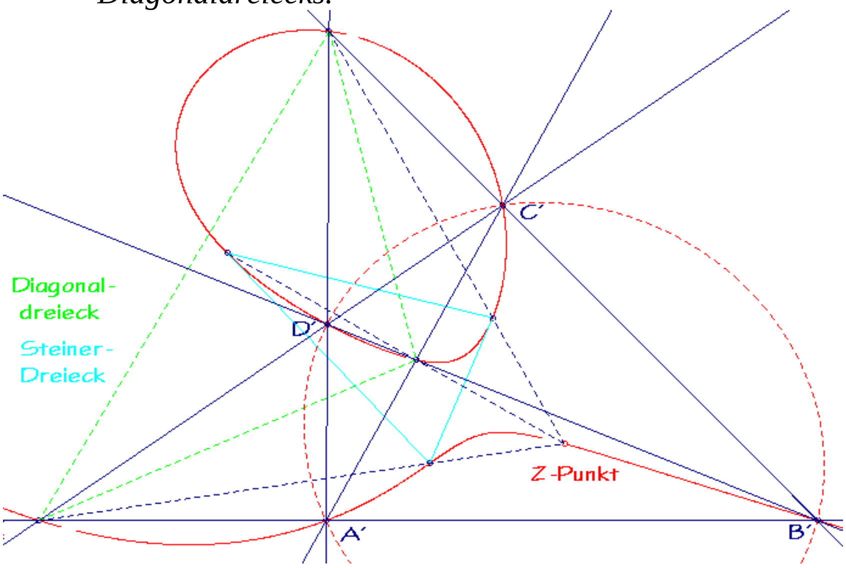
Ein weiterer merkwürdiger Viereckspunkt

Eckart Schmidt

Zu vier Punkten lassen sich drei Vierecke bzw. Vierseite betrachten. Die jeweiligen Verbindungsgeraden von Diagonalenschnitt und Steiner-Punkt sind kopunktal. Dieser gemeinsame Punkt sei als Z-Punkt der vier Punkte bezeichnet. Die Namensgebung lässt anklingen, dass der Z-Punkt nicht nur Perspektivzentrum, sondern auch Zentrum eines Umkegelschnitts ist, somit auf dem Mittenkegelschnitt liegt, aber auch Punkt der Zirkularkurve ist, die durch die Ecken des Diagonaldreiecks und des Steiner-Dreiecks geht. Bzgl. des Steiner-Dreiecks ist der Z-Punkt das isogonal-konjugierte Bild des Tangentialpunktes von Stärk [1]. Weitere geometrische Eigenschaften des Z-Punktes sind Gegenstand dieser Ausarbeitung. Die analytische Behandlung erfolgt in baryzentrischen Koordinaten des Diagonaldreiecks.

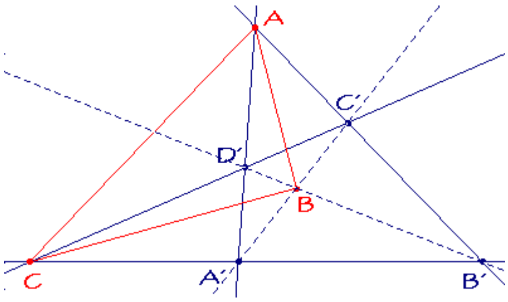


Baryzentrische Koordinaten

Zu einem Viereck *A´B´C´D´*, dessen Gegenseiten bzw. Diagonalen nicht parallel sind, wird das Diagonaldreieck *ABC* betrachtet. Die Bezeichnungsweise sei so gewählt, dass *D´* innerhalb des Diagonaldreiecks liegt und *A´B´C´* das zugehörige Anti-Ceva-Dreieck von *D´* bezüglich *ABC* ist.

