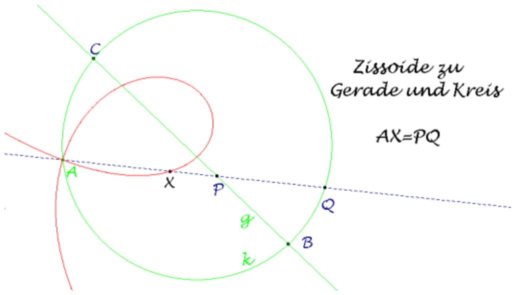
Zissoide zu Gerade und Kreis

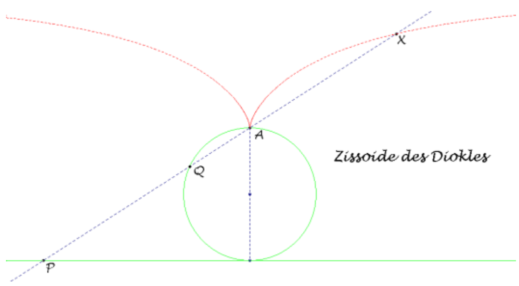
Eckart Schmidt

Bei einer Zissoide denkt man zunächst an die nach Diokles benannte Form [Sch;7]. Allgemeiner wird zu zwei Kurven und einem Punkt eine Zissoide erklärt [Loc;131]. In dieser Ausarbeitung werden zu einer Geraden und einem Kreis bzgl. eines Kreispunktes Zissoiden betrachtet, ihre Eigenschaften als anallagmatische Kurven aufgezeigt, ein spezielles Beispiel untersucht und abschließend Strophoiden angesprochen. – Gearbeitet wird in baryzentrischen Koordinaten.

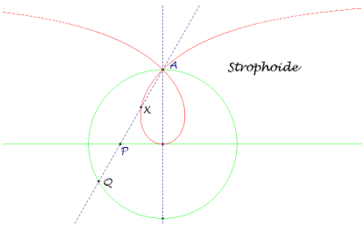


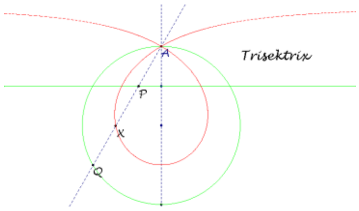
g-k-Zissoiden

Nach *Lockwood [Loc;131]* konstruiert sich eine Zissoide zu zwei Kurven und einem Bezugspunkt wie folgt: Zeichnet man Geraden durch den Bezugspunkt, die die erste Kurve in einem Punkt P und die zweite Kurve in einem Punkt Q schneiden, und trägt den Vektor PQ vom Bezugspunkt auf der Geraden ab, so erhält man Punkte der Zissoide.



Die Zissoide des Diokles lässt sich als eine Zissoide zu Gerade und Kreis auffassen, bei der die Gerade Tangente an den Kreis ist und der Bezugspunkt diametral zum Berührpunkt liegt. Entsprechend lassen sich auch die gewöhnliche Strophoide und Trisektrix darstellen.





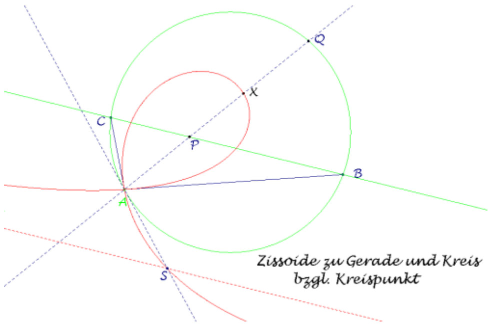
Im Folgenden sollen nun allgemeiner Zissoiden zu einer Geraden g und einem Kreis k betrachtet werden, wobei der Bezugspunkt A auf dem Kreis (aber nicht auf der Geraden) liegt und die Gerade den Kreis in zwei Punkten B und C schneidet, so dass das Dreieck ABC als Bezugsdreieck für baryzentrische Koordinaten gewählt werden kann. Für das Bezugsdreieck ABC wird also die Zissoide zu der Seitengeraden BC und dem Umkreis bzgl. der Ecke A betrachtet. Diese Zissoiden seien hier als g-k-Zissoiden angesprochen. Folgt man der Konstruktion analytisch, so erhält diese Zissoide die Gleichung

