baryzentrischen Koordinaten  $u, v, w$ , dann ist diese Konstante

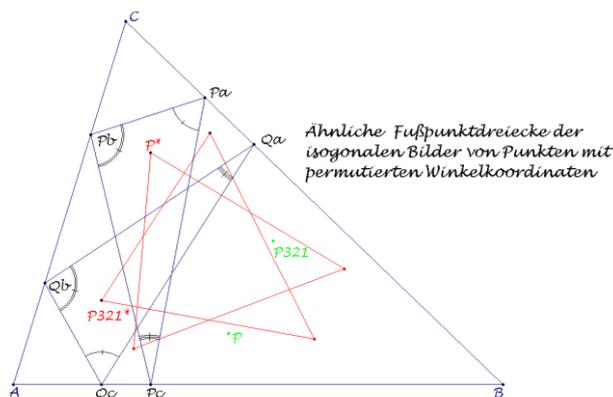
$$\text{const} = \frac{a^2v^2w^2 + b^2w^2u^2 + c^2u^2v^2 + uvw(S_Au + S_Bv + S_Cw)}{uvw(u + v + w)}.$$

Da die beiden Dreiecke  $\Delta^-$  und  $\Delta^+$  nach Satz 3 symmetrisch zu den Apollonius-Kreisen liegen, schneidet ihr gemeinsamer Umkreis die Apollonius-Kreise orthogonal, so dass der Mittelpunkt auf der Verbindungsgeraden der Schnittpunkte der Apollonius-Kreise, d.h. auf der Verbindungsgeraden der isodynamischen Punkte liegt. Dies ist die Brocard-Achse durch Umkreismitte  $O$  und Lemoine-Punkt  $L$ .

Es sei ergänzt, dass die beiden Dreiecke  $\Delta^-$  und  $\Delta^+$  nicht nur die gleiche Umkreismitte haben, sondern auch den gleichen Lemoine-Punkt sowie die gleichen Brocard-Punkte. Mit dem Ausgangsdreieck  $ABC$  stimmen sie nicht nur in der Brocard-Achse sondern auch in den isodynamischen Punkten überein. Die Apollonius-Kreise gehören zu einem elliptischen Kreisbüschel; der thematisierte Kreis gehört mit dem Umkreis und dem Brocard-Kreis des Dreiecks zum zugehörigen hyperbolischen Kreisbüschel, das orthogonal zum erstgenannten ist. Kreise dieses Büschels werden als Schoute-Kreise bezeichnet [Enz;1217]. Punkte eines Schoute-Kreises haben Fußpunktdreiecke mit gleichem Brocard-Winkel. Für den Brocard-Winkel der Fußpunktdreiecke zu Punkten des thematisierten Kreises gilt

$$\cot \omega' = -(\cot \varphi_1 + \cot \varphi_2 + \cot \varphi_3) = \frac{\text{const}}{S}.$$

Die Fußpunktdreiecke der Punkte  $P_{ijk}^*$  sind nicht nur „gleichbrocardisch“, sondern auch gleich- oder gegensinnig ähnlich, je nachdem es sich um Ecken von  $\Delta^+$  oder  $\Delta^-$  handelt; die Innenwinkel sind  $-\varphi_i, -\varphi_j, -\varphi_k \pmod{180^\circ}$ .

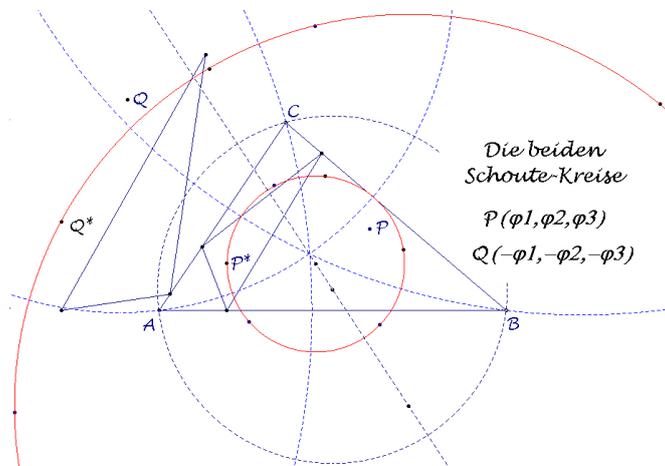


**Satz 4. Die Fußpunkdreiecke der isogonalen Bilder von Punkten mit permutierten Winkelkoordinaten sind ähnlich mit den negativen Winkelkoordinaten (mod 180°) als Innenwinkeln.**