Wählt man das Diagonaldreieck *ABC* als Bezugsdreieck für baryzentrische Koordinaten, so ist folgende Koordinatenwahl möglich:

$$A'(-u:v:w),\ B'(u:-v:w),\ C'(u:v:-w),\ D'(u:v:w).$$



Definition: **Zu vier Punkten lassen sich drei Vierecke bzw. Vierseite betrachten. Der Z-Punkt ist das Perspektivzentrum des Diagonaldreiecks und des Steiner-Dreiecks.**

Der Steiner-Punkt des Vierseits zu A´B´C´D´ ist bekanntlich der gemeinsame Schnittpunkt der Umkreise der Teildreiseite, d. h. der Dreiecke A´B´A, B´C´C, C´D´A, D´A´C. Seine Darstellung in baryzentrischen Koordinaten ergibt sich zu

$$S_{A'B'C'D'}(W-\mu S_C : 2v^2 : U-\mu S_A)$$

mit $U=-u^2+v^2+w^2,\quad V=u^2-v^2+w^2,\quad W=u^2+v^2-w^2$

und $\mu=\dfrac{(u+v+w)(-u+v+w)(u-v+w)(u+v-w)}{S_A u^2+S_B v^2+S_C w^2}$.

Entsprechend berechnen sich die weiteren Steiner-Punkte

$$S_{A'B'D'C'}(2u^2 : W-\mu S_C : V-\mu S_B),$$

$$S_{A'D'B'C'}(V-\mu S_B : U-\mu S_A : 2w^2).$$

Die kopunktalen Verbindungsgeraden

$$AS_{A'B'D'C'},\quad BS_{A'B'C'D'},\quad CS_{A'D'B'C'}$$

liefern den Z-Punkt:

$$Z\Big(\frac{1}{-2a^2v^2w^2+b^2w^2W+c^2v^2V} : \frac{1}{a^2w^2W-2b^2u^2w^2+c^2u^2U} : \frac{1}{a^2v^2V+b^2u^2U-2c^2u^2v^2}\Big)$$

Geometrie des Z-Punkts

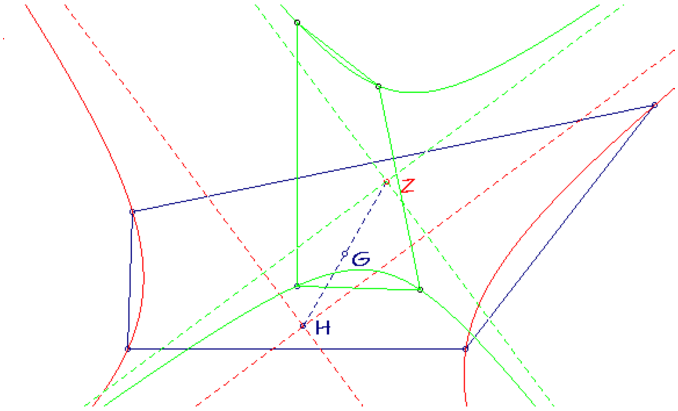
Betrachtet man zu einem nicht-orthozentrischen Viereck A´B´C´D´ die Neun-Punkte-Kreise der Teildreiecke A´B´C´, B´C´D´, C´D´A´, D´A´B´, so erhält man im gemeinsamen Schnittpunkt H das Zentrum der gleichseitigen Umhyperbel:

$$H((a^2v^2-b^2u^2)(a^2w^2-c^2u^2) : (b^2u^2-a^2v^2)(b^2w^2-c^2v^2) : (c^2v^2-b^2w^2)(c^2u^2-a^2w^2))$$

Spiegelt man diesen merkwürdigen Punkt des Vierecks am Schwerpunkt

$$G(u^2U : v^2V : w^2W),$$

so erhält man den Z-Punkt.
Betrachtet man das Viereck der Umkreismitten obiger Teildreiecke, so erweist sich der Z-Punkt als Zentrum der gleichseitigen Umhyperbel dieses Vierecks.



Satz 1. **Spiegelt man das Zentrum der gleichseitigen Umhyperbel eines Vierecks am Schwerpunkt, so erhält man den Z-Punkt, der wiederum Zentrum der gleichseitigen Umhyperbel des Umkreismittenvierecks ist.**

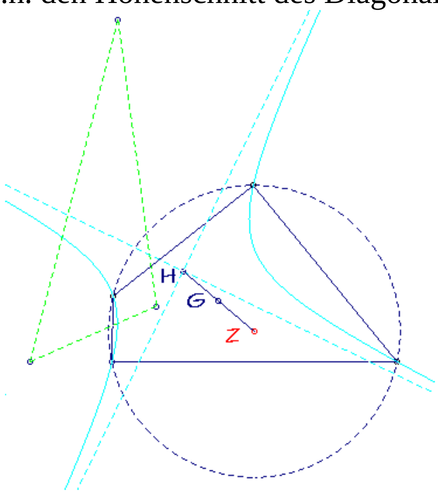
Für ein Kreisviereck mit

$$S_A u^2 + S_B v^2 + S_C w^2 = 0$$

entartet das Umkreismittenviereck trivial und der Z-Punkt fällt in die Umkreismitte

$$(S_B S_C : S_A S_C : S_A S_B)$$

des Vierecks, d.h. den Höhenschnitt des Diagonaldreiecks.