$$c^2y^3 + b^2z^3 + (3S_A - S_C)y^2z + (3S_A - S_B)yz^2 - a^2xyz = 0\,.$$

Benutzt werden neben den Seitenlängen die Conway-Abkürzungen

$$2S_A = -a^2 + b^2 + c^2, \quad 2S_B = a^2 - b^2 + c^2, \quad 2S_C = a^2 + b^2 - c^2,$$

$$sowie \quad S = \sqrt{S_AS_B + S_BS_C + S_CS_A} = 2\Delta.$$



Asymptote ist die am Bezugspunkt gespiegelte Gerade, d.h. die an der Ecke A gespiegelte Seitengerade BC, mit der Gleichung

$$x + 2y + 2z = 0$$

und dem Kurvenschnitt

$$S(2(b^2 - c^2) : -b^2 : c^2)$$

auf der Umkreistangente in A.

Weitere spezielle Kurvenpunkte zu Geraden durch A sind

… auf der Durchmessergeraden: $(S_Aa^2(\frac{S^2}{S_BS_C} + 1) : S_Bb^2 : S_Cc^2)$,

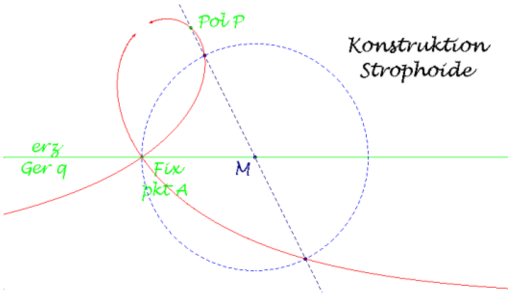
… auf der Seitenhalbierenden: $(8S_A : a^2 : a^2)$,

… auf der Höhe: $(S_Aa^4 : S_BS_C{}^2 : S_B{}^2S_C)$,

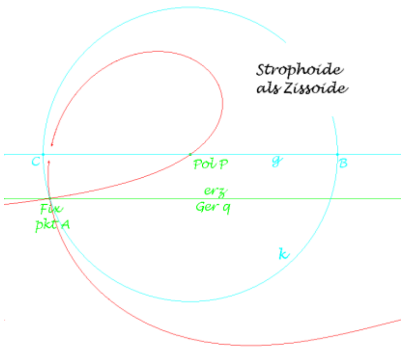
... auf der Winkelhalbierenden: $(-2a^2(b+c) + (b+c)^3 : a^2b : a^2c)$.

Die Strophoide

Betrachtet werden hier nach *Lockwood [Loc;135]* Strophoiden zu einer erzeugenden Geraden q bzgl. eines Pols $P \notin q$ und eines festen Punktes $A \in q$ nach folgender Konstruktion: Zeichnet man um Punkte M auf der erzeugenden Geraden einen Kreis durch den Fixpunkt $A \in q$ und von M die Verbindungsgerade zum Pol $P \notin q$, dann sind die Schnitte Punkte der Strophoide.



Eine g-k-Zissoide wird zur Strophoide, wenn die Gerade g durch die Mitte M des Kreises k geht. Diese Kreismitte ist dann der Pol der Strophoide und eine Parallele zur definierenden Geraden durch A die erzeugende Gerade der Strophoide.

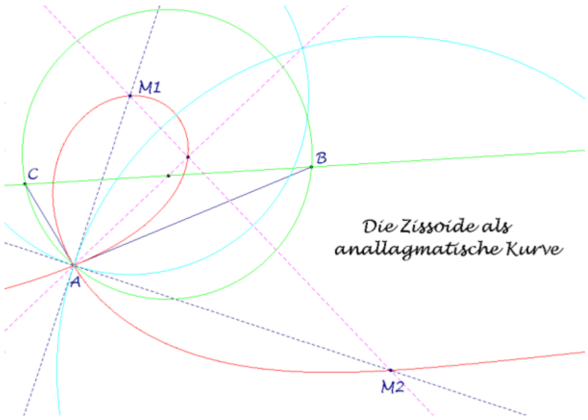


Die *g*-*k*-Zissoide als anallagmatische Kurve

Man bezeichnet eine Kurve als anallagmatisch, wenn sie durch eine Inversion auf sich abgebildet wird *[Sch;28]*.
Betrachtet man zu einer g-k-Zissoide die innere und äußere Winkelhalbierende bei A, so schneiden diese die Zissoide in den Punkten