Bringt man noch den Brocard-Winkel  $\omega$  des Bezugsdreiecks mit

$$\cot \omega = \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2S}$$

ins Spiel, so lässt sich festhalten, dass die Mitte  $Z$  des thematisierten Kreises den Brocard-Durchmesser  $OL$  im Verhältnis  $\cot \omega / \cot \omega'$  teilt.



Abschließend sei zu einem Punkt  $P$  mit den Winkelkoordinaten  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  der Punkt  $Q$  mit den negativen Winkelkoordinaten betrachtet. Man erhält diesen Punkt  $Q = P^{*o*}$ , indem man das isogonale Bild von  $P$  am Umkreis spiegelt und wieder isogonal abbildet. Permutiert man die Winkelkoordinaten von  $Q$  und bildet isogonal ab, so erhält man sechs Punkte auf einem zweiten Schoute-Kreis, die man auch durch iteriertes Spiegeln von  $Q^*$  an den Apollonius-Kreisen oder durch Spiegelung der entsprechenden Punkte für  $P$  am Umkreis findet. Damit ist der zweite Schoute-Kreis die Spiegelung des ersten am Umkreis. Die Fußpunkdreiecke der sechs Punkte auf dem zweiten Schoute-Kreis sind gegenseitig ähnlich zu den Fußpunkdreiecken der sechs Punkte auf dem ersten Schoute-Kreis.

### ABC-ähnliche Fußpunkdreiecke

Legt man den Punkt  $P$  in den Höhenschnitt

$$H\left(\frac{1}{S_A} : \frac{1}{S_B} : \frac{1}{S_C}\right)$$

mit den negativen Innenwinkeln  $-\alpha, -\beta, -\gamma$  als Winkelkoordinaten, dann erhält man durch Permutation der Winkelkoordinaten z.B. die Brocard-Punkte

$$\Omega\left(\frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2}\right) \quad \text{und} \quad \Omega'\left(\frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2}\right).$$

Das isogonale Bild des Höhenschnitts ist die Umkreismitte

$$O(a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C)$$

und die Brocard-Punkte sind zueinander isogonal. Damit ist der zugehörige Schoute-Kreis der Brocard-Kreis mit dem Durchmesser  $OL$  und der Gleichung

$$b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 + a^2b^2z^2 - a^4yz - b^4zx - c^4xy = 0.$$

Zu den sechs Punkten  $H_{ijk}^*$  auf diesem Kreis gehören neben der Umkreismitte  $O$  und den beiden Brocard-Punkten die Ecken des zweiten Brocard-Dreiecks, die man durch Spiegelung der Umkreismitte  $O$  an den Apollonius-Kreisen erhält:

$$O^\alpha(2S_A : b^2 : c^2), \quad O^\beta(a^2 : 2S_B : c^2), \quad O^\gamma(a^2 : b^2 : 2S_C).$$

Punkte mit den Winkelkoordinaten

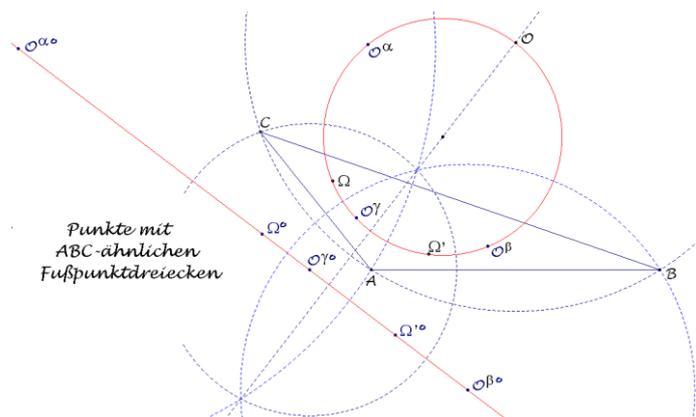
$$(\alpha, \beta, \gamma), (\alpha, \gamma, \beta), (\beta, \alpha, \gamma), (\gamma, \beta, \alpha)$$