Der Mittenkegelschnitt

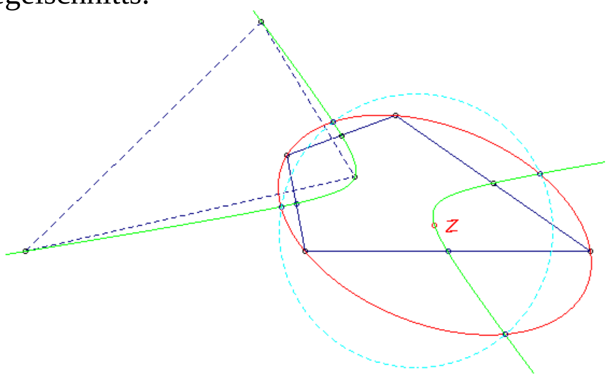
Bekanntlich liegen die Seiten- und Diagonalenmitten eines Vierecks auf einem Kegelschnitt, dem Mittenkegelschnitt, mit dem Zentrum im Schwerpunkt. Seine Gleichung ist

$$u^2 yz + v^2 zx + w^2 xy = 0 .$$

Mit dem Zentrum der gleichseitigen Umhyperbel liegt daher auch der Z-Punkt auf dem Mittenkegelschnitt und ist Zentrum eines speziellen Umkegelschnitts mit der Gleichung

$$\begin{aligned}&(-2a^2v^2w^2 + b^2w^2W + c^2v^2V)x^2\\ &\quad + (a^2w^2W - 2b^2u^2w^2 + c^2u^2U)y^2\\ &\qquad + (a^2v^2V + b^2u^2U - 2c^2u^2v^2)z^2 = 0\end{aligned}$$

Die Schnittpunkte dieses speziellen Umkegelschnitts mit dem Mittenkegelschnitt liegen auf einem Kreis. Die Achsen dieses Umkegelschnitts und die Asymptoten der gleichseitigen Umhyperbel liegen symmetrisch zu den Achsen des Mittenkegelschnitts.



Satz 2. **Der Z-Punkt liegt auf dem Mittenkegelschnitt und ist Zentrum eines speziellen Umkegelschnitts, der den Mittenkegelschnitt konzyklisch schneidet.**

Der Mittenkegelschnitt ist nicht nur die Ortlinie für die Zentren der Umkegelschnitte, sondern auch das Bild der Ferngeraden bei der Viereckskonjugation. Diese Konjugation ordnet jedem Punkt den gemeinsamen Punkt der Polaren bzgl. aller Umkegelschnitte des Vierecks zu. Die Zuordnungsvorschrift lautet

$$X(x:y:z) \quad \to \quad X'(u^2yz : v^2zx : w^2xy)\,.$$

Dabei ist der Z-Punkt das Bild eines Fernpunktes (s.u.):

$$\begin{aligned}&F(u^2(-2a^2v^2w^2 + b^2w^2W + c^2v^2V)\\ &\quad : v^2(a^2w^2W - 2b^2u^2w^2 + c^2u^2U)\\ &\qquad : w^2(a^2v^2V + b^2u^2U - 2c^2u^2v^2))\end{aligned}$$

Die Zirkularkurve

Zu einem Viereck lässt sich eine Kurve dritter Ordnung betrachten, invariant unter der Viereckskonjugation mit dem sogenannten Tangentialpunkt als Pivot-Punkt. Der Pivot-Punkt bezeichnet den gemeinsamen Schnittpunkt aller Punkt-Bildpunkt-Geraden von Kurvenpunkten. Der hier gewählte Tangentialpunkt eines Vierecks ist der gemeinsame Punkt der Eck-Tangenten an die Kurve. Sein vielseitiger geometrischer Bezug als merkwürdiger Viereckspunkt wird von Stärk [1] ausführlich behandelt. Konstruktiv erhält man den