$$M_{1,2}(-2a^2(b \pm c) + (b \pm c)^3 : a^2 b : \pm a^2 c),$$

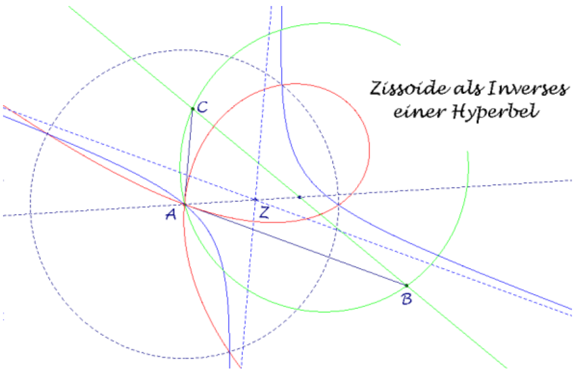
die auf einer Senkrechten zur Seitenhalbierenden im Schnitt mit der Zissoide liegen. Die Zissoide wird dann bei Spiegelungen an Kreisen um $M_{1,2}$ durch A auf sich abgebildet und ist somit eine anallagmatische Kurve.



Für eine Strophoide liegt der Pol P im Fußpunkt des Lotes von A auf M_1M_2 und die erzeugende Gerade q der Strophoide ist die Seitenhalbierende im Dreieck M_1AM_2 (vgl. abschließend).

Die *g*-*k*-Zissoide als Inverses eines Kegelschnitts

Wie andere anallagmatische Kurven lässt sich eine g-k-Zissoide auch als Inverses eines Kegelschnitts darstellen.



Spiegelt man die g-k-Zissoide an einem Kreis um A mit dem Radius r, so erhält man eine Hyperbel mit der Gleichung

$$r^2(y+z)(x+y+z)-a^2yz=0$$

und dem Zentrum $Z(a^2-2r^2:r^2:r^2)$ auf der Seitenhalbierenden. Die Asymptoten sind Parallelen zu den Seitengeraden AB und AC.

Die *g*-*k*-Zissoide als Fußpunktkurve

Eine g-k-Zissoide lässt sich auch als Fußpunktkurve einer Parabel darstellen: Legt man den Brennpunkt dieser Parabel in den auf dem Umkreis diametralen Punkt zu A

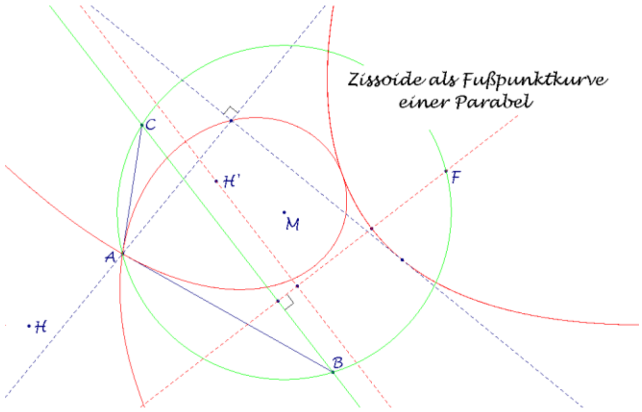
$$F(S_BS_C:-S_Bb^2:-S_Cc^2)$$

und wählt als Leitlinie eine Parallele zur Geraden BC durch den an A gespiegelten Höhenschnitt mit der Gleichung