existieren nicht, wohl aber Punkte zu den Winkelkoordinaten

$$(\beta, \gamma, \alpha): \Omega^{\circ*}\left(\frac{1}{a^2-b^2} : \frac{1}{b^2-c^2} : \frac{1}{c^2-a^2}\right),$$

$$(\gamma, \alpha, \beta): \Omega^{\circ*}\left(\frac{1}{c^2-a^2} : \frac{1}{a^2-b^2} : \frac{1}{b^2-c^2}\right).$$

Dies sind die isogonalen Bilder der Spiegelungen der Brocard-Punkte am Umkreis, d.h. die isogonalen Bilder dieser Punkte sind die Spiegelungen der Brocard-Punkte am Umkreis. Sie liegen auf der Tripolaren des Lemoine-Punktes (Lemoine-Gerade), die als Spiegelung des Brocard-Kreises am Umkreis als zweiter Schoute-Kreis angesprochen werden kann. Spiegelt man noch die Punkte  $O^\alpha, O^\beta, O^\gamma$  des ersten Schoute-Kreises am Umkreis, so ergeben sich die Mitten der Apollonius-Kreise auf der Lemoine-Geraden. Damit erhält man elf Punkte, deren Fußpunktdreiecke dem Bezugsdreieck  $ABC$  gleich- oder gegensinnig ähnlich sind.



**Satz 5.** Auf dem Brocard-Kreis liegen sechs Punkte mit  $ABC$ -ähnlichen Fußpunktdreiecken: Die Umkreismitte und die Brocard-Punkte sowie die Ecken des zweiten Brocard-Dreiecks [Joh;494].

Auf der Lemoine-Geraden liegen fünf Punkte mit  $ABC$ -ähnlichen Fußpunktdreiecken: Die Mitten der Apollonius-Kreise und die am Umkreis gespiegelten Brocard-Punkte [Joh;495].

### Gleiche Winkelkoordinaten

Punkte, deren Winkelkoordinaten alle  $120^\circ$  bzw.  $60^\circ$  messen, sind die isogonen Punkte

$$\left( \frac{1}{\sqrt{3}S_A \pm S} : \frac{1}{\sqrt{3}S_B \pm S} : \frac{1}{\sqrt{3}S_C \pm S} \right)$$

des Dreiecks, von denen der erste der Fermat-Punkt ist. Die zugehörigen Schoute-Kreise entarten punktuell in den gemeinsamen Punkten der Apollonius-Kreise, den isodynamischen Punkten.

Interessanter sind die Ortslinien von Punkten  $X$ , die in zwei Winkelkoordinaten übereinstimmen: Dazu sei  $\varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$ , so dass die Winkelkoordinaten von  $X$  mit  $-2\varphi, \varphi, \varphi$  beschrieben werden können. Eliminiert man in der Parameterdarstellung der baryzentrischen Koordinaten des Punktes

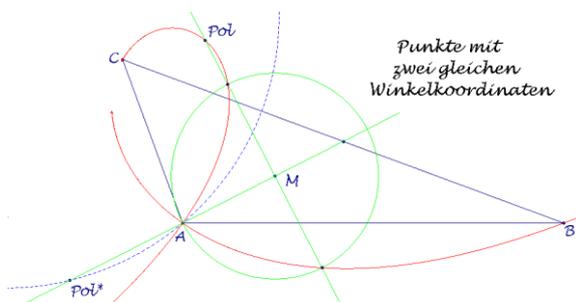
$$X(x : y : z) = X\left(\frac{1}{S_A + S \cot 2\varphi} : \frac{1}{S_B - S \cot \varphi} : \frac{1}{S_C - S \cot \varphi}\right)$$

den Parameter  $\varphi$ , dann ergibt sich als Ortslinie eine Kurve dritten Grades, deren Gleichung

$$x(c^2y^2 - b^2z^2) + 2yz(S_By - S_Cz) = 0$$

sie als isogonales Bild des Apollonius-Kreises durch  $A$  ausweist.