Tangentialpunkt als zweiten Schnittpunkt der Kreise durch zwei Gegenecken und den Steiner-Punkt. Seine Koordinaten ergeben sich zu:

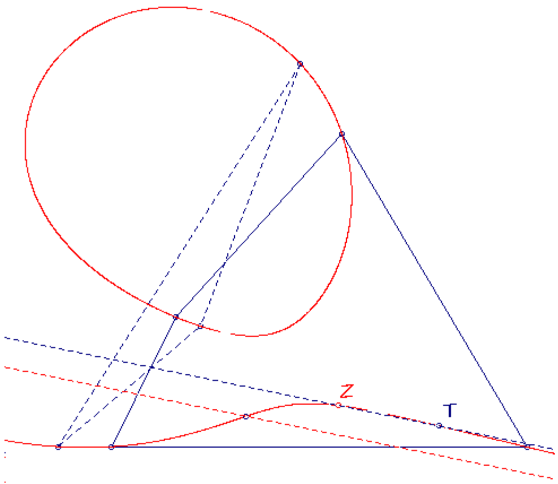
$$T(+a^4v^2w^2 - b^4u^2w^2 - c^4u^2v^2 + b^2c^2u^2U$$
$$: -a^4v^2w^2 + b^4u^2w^2 - c^4u^2v^2 + a^2c^2v^2V$$
$$: -a^4v^2w^2 - b^4u^2w^2 + c^4u^2v^2 + a^2b^2w^2W)$$

Damit erhält die Zirkularkurve folgende Gleichung

$$(+a^4v^2w^2 - b^4u^2w^2 - c^4u^2v^2 + b^2c^2u^2U)(v^2z^2 - w^2y^2)x$$
$$+ (-a^4v^2w^2 + b^4u^2w^2 - c^4u^2v^2 + a^2c^2v^2V)(u^2z^2 - w^2x^2)y$$
$$+ (-a^4v^2w^2 - b^4u^2w^2 + c^4u^2v^2 + a^2b^2w^2W)(u^2y^2 - v^2x^2)z = 0$$

und der Z-Punkt erweist sich als Punkt dieser Zirkularkurve. Der Bildpunkt des Z-Punktes bei der Viereckskonjugation ist der schon oben angesprochene Fernpunkt, der somit die Richtung der Asymptoten der Zirkularkurve festlegt. Die Verbindungsgerade TZ ist also eine Parallele zur Asymptoten.

Satz 3. **Der Z-Punkt liegt auf der Zirkularkurve des Vierecks. Sein Bild bei der Viereckskonjugation ist der Fernpunkt der Asymptoten; sein isogonal-konjugiertes Bild bzgl. des Steiner-Dreiecks ist der Tangentialpunkt.**