$$\frac{S_Aa^2}{S_Aa^2+S^2}x+y+z=0\ ,$$

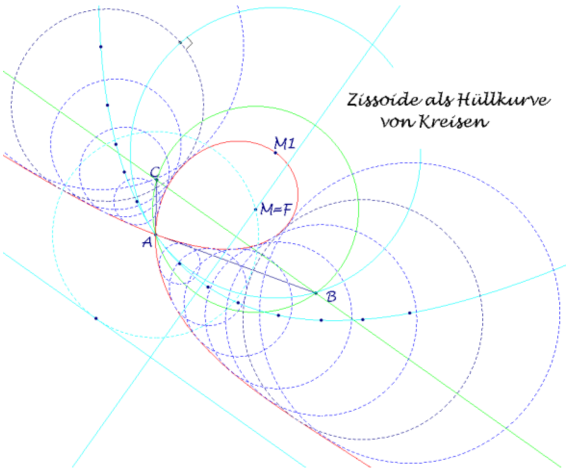
dann hat diese Parabel die Gleichung

$$-a^4x^2+(4S_Aa^2-S_C{}^2)y^2+(4S_Aa^2-S_B{}^2)z^2$$
$$+2(2S_A-S_C)a^2xy+2(2S_A-S_B)a^2zx+2(4S_Aa^2+S_BS_C)yz=0\,.$$
Lotet man jetzt vom Punkt A auf die Tangenten dieser Parabel, so liegen die Fußpunkte auf der Zissoide.



Die *g*-*k*-Zissoide als Hüllkurve von Kreisen

Ergänzend sei auch die Möglichkeit angesprochen, *g*-*k*-Zissoiden als Hüllkurven von Kreisscharen darzustellen:



Diese Kreise müssen die Inversionskreise um M_1 bzw. M_2 rechtwinklig schneiden. Ihre Mittelpunkte liegen auf zwei Parabeln mit dem gemeinsamen Brennpunkt im Mittelpunkt des definierenden Kreises k (Umkreismitte M von ABC). Die gemeinsame Achse ist eine Senkrechte zur definierenden Geraden g (Senkrechte zu BC). Die Leitlinien sind Tangenten an einen Kreis um A durch den Brennpunkt M. Die Gleichungen dieser Parabeln ergeben sich zu

$$a^4(y-z)^2-4a^2(b\pm c)(bz\pm cy)-(b\pm c)^2(2a^2-(b\mp c)^2)(y+z)^2=0.$$

Ein spezielles Beispiel

Zu einem Bezugsdreieck ABC sei die isogonale Abbildung

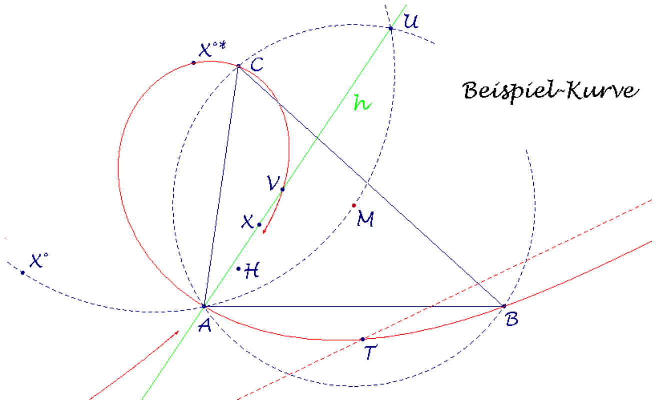
$$X(x:y:z)\rightarrow X^*(a^2yz:b^2zx:c^2xy)$$

und die Spiegelung am Umkreis

$X(x:y:z) \rightarrow$

$$X°(a^2(b^2c^2x^2 - 2a^2S_Ayz - b^2(S_A - S_B)zx - c^2(S_A - S_C)xy$$
$$: b^2(c^2a^2y^2 - 2b^2S_Bzx - c^2(S_B - S_C)xy - a^2(S_B - S_A)yz$$
$$: c^2(a^2b^2z^2 - 2c^2S_Cxy - a^2(S_C - S_A)yz - b^2(S_C - S_B)zx)$$

betrachtet; weiterhin eine Gerade h durch A, die als erzeugende Gerade der Kurve angesprochen sei. Spiegelt man diese Gerade zuerst am Umkreis, so ergibt sich ein Kreis durch A und M sowie den zweiten Schnitt U von Gerade und Umkreis. Bildet man diesen Kreis anschließend isogonal ab, so erhält man eine Kurve $h°*$, die eine g-k-Zissoide vermuten lässt. Die Kurve hat einen Knoten in A und enthält neben den Ecken B und C offensichtlich auch den Höhenschnitt H des Bezugsdreiecks.