**Satz 6.** Punkte, die in zwei Winkelkoordinaten übereinstimmen, liegen auf den Strophoiden, die sich als isogonale Bilder der Apollonius-Kreise ergeben.



Betrachtet werden hier Strophoiden zu einer erzeugenden Geraden  $q$  bzgl. eines Pols  $P \notin q$  und eines festen Punktes  $Q \in q$  nach folgender Konstruktion: Zeichnet man um einen Punkt  $M$  auf der erzeugenden Geraden  $q$  einen Kreis durch den

festen Punkt  $Q$  und von  $M$  die Verbindungsgerade zum Pol  $P$ , dann sind die Schnitte Punkte der Strophoide. Erzeugende Gerade ist im vorliegenden Fall die Seitenhalbierende durch den festen Punkt  $A$ , Pol ist das isogonale Bild des Schnitts von Apollonius-Kreis und Seitenhalbierende:

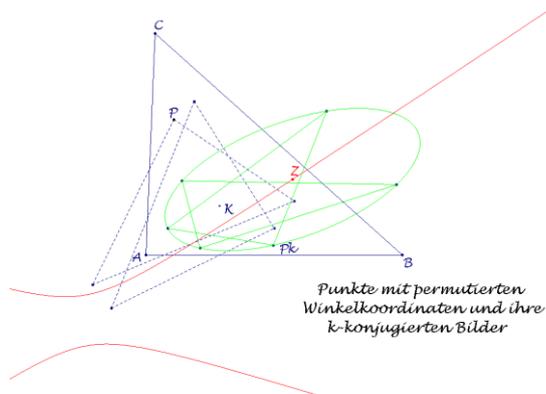
$$Pol(2S_A, b^2, c^2).$$

Anzumerken bleibt, dass dieser Pol die Winkelkoordinaten  $-2\alpha, \alpha, \alpha$  hat.

### Verallgemeinerung

Es liegt nahe, neben den isogonalen Bildern der Punkte mit permutierten Winkelkoordinaten auch die Bildpunkte zu anderen Konjugationen zu betrachten:

$$\kappa: X(x:y:z) \rightarrow X^\kappa(k^2yz:l^2zx:m^2xy).$$



**Satz 7.** Die  $\kappa$ -konjugierten Bilder von Punkten mit permutierten Winkelkoordinaten liegen auf einem Kegelschnitt  $k(P, \kappa)$ .

Die Gleichung dieses Kegelschnitts  $k(P, \kappa)$  errechnet sich zu

$$k^2(const - S_A)yz + l^2(const - S_B)zx + m^2(const - S_C)xy - \frac{l^2m^2}{k^2}a^2x^2 - \frac{m^2k^2}{l^2}b^2y^2 - \frac{k^2l^2}{m^2}c^2z^2 = 0$$

mit dem Zentrum

$$\begin{aligned} & Z(k^2(k^2((const - S_A)^2 - 4b^2c^2) \\ & \quad - m^2(const^2 + (const - 2S_B)b^2 + S_A S_C) \\ & \quad - l^2(const^2 + (const - 2S_C)c^2 + S_A S_B)) \\ & : l^2(-m^2(const^2 + (const - 2S_A)a^2 + S_B S_C) \\ & \quad + l^2((const - S_B)^2 - 4c^2a^2) \\ & \quad - k^2(const^2 + (const - 2S_C)c^2 + S_A S_B)) \\ & : m^2(-l^2(const^2 + (const - 2S_A)a^2 + S_B S_C) \\ & \quad - k^2(const^2 + (const - 2S_B)b^2 + S_C S_A) \\ & \quad + m^2((const - S_C)^2 - 4a^2b^2)). \end{aligned}$$

Dabei ist die vom Punkt  $P$  abhängige Konstante die gleiche wie im isogonalen Fall. Für die Zentren dieser Kegelschnitte gilt:

**Satz 8. Die Zentren der Kegelschnitte zu den  $\kappa$ -konjugierten Bildern von Punkten mit permutierten Winkelkoordinaten liegen auf einem weiteren Kegelschnitt  $k(\kappa)$ .**