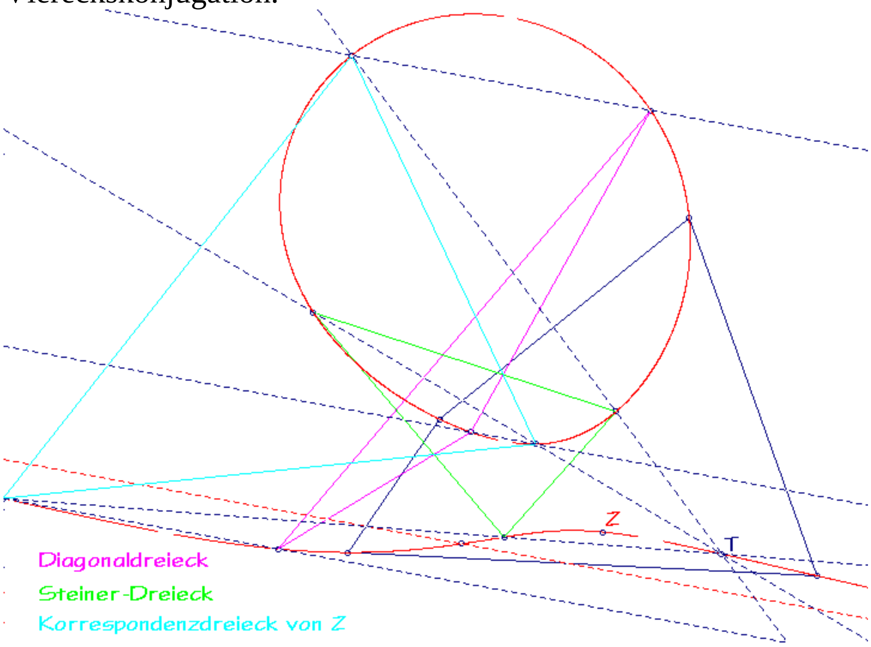


Betrachtet man das Dreieck der Steiner-Punkte als Bezugsdreieck, so ist die Zirkularkurve isogonal-konjugiert invariant. Die Verbindungsgeraden isogonal-konjugierter Kurvenpunkte sind Parallelen der Asymptoten. Damit ist der Z-Punkt isogonal-konjugiertes Bild des Tangentialpunktes bzgl. des Steiner-Dreiecks.

Korrespondierende Punkte

Zu vier Punkten A´, B´, C´, D´ wird wieder die Zirkularkurve betrachtet; einerseits invariant unter der Viereckskonjugation mit dem Pivot-Punkt im Tangentialpunkt andererseits isogonal-konjugiert invariant bzgl. des Steiner-Dreiecks mit dem Pivot-

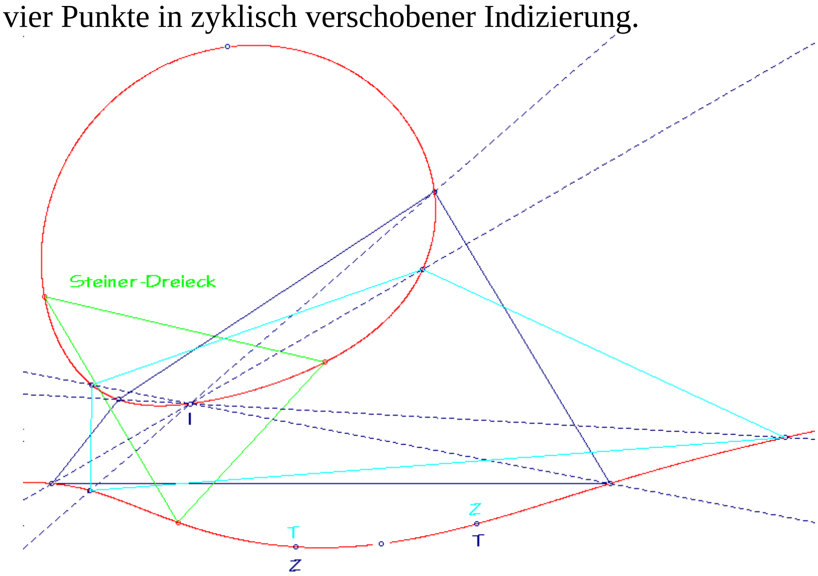
Punkt im Fernpunkt der Asymptoten. Vier Punkte der Zirkularkurve werden als korrespondierend bezeichnet, wenn sich die zugehörigen Tangenten in einem Kurvenpunkt schneiden; z.B. korrespondieren die vier Ausgangspunkte. Zu einem Kurvenpunkt erhält man die drei korrespondierenden Punkte – kurz Korrespondenzdreieck benannt – , indem man die Bildpunkte bei den Inversionen betrachtet, die einen Steiner-Punkt fest lassen und die beiden anderen vertauschen. Das Korrespondenzdreieck eines Kurvenpunktes P liegt perspektiv zum Steiner-Dreieck; Perspektivzentrum ist das isogonal-konjugierte Bild von P bzgl. des Steiner-Dreiecks. Damit sind die korrespondierenden Punkte des Tangentialpunktes die Ecken des Diagonaldreiecks. Das Korrespondenzdreieck des Z-Punktes liegt perspektiv zum Steiner-Dreieck mit dem Perspektivzentrum im Tangentialpunkt. Da der Tangentialpunkt Pivot-Punkt ist, sind die korrespondierenden Punkte des Z-Punktes die Bilder der Steiner-Punkte bei der Viereckskonjugation.



Andererseits liegt das Korrespondenzdreieck eines Kurvenpunktes P perspektiv zum Diagonaldreieck; Perspektivzentrum ist jetzt das Bild von P bei der Viereckskonjugation. Für den Z-Punkt ist das Perspektivzentrum der Fernpunkt der Asymptoten, so dass die mit Z korrespondierenden Punkte die isogonal-konjugierten Bilder der Ecken des Diagonaldreiecks sind.