Gibt man der erzeugenden Geraden h die Gleichung $py + qz = 0$, dann hat die Beispiel-Kurve die Gleichung

$$(b^2(b^2 - c^2)p - 2S_Cc^2q)yz^2 + (c^2(c^2 - b^2)q - 2S_Bb^2p)y^2z$$
$$+ b^4pxz^2 + c^4qxy^2 - (b^2(a^2 - b^2)p + c^2(a^2 - c^2)q)xyz = 0.$$

Die erzeugende Gerade schneidet

den Umkreis im Punkt $\quad U(\dfrac{(b^2 - c^2)pq}{b^2p + c^2q} : -q : p)$

und die Kurve im Punkt $\quad V(\dfrac{a^2pq}{b^2p - c^2q} : -q : p)$.

Die Gleichung der Asymptoten errechnet sich zu

$$(2S_Bb^2p + 2S_Cc^2q)pqx + (a^2b^2p^2 - (c^2q - b^2p)^2)qy$$
$$+ (a^2c^2q^2 - (b^2p - c^2q)^2)pz = 0$$

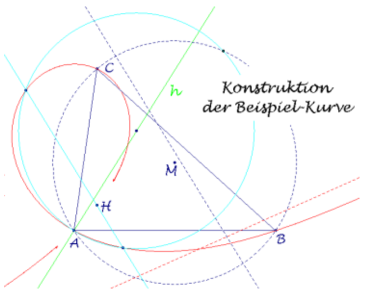
und der Schnitt von Kurve und Asymptote ist der Punkt

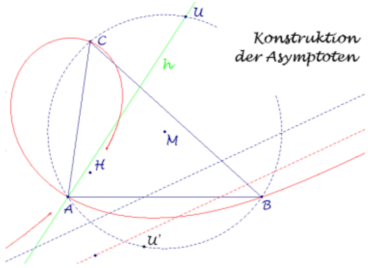
$$T(\frac{p-q}{2(S_Bb^2p + S_Cc^2q)} : \frac{pq}{a^2b^2p^2 - (b^2p - c^2q)^2} : \frac{pq}{-a^2c^2q^2 + (b^2p - c^2q)^2}).$$

Die Kurve und ihre Asymptote lassen sich wie folgt konstruieren:

Um Punkte der erzeugenden Geraden h werden Kreise durch den Punkt A gezeichnet und zu den zweiten Schnitten mit dem Umkreis die Simson-Geraden betrachtet. Parallelen zu diesen

Simson-Geraden durch den Höhenschnitt schneiden die eingangs genannten Kreise in Kurvenpunkten.





Zur Konstruktion der Asymptoten betrachte man die Simson-Gerade zum diametralen Punkt *U´* des zweiten Schnitts *U* der erzeugenden Geraden mit dem Umkreis. Spiegelt man *A* an dieser Simson-Geraden und zeichnet eine Parallele, so erhält man die Asymptote.

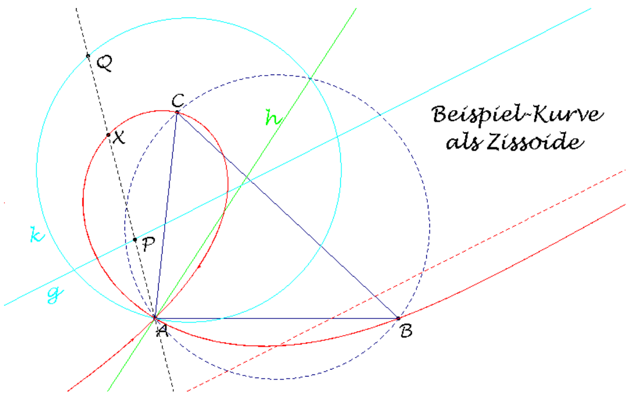
Die Beispiel-Kurve als *g*-*k*-Zissoide

Die Beispiel-Kurve des vorigen Abschnitts erweist sich als *g*-*k*-Zissoide, wenn man als Gerade *g* die an *A* gespiegelte Asymptote wählt mit der Gleichung