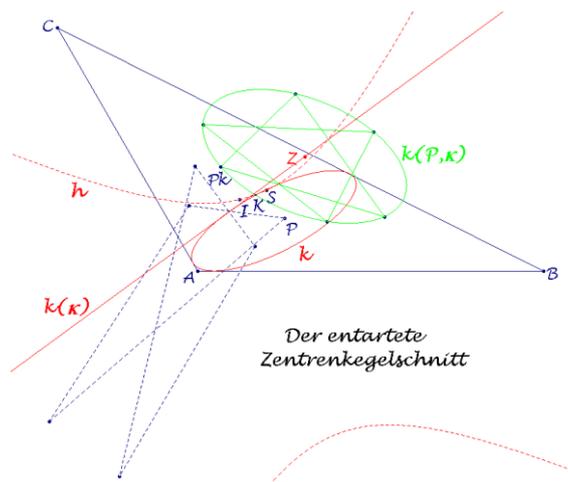
Die Gleichung dieses  $\kappa$ -abhängigen Zentren-Kegelschnitts  $k(\kappa)$  ist

$$\begin{aligned} & k^2(l^2(2S_A + c^2) - m^2(2S_A + b^2))yz \\ & + l^2(m^2(2S_B + a^2) - k^2(2S_B + c^2))zx \\ & + m^2(k^2(2S_C + b^2) - l^2(2S_C + a^2))xy \\ & - \frac{l^2m^2}{k^2}(k^2(c^2 - b^2) + 2a^2(l^2 - m^2))x^2 \\ & - \frac{m^2k^2}{l^2}(l^2(a^2 - c^2) + 2b^2(m^2 - k^2))y^2 \\ & - \frac{k^2l^2}{m^2}(m^2(b^2 - a^2) + 2c^2(k^2 - l^2))z^2 = 0. \end{aligned}$$

Dieser Kegelschnitt enthält die  $\kappa$ -konjugierten Bilder der isogonalen Punkte, weiterhin aber auch das Zentrum

$$Z_\kappa(k^2(-k^2 + l^2 + m^2) : l^2(k^2 - l^2 + m^2) : m^2(k^2 + l^2 - m^2))$$

des Umkegelschnitts, der das  $\kappa$ -konjugierte Bild der Ferngeraden ist.



**Satz 9. Der Zentren-Kegelschnitt  $k(\kappa)$  entartet zu einem Geradenpaar für  $\kappa$ -Konjugationen mit Fixpunkten auf der gleichseitigen Hyperbel  $h$  durch den Schwerpunkt (oder die Inkreismitte) sowie die Ecken des zugehörigen Anti-Ceva-Dreiecks.**

Die Gleichung dieser gleichseitigen Hyperbel  $h$  ist

$$(b^2 - c^2)x^2 + (c^2 - a^2)y^2 + (a^2 - b^2)z^2 = 0.$$

Die Zentren liegen dann auf einer Geraden  $g(\kappa)$  mit der Gleichung

$$l^2m^2(b^2 - c^2)x + m^2k^2(c^2 - a^2)y + k^2l^2(a^2 - b^2)z = 0.$$

Diese Geraden sind die  $\kappa$ -Bilder der Kiepert-Hyperbel, einer gleichseitigen Hyperbel durch den Schwerpunkt. Auf der Kiepert-Hyperbel liegen neben dem Schwerpunkt unter anderen auch der Höhenschnitt, der Spieker-Punkt  $X(10)$ , die isogonen Punkte  $X(13)$  und  $X(14)$ , der dritte Brocard-Punkt  $X(76)$  und das isogonale Bild der Brocard-Mitte  $X(83)$  ( $X(n)$  ist die ETC-Koordinate [ETC]). Die  $\kappa$ -konjugierten Bilder dieser Punkte sind somit Punkte der Geraden  $g(\kappa)$ .