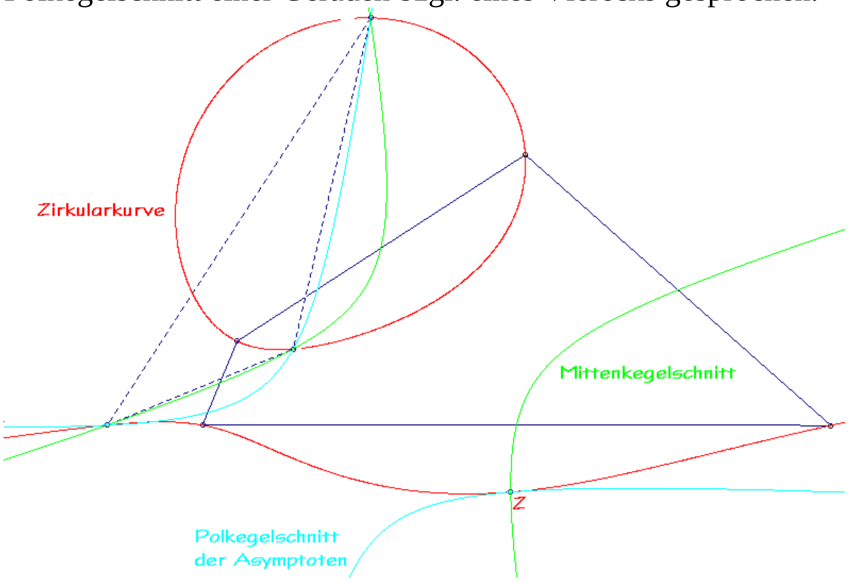
Satz 4. **Die mit dem Z-Punkt korrespondierenden Punkte sind einerseits die Bildpunkte der Steiner-Punkte bei der Viereckskonjugation, andererseits die bzgl. des Steiner-Dreiecks isogonal-konjugierten Bilder der Ecken des Diagonaldreiecks.**

Anmerkung: Alle Quadrupel korrespondierender Punkte haben das gleiche Steiner-Dreieck. Die diesbezügliche isogonal-konjugierte Partnerschaft von Tangentialpunkt und Z-Punkt lässt sich weiter hinterfragen: Gibt es vier korrespondierende Punkte auf der Zirkularkurve, für die der alte Tangentialpunkt zum neuen Z-Punkt und der alte Z-Punkt zum neuen Tangentialpunkt wird. Ein solches Viereck erhält man perspektiv zum Ausgangsviereck, wenn man als Perspektivzentrum die Inkreismitte des Steiner-Dreiecks wählt. Wählt man eine Ankreismitte als Perspektivzentrum, erhält man die gleichen vier Punkte in zyklisch verschobener Indizierung.



Der Polkegelschnitt der Asymptoten

Bildet man eine Gerade mit der Viereckskonjugation ab, so erhält man einen Umkegelschnitt des Diagonaldreiecks. Auf diesem Kegelschnitt liegen die Pole der vorgegebenen Geraden bzgl. aller Umkegelschnitte des Vierecks. Deshalb sei von dem Polkegelschnitt einer Geraden bzgl. eines Vierecks gesprochen.



Es liegt nahe, den Polkegelschnitt der Asymptoten der Zirkularkurve zu betrachten. Diese Asymptote kann als

Tangente im Fernpunkt der Zirkularkurve angesprochen werden. Da der Z-Punkt das Bild dieses Fernpunktes bei der Viereckskonjugation ist, berührt der Polkegelschnitt der Asymptoten die Zirkularkurve im Z-Punkt.

Satz 5. **Der Z-Punkt eines Vierecks ist der Berührpunkt der Zirkularkurve und des Polkegelschnitts ihrer Asymptoten.**

Damit erweist sich der Z-Punkt als gemeinsamer Punkt dreier vierecksspezifischer Kurven: des Mittenkegelschnitts, der Zirkularkurve und des Polkegelschnitts ihrer Asymptoten.

Literatur:

[1] R. Stärk und D. Baumgartner: Ein merkwürdiger Punkt des Vierecks. – PM 1/44. Jg 2002, S. 19.

Eckart Schmidt - Hasenberg 27 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de