$$2(b^2pS_B+c^2qS_C)pqx-(a^2b^2p^2-(b^2p-c^2q)^2-4q(b^2pS_B+c^2qS_C))qy \\ -(a^2c^2q^2-(b^2p-c^2q)^2-4q(b^2pS_B+c^2qS_C))pz=0$$

und als Kreis *k* den an der erzeugenden Geraden *h* gespiegelten Umkreis des Bezugsdreiecks *ABC* mit der Gleichung

$$2(b^2pS_B+c^2qS_C)(py^2+qz^2)+(4S^2pq-(b^2-c^2)(b^2p^2-c^2q^2))yz \\ +(a^2c^2q^2-(b^2p-c^2q)^2)zx+(a^2b^2p^2-(b^2p-c^2q)^2)xy=0.$$



Betrachtet man jetzt eine Gerade durch *A*, die die Gerade *g* in *P*, den Kreis *k* in *Q* und die Kurve in *X* schneidet, dann bestätigt eine Berechnung, die hier unterdrückt sei, dass die Strecken *PQ* und *AX* gleich lang sind, so dass es sich bei der Kurve um eine *g*-*k*-Zissoide handelt.

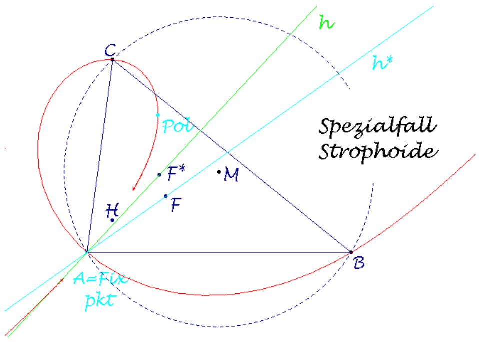
Die Beispiel-Kurve erweist sich als Strophoide, wenn als erzeugende Gerade *h* die Ecktransversale zu *A* durch den *Kosnita*-Punkt *[ETC;X54]* des Bezugsdreiecks gewählt wird.

Dieser Punkt ist das isogonale Bild der Mitte F des Neun-Punkte-Kreises

$$F^*\left(\frac{a^2}{S^2+S_BS_C}:\frac{b^2}{S^2+S_CS_A}:\frac{c^2}{S^2+S_AS_B}\right).$$

Als Gleichung dieser Strophoide erhält man

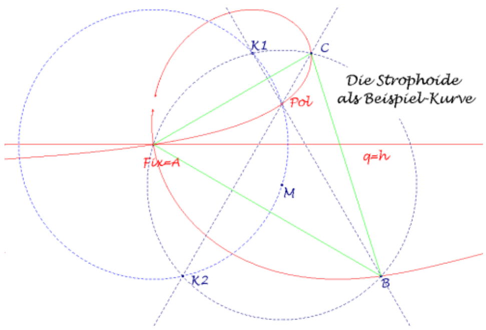
$$(S^2+S_AS_B)c^2xy^2-(S^2+S_AS_C)b^2xz^2+(S_B-S_C)b^2c^2xyz$$
$$+(S^2(4S_B-S_C)-S_B^2S_C)y^2z-(S^2(4S_C-S_B)-S_BS_C^2)yz^2=0\,.$$



Dann ist die erzeugende Gerade der Strophoide $q=h^*$, das isogonale Bild der erzeugenden Geraden h dieser Beispiel-Kurve. Fixpunkt ist der Punkt A und der Pol ist die Spiegelung der Umkreismitte M an der erzeugenden Geraden h.

Der Sonderfall Strophoide

Geht man von einer Strophoide aus, festgelegt durch eine erzeugende Gerade q, einen Fixpunkt A auf dieser Geraden und einen Pol P, dann zeichnen sich abschließend drei Möglichkeiten ab, eine Strophoide baryzentrisch bzgl. eines Dreiecks ABC zu beschreiben:



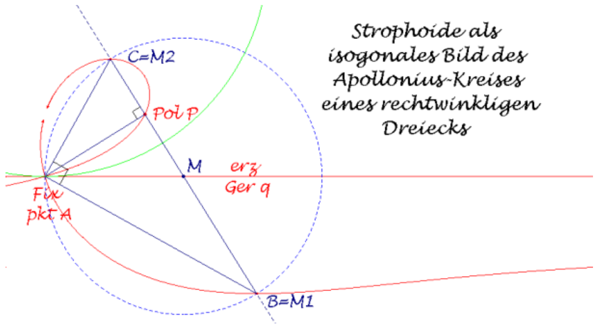
(1) … als Beispiel-Kurve: Dazu sei die erzeugende Gerade der Strophoide auch erzeugende Gerade der Beispiel-Kurve, d.h. Winkelhalbierende in einem Bezugsdreieck *ABC*, das man wie folgt erhält: Die Spiegelung des Pols P an der erzeugenden Geraden q sei der Punkt M. Ein Kreis um M durch den Fixpunkt A und ein Kreis um A durch M schneiden sich in zwei Punkten K_1 und K_2. Verbindet man den Pol P mit K_1 und K_2, dann liefern die zweiten Schnitte dieser Verbindungsgeraden mit dem Kreis um M die Punkte B und C für ein Bezugsdreieck

ABC. Die Strophoide ist dann das isogonale Bild einer am Umkreis dieses Bezugsdreiecks gespiegelten Winkelhalbierenden und hat die Gleichung

$$c^3xy^2 - b^3xz^2 - (b-c)(bc+2S_A)xyz$$
$$-((b^2-c^2)c - 2bS_B)y^2z - ((b^2-c^2)b + 2cS_C)yz^2 = 0.$$

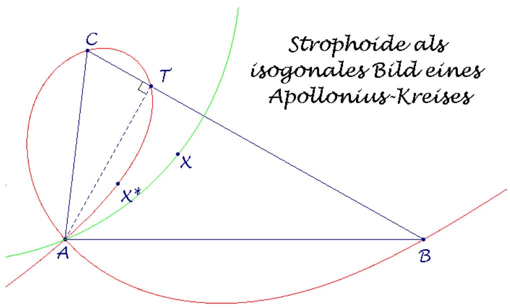
(2) … als *g*-*k*-Zissoide: Zeichnet man eine Parallele zur erzeugenden Geraden *q* der Strophoide durch den Pol *P*, so ist dies die Gerade *g* der Zissoide; ein Kreis um *P* durch den Fixpunkt *A* liefert den Kreis *k* der Zissoide (vgl. oben). Bezeichnet man die Schnitte von *g* und *k* mit *B* und *C*, so erhält man ein rechtwinkliges Bezugsdreieck *ABC* mit der Strophoiden-Gleichung

$$b^2z(z^2 - xy - y^2) + c^2y(y^2 - zx - z^2) = 0.$$



(3) … als isogonales Bild des Apollonius-Kreises durch *A*, wenn man als Bezugsdreieck das rechtwinklige Dreieck M_1AM_2 nimmt, bestehend aus dem Fixpunkt *A* und den Inversionszentren M_1 und M_2 (vgl. oben). Diese Inversionszentren liegen auf einer Senkrechten im Pol *P* zur Verbindungsgeraden mit dem Fixpunkt *A*. Schneidet die erzeugende Gerade *q* der Strophoide diese Senkrechte im Punkt *M*, dann liefert ein Kreis um *M* durch *A* auf der Senkrechten die Ecken $B=M_1$ und $C=M_2$ in den Inversionszentren der Strophoide. Zu diesem rechtwinkligen Bezugsdreieck hat die Strophoide die sehr einfache Gleichung

$$b^2z^2(2y+x) - c^2y^2(2z+x) = 0.$$



Abschließende Anmerkung: Das isogonale Bild eines Apollonius-Kreises eines Bezugsdreiecks ist eine Strophoide.

Wählt man also auf vorgegebener Strophoide einen Punkt *T* und errichtet eine Senkrechte in *T* zu *AT*, die die Strophoide in *B* und *C* schneidet, dann ist die Strophoide das *ABC*-isogonale Bild des Apollonius-Kreises durch *A*.

Literatur

[Sch] H. Schmidt: Ausgewählte höhere Kurven. – Kesselringsche Verlagsbuchhandlung Wiesbaden,1949.

[Loc] E. H. Lockwood: A Book of Curves. – Cambridge, At the University Press, 1961.

[ETC] C. Kimberling: Encyclopedia of Triangle Centers. – http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/.

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de