**Satz 10. Entartet der Zentrenkegelschnitt  $k(\kappa)$  zu einem Geradenpaar, dann liegen die Zentren der Kegelschnitte  $k(P, \kappa)$  auf der Geraden, die  $\kappa$ -konjugiertes Bild der Kiepert-Hyperbel ist.**

Weiterhin sind die Geraden  $g(\kappa)$  Tangenten an einen Berührkegelschnitt  $k$  des Dreiecks mit der Gleichung

$$(b^2 - c^2)^4 x^2 + (c^2 - a^2)^4 y^2 + (a^2 - b^2)^4 z^2 - 2(b^2 - c^2)^2(c^2 - a^2)^2 xy - 2(c^2 - a^2)^2(a^2 - b^2)^2 yz - 2(a^2 - b^2)^2(b^2 - c^2)^2 zx = 0$$

und den Berührungspunkten  $(k^4 : l^4 : m^4)$ . Dieser Berührkegelschnitt  $k$  berührt die obige rechtwinklige Hyperbel  $h$  im Schwerpunkt  $S$ . Der Brianchon-Punkt

$$\left( \frac{1}{(b^2 - c^2)^2} : \frac{1}{(c^2 - a^2)^2} : \frac{1}{(a^2 - b^2)^2} \right)$$

ist das isotome Bild des Zentrums der Kiepert-Hyperbel.

### Die isotomen Bilder

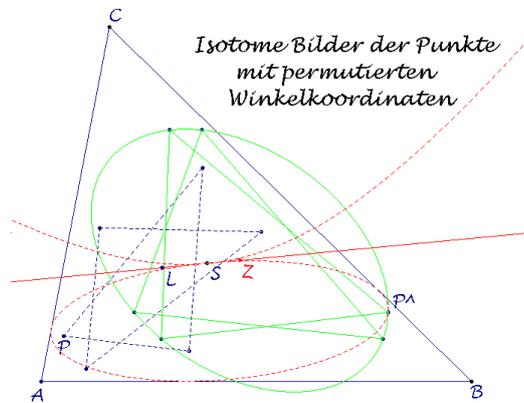
Einleitend wurden die isogonalen Bilder der Punkte mit permutierten Winkelkoordinaten betrachtet. Die zugehörigen Ergebnisse finden sich für  $k = a, l = b, m = c$  im vorigen Abschnitt wieder. Eine Gerade des entarteten Zentrenkegelschnitts ist die Brocard-Achse, die den obigen Berührkegelschnitt im Punkt  $X(32) = (a^4, b^4, c^4)$  berührt. Dieser Punkt ist die Spiegelung der Brocard-Mitte am Brocard-Kreis.

Abschließend seien hier die isotomen Bilder der Punkte mit permutierten Winkelkoordinaten betrachtet:  $k = l = m = 1$ . Diese liegen auf einem Kegelschnitt mit der Gleichung

$$(const - S_A)yz + (const - S_B)zx + (const - S_C)xy - a^2x^2 - b^2y^2 - c^2z^2 = 0$$

und dem Zentrum

$$Z(const + 3S_A : const + 3S_B : const + 3S_C).$$



Der Zentrenkegelschnitt entartet wie im isogonalen Fall und die Zentren liegen auf der Verbindungsgeraden von Schwerpunkt und Lemoine-Punkt mit der Gleichung

$$(b^2 - c^2)x + (c^2 - a^2)y + (a^2 - b^2)z = 0.$$

Diese Gerade ist Tangente im Schwerpunkt an die Kiepert-Hyperbel, gleichzeitig deren isotomes Bild; andererseits die gemeinsame Tangente der gleichseitigen Hyperbel  $h$  und des Berührkegelschnitts  $k$ .

**Satz 11. Die isotomen Bilder von Punkten mit permutierten Winkelkoordinaten liegen auf Kegelschnitten mit Zentren auf einer Geraden, deren isotomes Bild die Kiepert-Hyperbel ist.**

## Literatur

- [Stä] Persönliche Mitteilung von Roland Stärk (28.03.2011).  
 [Enz] G. Berkhan, W. F. Meyer: Neuere Dreiecksgeometrie. – Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Leipzig 1931.  
 [Joh] R. A. Johnson: Advanced Euclidian Geometry. – Dover Publications, Mineola, New York, 2007.  
 [ETC] C. Kimberling: Encyclopedia of Triangle Centers. – <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/>.